Grigore Gheba   Lucreţia Gheba   Carmina Gheba

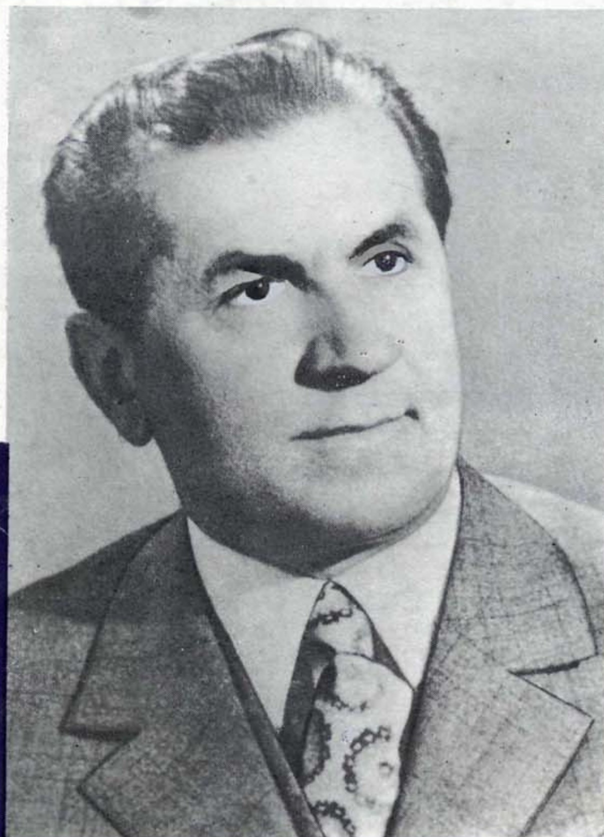
PENTRU CLASELE V-IX

Exerciţii şi probleme de matematică









Dragi elevi
Vă doresc mult succes în
studiul matematicii.

Prof. G. Gheba



EDITURA ICAR-BUCUREŞTI
B-dul Bucureştii Noi nr. 68, sc. F, et. 3,
ap. 10, sector 1, cod 78494
Telefon: 67.12.88, 60.15.75

ISBN 973-606-152-3 **Lei 350**

Grigore Gheba

Lucreţia Gheba

Carmina Gheba

EXERCIŢII ŞI PROBLEME DE MATEMATICĂ

pentru clasele V – IX

Ediţie revăzută şi adăugită



Editura I C A R ● Bucureşti — 1992

Referent : prof. Cătălin – Petru Nicolescu

ISBN – 973 – 606 – 152 – 3

Redactor : prof. Elisabeta Mesaroş
Tehnoredactor : Otto Paraschiv Necşoiu
Grafica : pictor Nadejda – Luminiţa Nicolescu
grafician Dumitru Şmalenic
Culegere text M E G A – S.A. / Colectiv C.I.P.I.
Tehnoredactare computerizată : Eugen Constantinescu

PREFAŢĂ

In această ediţie, am adus multe îmbunătăţiri la fiecare capitol din ediţiile vechi şi am completat lucrarea cu capitole noi, care să vină în sprijinul elevilor în abordarea unor teme mai dificile în interpretarea şi rezolvarea lor.

Structura lucrării nu coincide întru totul cu structura manualelor actuale, dar ea conţine toate cunoştinţele prevăzute în programa şcolară, cît şi unele teme cu un grad mai deosebit de dificultate pentru elevii cu preocupări mai deosebite la matematică.

La marea majoritate a noilor probleme adăugate, enunţul urmăreşte să-l pună pe rezolvitor ca, în afară de cunoaşterea temeinică a elementelor teoretice, să dovedească inventivitate şi să încerce un mai mare efort de creaţie.

Am pus un mare accent, atît în enunţuri cît şi în indicaţii, pe stabilirea condiţiilor de existenţă pentru ca elevul să se obişnuiască să precizeze mulţimea valorilor cu care are dreptul să opereze. Aceasta, evident, îi dă posibilitatea să evite unele concluzii eronate la care ar putea ajunge dacă n-ar lucra riguros.

Pentru a scuti elevii, în studiul lor individual, de alte ajutoare din afara şcolii, am considerat necesar să adaug acestei ediţii noi capitole. Acestea conţin multe şi variate teme de algebră şi geometrie rezolvate, însoţite de indicaţii metodice, asfel încît elevii să sesizeze calea de urmat în rezolvarea unor teme cu un grad mai mare de dificultate.

In noua formă, considerăm că lucrarea contribuie în şi mai mare măsură la sprijinirea îmbunătăţirii procesului de învăţare a matematicii.

Autorii

I. CLASA a V–a

I.1 Mulţimi – BREVIAR

A. Simboluri

Dăm mai jos cîteva din simbolurile matematice pe care le vom utiliza în rezolvarea unor exerciţii şi probleme.

Elementele unei mulţimi se scriu între acolade { }.

Exemple: a) {1, 2, 7, 10}; {a, b, c};
b) {albinele dintr–un roi};
c) {oile dintr–o turmă};
d) {porumbeii dintr–un stol};
e) {copiii dintr–o familie};
f) {elevii dintr–o clasă};
g) {numerele naturale}.

Se observă, din exemplele de mai sus, că mulţimile pot fi notate (prezentate, descrise) în două moduri:

a) prin enumerarea elementelor (exemplul a);
b) printr–o proprietate comună a elementelor [exemplele: b),c)...g)].

$\in$ = aparţine; $\notin$ = nu aparţine

Exemple: considerăm mulţimile $A=\{a;\ b;\ c\}$; $B=\{1;\ 2;\ 3\}$.

Se scrie $a\in A$; $b\in A$; $2\notin A$; $3\in B$; $c\notin B$, după cum elementele se află sau nu în mulţimile respective.

La notarea unei mulţimi printr–o proprietate comună folosim scrierea

$$A=\{x \in N \mid x < 4\}$$

care se citeşte astfel: A este mulţimea elementelor x care aparţin numerelor naturale mai mici decît numărul natural 4.

$\rightarrow$ semnul de implicaţie

Exemplu: dacă $x=y \rightarrow y=x$, se citeşte: dacă x este egal cu y rezultă că y este egal cu x.

$\subset$; $\supset$ pentru incluziune

Dacă $A=\{a;\ b;\ c;\ d\}$ şi $B=\{c;\ d\}$ atunci $B\subset A$ sau $A\supset B$ se citeşte B este inclus în A sau A include pe B sau B este o submulţime a mulţimii A (fig. I.1). $A\not\subset B$ (A nu este inclus în B).

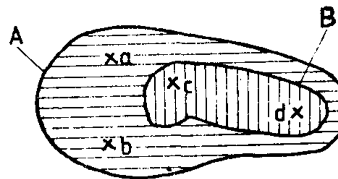


Fig.I.1

$\cap$ semnul pentru intersecţia de mulţimi

Exemplu: dacă $A=\{a; b; c; 2; 3\}$, $B=\{a; b; 5; 8\}$ atunci $A\cap B=\{a; b\}$ se citeşte A intersectat cu B şi reprezintă mulţimea elementelor comune celor două mulţimi, în cazul nostru $\{a; b\}$.

$\varnothing$ semnul pentru mulţime vidă (nu conţine nici un element)

Exemplu: mulţimile $A=\{2; 7; 8; 9\}$ şi $B=\{4; 5; 60\}$ nu au nici un element comun. Se poate scrie $A\cap B=\varnothing$.

$\cup$ pentru reuniune de mulţimi

Exemplu: $A=\{1; 2; 3; a; b\}$; $B=\{2; 3; c; d\}$

$A\cup B=\{1; 2; 3; a; b; c; d\}$ (elementele reuniunii celor două mulţimi).

$\sim$ semnul de echivalenţă

între elementele a două mulţimi: dacă fiecărui element dintr–o mulţime A îi corespunde un element şi numai unul dintr–o mulţime B şi reciproc se spune că între elementele celor două mulţimi există o corespondenţă biunivocă şi atunci cele două mulţimi sînt echivalente şi se notează $A\sim B$.

Exemplu: $A=\{a; b; c\}$, $B=\{1; 2; 3\}$ (figura I.2)

Observaţie. Două mulţimi A şi B cu un număr finit de elemente trebuie să aibă acelaşi număr de elemente ca ele să fie echivalente.

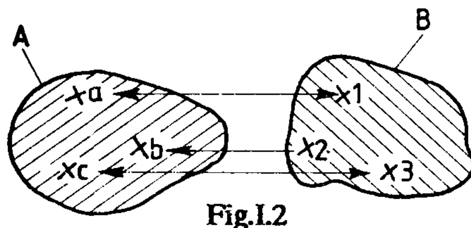


Fig.I.2

Exemplu: la începutul anului şcolar elevii din clasa întîi sînt conduşi într–o clasă în care se află un număr de măsuţe egal cu numărul elevilor. Fiecare elev se aşează la o măsuţă; nu mai rămîne nici un elev fără măsuţă şi nici vreo măsuţă liberă.

a) Mai întîi remarcăm două mulţimi. $A=\{$mulţimea elevilor de clasa întîi intraţi în clasă$\}$; $B=\{$mulţimea măsuţelor$\}$.

b) Intre elementele acestor mulţimi (elevi şi măsuţe) se stabileşte o legătură şi anume fiecărui elev îi corespunde o măsuţă şi fiecărei măsuţe îi corespunde un elev. Mulţimile în acest caz sînt echivalente şi se notează $A\sim B$.

Fiind date mulţimile A şi B, mulţimea elementelor care aparţin mulţimii A şi nu aparţin mulţimii B se numeşte diferenţa dintre mulţimile A şi B şi se notează:

$$A-B=\{\,x \mid x\in A \text{ şi } x\notin B\}$$

Exemple:

a) $A=\{2; 3\}$; $B=\{4; 5; 6\}$; $A-B=\{2; 3\}=A$ căci $A\cap B=\varnothing$.

b) $C=\{4; 2; 6; 8\}$; $D=\{6; 4; 8; 10; 12\}$. $C-D=\{2\}$ iar $D-C=\{10; 12\}$.

Observaţie. $C-D\neq D-C \rightarrow$ diferenţa a două mulţimi nu este comutativă. $C-D$ şi $D-C$ nu au elemente comune $\rightarrow (C-D)\cap(D-C)=\varnothing$ sau cele două mulţimi sînt disjuncte.

Dacă $B\subset A$, atunci diferenţa $A-B$ se mai numeşte complementara mulţimii

B față de *A* și se notează cu semnul $C_A B$.

Cîteva exemple vor pune în evidență notația de mai sus.

a) ; $A = \{\Delta ; \square ; 3; 2\}$; $B = \{3;2\}$.

Se observă că

$A - B = \{\Delta; \square\} = C_A B$ (fig. I.3).

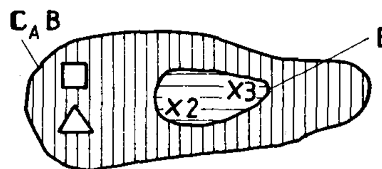


Fig.I.3

b) Fie mulțimile:

$A = \{2; 5; 4\}$; $B = \{2; 5; 4; 6\}$.

Avem $A - B = \emptyset$; $B - A = \{6\}$ sau $C_B A = \{6\}$.

c) $A = \{a; b; c; d\}$; $B = \{a; d\}$

$A - B = \{b; c\}$ sau $C_A B = \{b; c\}$, $B - A = \emptyset$ (fig. I.4).

Card *A* sau $\bar{\bar{A}}$ (cardinalul mulțimii *A*).

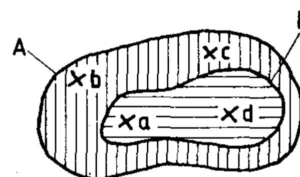


Fig.I.4

Cardinalul unei mulțimi finite arată cîte elemente are acea mulțime.

Exemplu: $A = \{a; b; c; d; m\}$; cardinalul mulțimii *A* este 5.

Card $\emptyset = 0$ (zero); Card $\{0\} = 1$; Card $\{0; 1\} = 2$.

Cardinalul unei mulțimi este un număr natural.

B. Propoziții

O propoziție poate fi *adevărată* sau *falsă*.

Exemplu: numărul 4 este mai mic decît numărul 5; $(4<5)$ este o propoziție adevărată.

Numărul 8 este mai mare decît numărul 12; $(8>12)$ este o propoziție falsă.

Spunem că valoarea de adevăr a unei propoziții este *adevărul*, dacă propoziția este adevărată și că valoarea de adevăr a unei propoziții este *falsul*, dacă ea este falsă.

Prin negația unei propoziții se schimbă valoarea ei de adevăr: propoziția adevărată devine falsă, iar propoziția falsă devine adevărată.

In matematică propozițiile se studiază numai din punctul de vedere al valorii de adevăr.

Propozițiile le vom nota cu literele: p; q; r; s; p_1; p_2 etc.

Exemplu: fie mulțimea $A = \{m; n; c; d\}$ și propozițiile

$$p : m \in A; p_1 : n \in A; p_2 : d \notin A.$$

Propozițiile p și p_1 sînt adevărate, valoarea lor de adevăr este adevărul, propoziția p_2 are ca valoare de adevăr falsul.

Exerciții

1) Se dă egalitatea $\{a; 3; 4;\} = \{5; 3; 4\}$.

a) Să se găsească *a* în așa fel ca propoziția să fie adevărată.

b) Să se determine valorile lui *a* ca propoziția să fie falsă.

R. a) $a=5$, b) orice număr diferit de 5.

2) Fie mulțimea $A = \{7; 8; 5; 9; 12; 17\}$ și propoziția $p : x \in A$, $3/x$ propoziția *p* poate fi adevărată sau falsă. Valoarea ei de adevăr depinde de elementul *x* ce aparține lui *A*.

Dacă x este unul din numerele 9 sau 12 atunci propoziția este adevărată, în caz contrar ea este falsă. Trebuie să precizăm ce număr este $x \in A$ în condițiile puse de problemă (ca să fie divizibil prin 3)

C. Funcții

In lumea înconjurătoare sînt diferite feluri de mărimi. Unele mărimi au legătură între ele, sînt dependente; de exemplu salariul unui muncitor depinde de numărul de zile lucrate, de calitatea muncii depuse precum şi de alţi factori; aria unei arene circulare depinde de mărimea razei cercului. Studiindu–se aceste legături, s–au stabilit unele *legi* care au condus uneori la *formule*. De exemplu: aria cercului se află prin înmulțirea numărului π cu pătratul razei.

Să considerăm mulțimea $M=\{3; 4; 5; 6; 7\}$ în care fiecare element reprezintă, în cm, mărimea laturii unui pătrat. Să aflăm ariile acestor pătrate; ele vor forma mulțimea

$$P=\{9; 16; 25; 36; 49\} \text{ (în cm}^2\text{)}.$$

Avem o *corespondență* între mulțimile M şi P, stabilită prin formula: Aria$=L^2$. Se spune că, din punct de vedere matematic, am definit o *funcție*: M este mulțimea de definiție (numită domeniu de existență), P este mulțimea de valori (sau codomeniul) iar corespondența între cele două mulțimi se face prin formula

$$\text{Aria}=L^2$$

Un alt exemplu de funcție: să considerăm numerele întregi cuprinse între 8 şi 13; acestea sînt 9; 10; 11; 12. Să se afle mulțimea formată din întreitul acestor numere. In cazul acesta, domeniul de existență este mulțimea $A=\{9; 10; 11; 12\}$, codomeniul este mulțimea $B=\{27; 30; 33; 36\}$, iar corespondența între cele două mulțimi s–a făcut printr–o operație de înmulțire.

La definirea unei funcții sînt necesare *două mulțimi şi o lege de corespondență care să stabilească trecerea de la domeniul de existență la domeniul de valori.*

Funcțiile se notează cu literele f, g, h sau cu alte simboluri matematice: log, sin, arccos, ...

In general, fie două mulțimi X, Y; dacă facem ca oricărui element x din X să–i corespundă un element y din Y, şi numai unul, spunem că am definit o funcție pe X cu valori în Y. Se mai spune: aplicație a lui X cu valori în Y. Dînd lui x diferite valori numerice, după voie, fără să ne preocupăm de ce valori ia y, putem spune că x variază independent de y sau că x este *variabila independentă* iar y este *variabila dependentă.*

Expresia matematică a funcției este $y=f(x)$ care arată corespondența între cele două mulțimi; mai putem exprima o funcție astfel: $f:X \to Y$ sau $X \xrightarrow{f} Y$, adică o funcție f definită pe X cu valori în Y.

*
* *

Noţiunea de funcţie este una din cele mai importante noţiuni din matematică şi în epoca contemporană a calculatoarelor electronice cele mai multe aplicaţii ale tehnicii moderne folosesc această noţiune. Intr–adevăr, orice studiu cantitativ al unor fenomene din natură sau din producţie urmăreşte să stabilească corespondenţa între elementele a două mulţimi.

In cele ce urmează vom mai da cîteva exemple de funcţii şi vom face unele observaţii.

–Lungimea unui cerc depinde de raza cercului şi se ştie că ea se calculează prin formula $L=2\pi R$.

Dacă luăm pentru R valorile 2; 3; 4; (în metri) vom afla lungimile de 4π; 6π; 8π (în metri). In cazul de faţă $X=\{2;\ 3;\ 4\}$; $Y=\{4\pi;\ 6\pi;\ 8\pi\}$ şi legea de corespondenţă $L=2\pi R$. Deoarece la valori din ce în ce mai mari date lui R lungimea cercului creşte, se spune că funcţia este crescătoare. Variaţia unei funcţii se poate scrie într–un tablou, numit tabloul de variaţie al funcţiei; pentru exemplul precedent avem tabloul:

R	2	3	4
L	$4\pi\nearrow$	$6\pi\nearrow$	8π

–Să considerăm funcţia $f(x)=x^2$, în care $x\in R$ şi să atribuim lui x valorile crescătoare 2; $2\frac{1}{4}$; $2\frac{1}{2}$; $2\frac{3}{4}$; 3; $3\frac{1}{4}$. Intocmind tabloul de variaţie avem:

x	2	$2\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	3	$3\frac{1}{4}$
$f(x)$	$4\nearrow$	$\frac{81}{16}\nearrow$	$\frac{25}{4}\nearrow$	$\frac{121}{16}\nearrow$	$9\nearrow$	$\frac{169}{16}$

Şi în acest caz, pentru intervalul studiat, funcţia este *crescătoare* (fig. I.5,a).

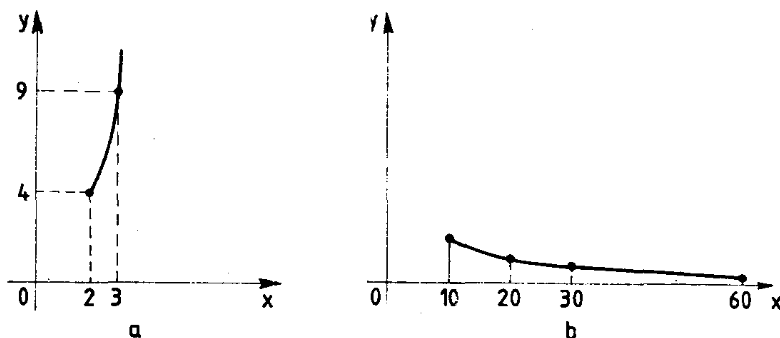


Fig.I.5

Putem considera fiecare pereche de valori ca fiind coordonatele unui punct din plan. Figurăm punctele şi unindu–le printr–o linie continuă, se obţine *graficul funcţiei*.

Studiul unei funcţii prin tablou şi apoi ilustrată prin grafic ajută la interpretarea unor fenomene din fizică, astronomie, cum se va constata mai tîrziu.

–Un alt exemplu:

Se ştie că în cazul mişcării uniforme spaţiul se exprimă prin formula $s=vt$; de aici se poate deduce: $v=\frac{s}{t}$ sau $t=\frac{s}{v}$.

Să studiem cum variază timpul într–o asemenea mişcare, dacă viteza variază, spaţiul rămînînd constant (acelaşi).

De exemplu: distanţa Bucureşti–Ploieşti (60 km) este parcursă de un autobuz, care are o viteză orară de 60 km în timp de o oră, un camion care are $v=30$ km/h parcurge aceeaşi distanţă în două ore, un altul care are $v=20$ km/h parcurge acelaşi drum în 3 ore, un biciclist cu $v=10$ km/h parcurge aceeaşi distanţă în 6 ore.

Putem alcătui următorul tablou în care

$X=\{60; 30; 20; 10\}$ în km, $Y=\{1; 2; 3; 6\}$ în ore

v	10	20	30	60
t	6↘	3 ↘	2 ↘	1

Funcţia este *descrescătoare*. Graficul, în care pe o axă notăm unitatea (km) şi pe cealaltă unitatea (ora) reprezintă *o linie curbă descendentă* (fig. I.5,b).

* * *

In cele spuse privitoare la funcţii, am folosit numai exemple de *funcţii numerice*, adică funcţii în care X şi Y sînt mulţimi de numere reale şi legea de corespondenţă se poate exprima printr–o formulă. In clasele superioare se vor studia şi alt fel de funcţii.

Prezentăm cîteva diagrame, pentru înţelegerea noţiunii de funcţie la nivelul claselor V–VIII.

Fiind date 2 mulţimi E şi F (fig I.6), să se figureze diagramele funcţiilor posibile, definite pe E şi cu valori în F.

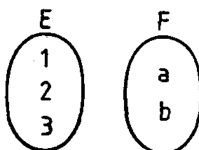


Fig.I.6

Diagramele celor 8 funcţii posibile sînt prezentate în figura I.7.

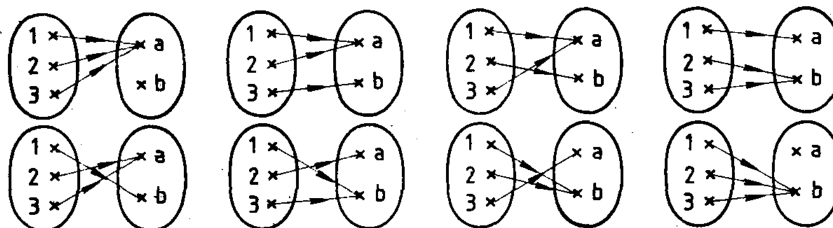


Fig.I.7

Diagramele pot fi reprezentate şi în alte moduri. Dăm cîteva exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & b & a \end{pmatrix} \ldots\ldots$$

I.2. EXERCIŢII ŞI PROBLEME CU MULŢIMI

1. Scrieţi 3 mulţimi.

2. Scrieţi două exemple de mulţimi prin enumerarea elementelor fiecărei mulţimi.

3. Notaţi următoarele mulţimi:
a) Mulţimea literelor din care este compus cuvîntul "mama".
b) Mulţimea numerelor naturale mai mici ca 7.
c) Mulţimea numerelor naturale mai mari ca 8 şi mai mici ca 14.
d) Mulţimea literelor cuvintelor: "tata", "capcană".
Menţionaţi care din aceste mulţimi este descrisă prin enumerare şi care din ele printr-o proprietate comună. Scrieţi în două moduri mulţimile de mai sus.

4. Fie mulţimile: $A = \{x \in N \mid 4 < x < 9\}$;
$B = \{x \in N \mid 20 < x < 24\}$.
a) Să se determine aceste mulţimi.
b) Să se scrie cîte două elemente care aparţin mulţimilor date şi cîte două care nu aparţin.

R. a) $A=\{5; 6; 7; 8\}$ $B=\{21;22;23\}$
b) $\{5; 6\}\subset A$; $\{21; 22\}\subset B$.

5. Scrieţi mulţimile literelor din care sînt alcătuite cuvintele: "car", "rac", "păr", "pas".
a) Care din aceste mulţimi sînt egale şi care nu? Justificaţi răspunsul.

R. $A=\{c; a; r\}$; $B=\{r; a; c\}$; $C=\{p; ă; r\}$; $D=\{p; a; s\}$;
$A=B$(au aceleaşi elemente), $C\neq D$(n-au aceleaşi elemente).

6. a) Fie mulţimile: $A=\{4; 5; x\}$, $B=\{4; 5; 8\}$, să se determine x din mulţimea A astfel ca $A=B$.
b) Fie $M=\{7; x; 8; b\}$; $N=\{b; 8; 7; 9\}$, să se determine x în cazul cînd $M=N$.

R. $x=8$; $x=9$.

7. Care din următoarele mulţimi sînt egale şi care nu? $A=\{1; 2; 3; a\}$; $B=\{2; 3; m; n\}$; $C=\{3; a; 1; 2\}$.

R. $A\neq B$; $A=C$; $B\neq C$.

8. Se dau mulţimile *A, B, C*, reprezentate ca în fig.I.8, a, b, c. Să se scrie aceste mulţimi. Care din ele sînt egale şi care nu sînt ?

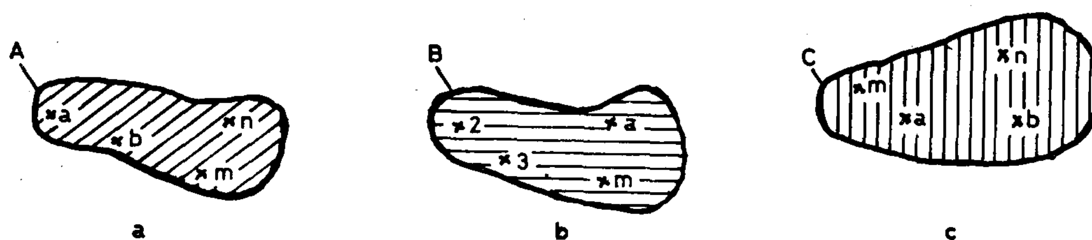


Fig.I.8

9. a) Să se pună în evidenţă, prin grafic, multimile ale căror elemente sînt literele cuvintelor "rame" şi "mare". b) Să se compare aceste mulţimi.

R. **b)** Mulţimile sînt egale.

10. Să se pună în evidenţă graficul mulţimilor:
$A=\{x \mid x$ literă a cuvîntului "literă"$\}$, $B=\{x \mid x$ literă a cuvîntului "barieră"$\}$.
Scrieţi mulţimea M a elementelor comune ale celor două mulţimi.

R. $M=\{ă; e; i; r\}$.

11. Se dau mulţimile A şi B reprezentate în fig.I.9.
a) Să se scrie aceste mulţimi.
b) Să se scrie mulţimea C a elementelor comune.

R. a) $A=\{2; 3; 4; 5\}$, $B=\{2; 4; a; b\}$;
b) $C=A \cap B=\{2; 4\}$.

12. Determinaţi $A=\{x \in N \mid x < 4$ şi divizibil cu $5\}$.

R. $A=\emptyset$.

13. Se dau mulţimile A şi B ca în figura I.10, să se pună în evidenţă relaţiile: $\not\subset$; $\subset$; $\cap$ a mulţimilor A şi B.

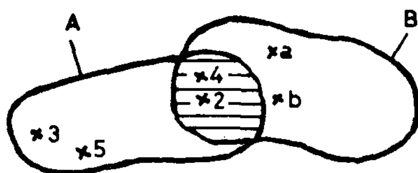


Fig.I.9

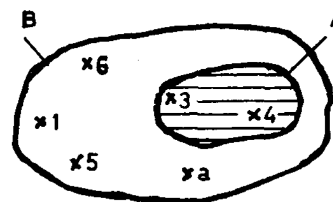


Fig.I.10

14. Se dau mulţimile: $A=\{2; 3; 5; a\}$; $B=\{5; a; 2\}$, să se scrie că B este o submulţime a mulţimii A; B este inclus în A; A include pe B.

15. Fie mulţimea $A=\{x \in N \mid 6 < x < 12\}$, să se formeze mulţimea submulţimilor mulţimii A.

16. Se dă mulţimea: $A=\{0; 1; 3; 4; 5; 6; 7; 12\}$, să se scrie mulţimea $B=\{x \in A \mid x$ divizibil cu $3\}$.

R. $B=\{0; 3; 6; 12\}$.

17. Să se determine mulţimea E ştiind că: $\{2, 3\} \subset E, \{4, 5\} \subset E$ şi $E \subset \{2; 3; 4; 5\}$.

R. $E=\{2; 3; 4; 5\}$.

32. Fie mulțimile reprezentate ca în figura I.14. a) Scrieți o proprietate pe care o îndeplinește mulțimea *B*. b) Scrieți o proprietate pe care o îndeplinesc elementele mulțimii $C_B A$. c) Determinați $A \cap B$.

R. a) $B \subset A$; b) $C_B A = B - A = \emptyset$; c) $A \cap B = B = \{3; 4; m\}$.

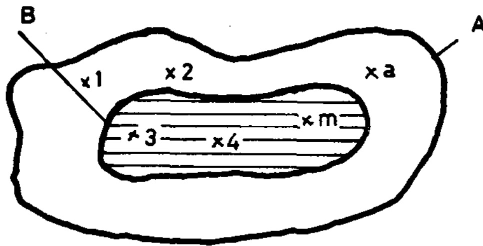


Fig.I.14

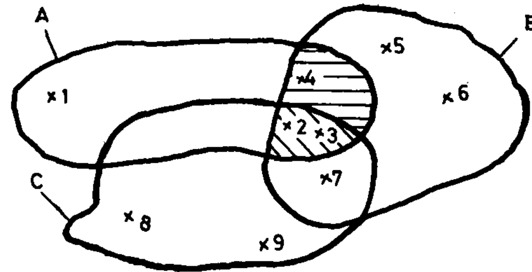


Fig.I.15

33. Fie mulțimile *A, B și C* reprezentate în figura I.15. Să se scrie mulțimile: $A \cap B$; $B \cap C$; $(A \cap B) \cup C$; $(A \cup B) - (B \cap C)$; $(A \cap B) - (C \cap A)$; $A \cap (B - A)$.

R. $A \cap B = \{2; 3; 4;\}$; $B \cap C = \{2; 3; 7\}$; $A \cap (B - A) = \{\ \emptyset\}$;
$(A \cap B) \cup C = \{2; 3; 4\} \cup \{2; 3; 7; 8; 9\} = \{2; 3; 4; 7; 8; 9\}$
$(A \cap B) - (B \cap C) = \{2; 3; 4\} - \{2; 3; 7\} = \{4\}$;
$(A \cup B) - (C \cap A) = \{1; 4; 5; 6; 7\}$.

34. Fie mmulțimile $A = \{1;2;3; a; b\}$; $B = \{1;2;3; m; c\}$.
a) Să se scrie $A \cup B$ și $A \cap B$.
b) Să se reprezinte grafic $A \cup B$ *și* $A \cap B$.
c) Mulțimile *A* și *B* sînt egale? Dați exemple de mulțimi egale.

R. a) $\{1; 2; 3; a; b; c; m\}$; $\{1; 2; 3\}$;
c) $A \neq B$ (nu au aceleași elemente).

35. Se consideră *a, b, c, x, y, z* cifre și operațiile:

$$\begin{array}{r} a543+ \\ 3b56 \\ 11c1 \\ \hline 7110 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x345+ \\ 1y62 \\ 57z1 \\ \hline 9538 \end{array}$$

Cifrele *a, b, c,* determinate le considerăm elementele mulțimii *A*, iar cifrele *x, y, z* ca elemente ale mulțimii *B*.
a) Să se scrie aceste mulțimi.
b) Să se determine mulțimile $A \cup B$ și $A \cup B$. Să se pună în evidență relațiile de incluziune între aceste mulțimi.

R. a) $A = \{2; 4; 1\}$; $B = \{2; 4; 3\}$;
b) $\{1; 2; 3; 4\}$; $\{2; 4\}$, $A \not\subset B$.

36. Se consideră operaţiile:

$5x2z-$	$a24b-$	$8m2-$
$12y3$	$1c25$	$36n$
4462	1816	488

x, z, y, a, b, c, m, n reprezintă cifre şi sînt considerate elementele mulţimilor D, M şi P. Ele au fost şterse şi menţionate cu literele respective după ce s-au efectuat scăderile respective.

a) Să se determine: $(D \cup M) \cap P$ şi $(M \cup P) \cap D$.

b) $D \cup M \cup P$ şi $(D \cap M) \cup P$.

R. $D=\{7; 6; 5\}$; $M=\{3; 1; 4\}$; $P=\{5; 4\}$;
a) $(D \cup M) \cap P=\{4; 5\}$; $(M \cup P) \cap D=\{5\}$;
b) $D \cup M \cup P=\{1; 3; 4; 5; 6; 7\}$; $(D \cap M) \cup P=\{P\}$.

37. a) Să se afle prin altă operaţie în afară de împărţire care din împărţirile următoare se fac exact. Justificaţi răspunsul:

1 440:36; 2 836:315; 15 120:168; 792:144.

b) Factorii primi ai fiecărui impărţitor din împărţirile menţionate mai sus sînt consideraţi elemente ale mulţimilor A, B, C, D.

Să se determine $A \cup B \cup C \cup D$; $(A \cup B) \cap (C \cup D)$; $(A \cup B \cap C) \cap D$.

R. b) $\{2; 3; 5; 7\}$; $\{2; 3; 7\}$; $\{2; 3\}$.

38. a) Fără a efectua împărţirea să se spună ce rest va rămîne la împărţirea numărului 27 346 la 5, la 9, la 10, la 25.

b) Aceeaşi întrebare pentru numărul 591 427.

c) Resturile împărţirilor şi împărţitorii menţionaţi la a) sînt considerate elemente ale mulţimillor A *şi* B, iar la punctul b) C şi D. Să se determine $(A \cup B) \cap (C \cup D)$; $(A \cup D \cap C) \cup B$; $(A \cup B \cup C \cup D) \cap (A \cup D)$.

R. c) $A=\{1;4;6;21\}$; $B=\{5;9;10;25\}$; $C=\{2;1;7\}$; $D=B$.

39. Fie mulţimea $A=\{v; e; v_1; c; u\}$ în care elementele reprezintă vîrstele maxime pe care le poate avea o veveriţă (v) ce trăieşte cu 3 ani mai puţin decît iepurele (e), o vulpe (v_1) care trăieşte de 2 ori mai mult decît iepurele, un cerb (c) care trăieşte cu 10 ani mai mult decît vulpea şi ursul (u) care trăieşte cît cerbul şi vulpea împreună; toate pot trăi un număr de x ani, mai mare decît 110 şi mai mic decît 120. Să se determine elementele mulţimii A.

R. $A=\{7; 10\ 20; 30; 50\}$.

40. Se dau mulţimile ca în schema din fig.I.16. Să se pună în evidenţă relaţiile de: $\cup$; $\cap$; $\subset$ ale mulţimilor A, B, C, D.

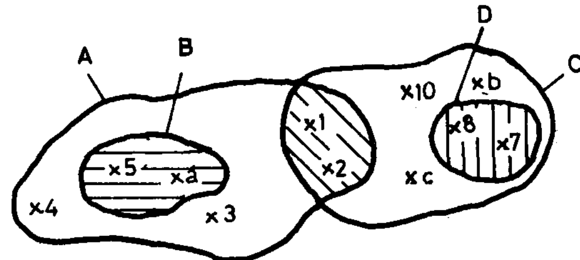


Fig.I.16

41. La un concurs de ciclism s-au prezentat la stadion o mulţime de ciclişti în trei etape. Prima oară au sosit cu 5 ciclişti mai mulţi decît a treia parte din numărul de ciclişti ce au venit a doua oară. A treia oară au sosit cu 15

cicliști mai puțini decît cei prezenți prima oară. La ora programată toți cicliștii au pornit în cursă fiecare cu bicicleta lui. La locul startului s–au înapoiat numai 30 de cicliști căci 15 au abandonat cursa pe traseu. Notăm mulțimea totală a cicliștilor cu C, a cicliștilor sosiți la stadion întîia oară cu C_1, a doua oară cu C_2, și a treia oară cu C_3. De asemenea B; B_1; B_2; B_3 mulțimile bicicletelor respective.

a) Determinați mulțimile C; C_1; C_2; C_3.

b) Stabiliți relațiile de corespondență biunivocă între aceste mulțimi.

42. Se dă mulțimea: $A=\{x \in N \mid 60 < x < 84\}$. Să se determine submulțimea $B=\{x \mid x$ să fie divizibil prin $7\}$.

R. $B=\{63; 70; 77\}$.

43. Să se determine mulțimea $A=\{x \in N \mid 10 < x < 20\}$ ale cărei elemente adunate la 8 356 să dea un număr divizibil cu 2 și 5. Justificați răspunsul.

R. $A=\{14\}$.

44. Să se determine mulțimea $B=\{x \in N \mid 20 < x < 30\}$ ale cărei elemente scăzute din numărul 85 912 să dea un număr divizibil cu 2 și 5. Justificați răspunsul.

R. $B=\{22\}$.

45. Se dă mulțimea $A=\{x \in N \mid 340 < x < 380\}$. a) Ce număr din A este divizibil cu 2, 5 și 6 ? b) Acest număr reprezintă în metri perimetrul unui teren sportiv, pe care un biciclist l–a parcurs de mai multe ori consecutiv, pînă a parcurs 10km. La terminarea cursei, s–a oprit biciclistul la puctul de plecare sau nu?

R. 360; Nu.

46. Un vînător a afirmat că mulțimea picioarelor de iepuri vînați de el într–un sezon este numărul ale cărui cifre sînt elementele unei mulțimi A obținută prin reuniunea mulțimilor: $B=\{1; 2; 3;\}$ și $C=\{1;2;5;3\}$. Care este ordinea elementelor mulțimii $B \cup C$ (elementele în ordinea scrisă fiind considerate numere $\in N$) în situația că vînătorul a mințit și în situația că ar fi spus adevărul?

47. Se dau mulțimile: $A=\{1; 2; 3; 4\}$; $B=\{3; 4; 5; 6\}$. a) Să se determine $A \cup B$. b) Să se reprezinte schema prin desen a celor două mulțimi. c) Să se determine $A \cap B$.

R. a) $\{1;2;3;4;5;6;\}$, c) $\{3;4\}$.

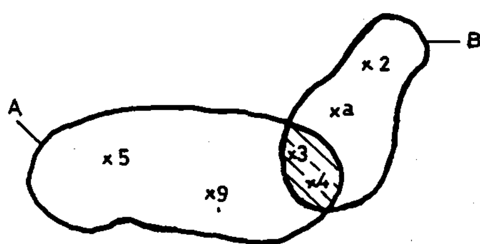


Fig.I.17

48. Fie mulțimile A *și* B reprezentate ca în figura I.17.

a) Să se scrie elementele care aparțin mulțimii A și mulțimii B.

b) Să se scrie mulțimea $A \cup B$.

49. Se dau mulțimile: $A=\{\square;$ o; Δ; $10\}$, $B=\{x \in N \mid 9 < x < 16\}$, $C=\{x \in N \mid x<20$; x se împarte exact la $5\}$.

a) Scrieți cîte 2 elemente care aparțin fiecăreia din mulțimile date și cîte unul care nu aparține.

b) Să se determine: $B \cup C$; $A \cup C$; $(A \cup B) \cup C$; $A \cap B$; $B \cap C$.

c) Să se reprezinte printr–un desen $B \cup C$ *şi* $B \cap C$.

50. Se dă mulţimea $M=\{x \mid x$ este literă a cuvîntului mama$\}$.
a) Să se scrie şi să se reprezinte prin desen elementele mulţimii.
b) Se dau mulţimile: $A=\{1; 2; 3\}$; $B=\{4; 5; 6\}$. Să se scrie $A \cup B$ şi $A \cap B$.
c) Să se dea un exemplu de mulţime cu un singur element.

51. Se dau mulţimile *A, B, C* ca în desenele de mai jos (fig.I.18).
Să se determine: $A \cup B$; $A \cup C$; $B \cup C$; $A \cap B$; $B \cap C$; $A \cap C$.



Fig.I.18

52. Să se scrie mulţimile enumerînd elementele;
$A=\{x \in N \mid 50 < x < 65\}$,
$B=\{x \in N \mid x < 12$ şi se împarte exact la 2$\}$.

53. Se dau mulţimile: $A=\{2{,}03$ dm; $0{,}256$ dam; 524 cm$\}$, $B=\{524$ cm; $0{,}21$ hm; ;$2{,}03$ dm$\}$. Să se calculeze suma, exprimată în metri a elementelor din $A \cup B$ *şi* $A \cap B$.

54. Suma a patru numere este de 520. Al doilea număr este de două ori mai mare faţă de primul plus 40. Al treilea număr este jumătate din al doilea număr, iar al patrulea număr este jumătate din al treilea. Să se exprime sub formă de mulţime cele patru numere.

R. {100; 240; 120; 60}.

55. In trei saci sînt 525 de nuci. In primul sac sînt de două ori şi jumătate mai puţine nuci ca în al doilea sac, iar în sacul al treilea sînt jumătate din nucile din primul sac împreună cu al doilea. Cîte nuci sînt în fiecare sac ?

R. {100; 250; 175}.

56. Se dau mulţimile:
$A=\{x \mid x$ literă a cuvîntului "anina"$\}$.
$A_1=\{x \mid x$ literă a cuvîntului "aninare"$\}$.
$A_2=\{x \mid x$ literă a cuvîntului "registru"$\}$.
Să se scrie mulţimile A; A_1; A_2.

R. $A=\{a; n; i;\}$ $A_1=\{a; n; i; r; e\}$
$A_2=\{r; e; g; i; s; t; u\}$.

57. Se dau mulţimile: $A=\{a; 2; 3; 4\}$ $B=\{b; 5\}$.
Să se arate că $A \cup B=B \cup A$ (comutativitate).



Fig.L19

58. Fie mulţimile reprezentate în figura L19.
Să se arate că $(A\cup C)\cup B=(A\cup B)\cup C$.

59. Să se găsească mulţimile X cu proprietatea că $\{3;4\}\cup X=\{3;4;5\}$.

R. $X=\{5\}$; sau $\{3;5\}$ sau $\{4;5\}$ sau $\{3;4;5\}$.

60. Se dă mulţimea $A=\{1\,354_6; 344_5\}$; $B=\{1\,754_8; 325_6\}$.
Să se scrie în baza 10, $A\cup B$.

R. $A\cup B=\{358; 99; 1\,004; 125\}$.

61. Se dau mulţimile: $A=\{1\,821_{10}; 687_{10}\}$, $B=\{786_{10}; 1\,859_{10}\}$.
Să se scrie $A\cup B$ astfel: $1\,821_{10}$ să se treacă în baza 7; 687_{10} să se treacă în baza 8; 786_{10} să se treacă în baza 5 şi $1\,859_{10}$ să se treacă în baza 6.

R. $\{5\,211_7; 1\,257_8; 11\,121_5; 12\,335_6\}$.

62. Se dau mulţimile:
$A=\{x \in N \mid x$ se împarte exact la 6 şi $x<40\}$
$B=\{x \in N \mid x$ se împarte exact la 8 şi $10<x<60\}$
$C=\{x \in N \mid x$ se împarte exact la 10 şi $11<x<15\}$.
Să se calculeze: $A\cup B$; $(A\cup B)\cup C$; $B\cup C$; $A\cup(B\cup C)$.

63. Se dau mulţimile: $A=\{a; b; c\}$, $B=\{a; 3; d\}$. Să se determine $A\cap B$; să se facă schema.

64. Se dau mulţimile $A=\{x \in N \mid x<6\}$; $B=\{x \in N \mid 7<x<11\}$. Se cere $A\cap B$.

65. Să se determine x astfel ca: $\{3; 2\}=\{1; 2; 3\}\cap\{3; x\}$.

66. Să se determine mulţimea $A=\{x \in N \mid x<9\}$ în aşa fel încît $\{x; 1; 2; 3\}\cap\{4; 2; 3\}=\{2; 3\}$.

R. $\{5; 6; 7; 8\}$.

67. Suma a două numere este 410; cîtul împărţirii numărului mai mare la cel mic este 7, iar restul 10. Să se exprime, sub formă de mulţime, aceste numere.

R. $\{50; 360\}$.

68. Să se determine mulţimea M, ştiind că

$$\begin{cases} M\cup\{1; 2; 3\}=\{1; 2; 3; 4\} \\ M\cap\{1; 2; 3\}=\{1; 2\} \end{cases}$$

R. $M=\{1; 2; 4\}$.

69. Să se găsească mulţimea X ştiind că $X\subset\{1; 2; 3\}$ şi $\{1; 2; 3\}\cap X=\{1; 2\}$.

R. $X=\{1; 2\}$.

70. Se dau mulţimile: $A\cap B=\{2; 3\}$, $A\cap C=\{4; 5\}$. Să se calculeze mulţimea $A\cap(B\cup C)$.

R. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{2; 3\}\cup\{4; 5\}=\{2; 3; 4; 5\}$.

71. Se dă mulţimea $A\cup(B\cap C)=\{2; 3; 4\}$; să se calculeze mulţimea $(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

R. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)=\{2; 3; 4\}$.

72. Fie mulţimile $A\cup B=\{a; m; n\}$; $A\cup C=\{m; b; c\}$.
Să se determine mulţimea $A\cup(B\cap C)$.

R. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)=\{a; m; n\}\cap\{m; b; c\}=\{m\}$.

73. Se dau mulţimile $A=\{1; 2; 3; 4\}$; $B=\{2; 3; 5\}$.
Să se determine: $A-B$ şi $B-A$.

R. $A-B=\{1; 4\}$, $B-A=\{5\}$.

74. Fie mulţimile $A=\{a; 3; 2; b\}$, $B=\{3; 2; 4; b\}$.
Să se scrie: $C=\{x \mid x \in A$ şi $x \notin B\}$; $A-B$ şi $B-A$.

R. $C=\{a\}$; $A-B=\{a\}$; $B-A=\{4\}$.

75. Se dau mulţimile $A=\{2; 3; 4; 5\}$, $B=\{1; 2; 3; 4; 5\}$.
Să se afle: a) $\{x \mid x \in A$ şi $x \notin B\}$; b) $\{x \mid x \notin A$ şi $x \in B\}$.

R. a) $\emptyset$; b) $\{1\}$.

I.3. CELE PATRU OPERAŢII CU NUMERE NATURALE ŞI ZECIMALE

1. Unul dintre tunelurile dintre Franţa şi Italia are 13 636 m, cel dintre Bologna şi Florenţa are cu 4 872 m mai mult, iar cel dintre Elveţia şi Italia cu 1 315 m, mai mult decît al doilea. Cîţi metri are acest ultim tunel ?

R. 19 823 m.

2. O întreprindere agricolă de stat a primit îngrăşăminte chimice în trei rînduri: prima dată 30 800 kg, a doua oară cu 6 060 kg mai mult, iar a treia oară cu 125 kg mai mult decît în primele două transporturi. Cîte kilograme de îngrăşăminte s–au primit a treia oară ?

R. 67 725 kg.

3. Suprafaţa pustiurilor Australiei este de 400 000 km^2, a Asiei cu 1 000 000 km^2 mai mare decît a Australiei şi a Americii la un loc, iar a Africii cu 1 400 000 km^2 mai mare decît a Americii şi Asiei la un loc. Cîţi kilometri pătraţi are suprafaţa totală a pustiurilor de pe suprafaţa pămîntului ?

R. 11 000 000 km^2.

4. Suprafaţa bazinului fluviului Nipru este de 503 000 km^2, a Dunării cu 314 000 km^2 mai mare, iar a Volgăi cu 563 000 km^2 mai mare decît a Dunării. Care este suprafaţa bazinului fluviului Volga ?

R. 1 380 000 km^2

5. Marele nostru poet Mihai Eminescu s–a născut la 15 ianuarie 1850 şi a trăit 39 de ani şi 5 luni. Cînd a murit Mihai Eminescu ?

R. 15 iulie 1889.

6. Poetul italian Dante s–a născut în luna mai 1265 şi a trăit 56 de ani şi 5 luni. Cînd a murit Dante ?

R. octombrie 1321.

7. Veveriţa poate trăi 7 ani, iepurele cu 3 ani mai mult decît veveriţa, vulpea încă o dată cît iepurele, cerbul cu 10 ani mai mult decît vulpea, iar ursul cît vulpea şi cerbul la un loc. Cît poate trăi un urs ?

R. 50 ani.

8. Un grup de excursionişti au mers într–o zi 12 km şi 22 m, a doua zi 15 km, 3 hm şi 15 m, iar a treia zi 20 km, 4 dam şi 10 m. Care este lungimea drumului parcurs în toate cele trei zile?

R. 47 km, 3 hm, 8 dam.

9. Un mobil a parcurs pe un cerc următoarele arce: mai întîi $36^o12'36''$, apoi $125^o10'45''$ şi în cele din urmă $198^o36'39''$. Ce drum a parcurs în total acest mobil ?

R. 360^o.

10. Un scafandru a stat sub apă la prima cursă 3 h,15 m,25 s, la a doua cursă 49 m,30s şi la a treia cursă 2 h,48 m,46 s. Cît timp a stat în apă scafandrul în cele trei curse?

R. 6 h,53 m şi 41 s.

11. Lungimea Argeşului este de 275 km, Siretul este cu 195 km mai lung iar Oltul are cu 55 hm mai mult decît Siretul. Să se afle lungimea Oltului.

R. 525 km.

12. In anul 1508 meşterul Macarie a tipărit la Tîrgovişte prima carte românească . Cîţi ani au trecut de la apariţia primei cărţi româneşti pînă în anul 1976 ?

R. 468 ani.

13. Distanţa de la Bucureşti la Cîmpina este de 92 km, iar de la Bucureşti la Ploieşti sînt cu 33 km mai puţin. Cîţi kilometri sînt de la Ploieşti la Bucureşti ?

R. 59 km.

14. Vîrful Negoiu are 2 535 m, Ceahlăul cu 624 m mai puţin şi Rarăul cu 258 m mai puţin decît Ceahlăul? Care este înălţimea Rarăului ?

R. 1 653 m.

15. Distanţa de la Soare la Pămînt este de 150 000 000 km, iar distanţa de la Pămînt la Lună este de 380 000 km. Cu cîţi kilometri este mai mică distanţa de la Pămînt la Lună decît cea de la Pămînt la Soare ?

R. 149 620 000 km.

16. Cum s–a reuşit să se măsoare 4 ℓ de vin cu ajutorul a trei vase, unul de 3 ℓ, altul de 5 ℓ şi un vas mai mare ?

R. Se umple vasul cu 5 ℓ. Din el se trec 3 ℓ în vasul de 3 ℓ şi din acesta în vasul cel mare. După această operaţiune, vasul cel mic este gol, cel de 5 ℓ mai are 2 ℓ şi vasul cel mare are 3 ℓ. Apoi din vasul de 5 ℓ se trec cei 2 ℓ în vasul de 3 ℓ ; se umple din nou vasul de 5 ℓ, din aceştia 1 ℓ se trece în vasul de 3 ℓ ca să se umple şi, rămîn 4 ℓ, în vasul de 5 ℓ.

17. Aria suprafeţei bazinului fluviului Congo este de 3 822 000 km^2, a Nilului cu 922 000 km^2 mai mică, iar a fluviului Niger cu 808 000 km^2 mai mică decît a Nilului. Care este aria suprafeţei bazinului Niger ?

R. 2 092 000 km^2.

18. Să se găsească un număr de două cifre a căror sumă este egală cu 13. Dacă se permută cifrele, numărul se micşorează cu 45.

R. 94.

19. Inălţimea muntelui vulcanic Kliucev este de 4 850 m, Erebus are cu 827 m mai puţin, iar Etna are cu 760 m mai puţin decît Erebus. Cîţi metri are muntele vulcanic Etna ?

R. 3 263 m.

20. La 10 martie 1837 s–a născut marele povestitor Ion Creangă şi a murit la 31 martie 1889. Cîţi ani, luni şi zile a trăit Ion Creangă ?

21. La 2 aprilie 1805 s–a născut marele povestitor danez Anderssen. Cît timp a trecut de la naşterea lui Anderssen pînă azi?

22. Suma celor două laturi mai lungi ale unei grădini în formă de dreptunghi este de 382 m. Lăţimea este cu 86 m mai mică decît lungimea. Să se afle lăţimea acestei grădini ?

23. La 15 noiembrie 1976 s–au împlinit 98 de ani de la naşterea marelui nostru biolog Emil Racoviţă, iar după 4 zile s–au împlinit 28 ani de la moartea lui. Să se afle anul naşterii şi al morţii lui Racoviţă. Cîţi ani a trăit Racoviţă ?

R. 1878; 1948; 70 ani.

24. Vrabia se poate ridica în zbor pînă la înălţimea de 5 000 m, vulturul atinge o înălţime cu 2 000 m mai mică decît a vrabiei, iar cioara cu 200 m mai puţin decît vulturul. Pînă la ce înălţime poate zbura cioara ?

R. 2 800 m.

25. După ultimele cercetări, în subsolul pustiului Sahara se găsesc: 1 000 000 000 t de cărbuni, cu 500 000 000 t mai puţin cupru decît cărbune, cu 100 000 000 t mai puţin petrol decît cupru şi cu 150 milioane tone mai puţin fier decît petrol. Cîte tone de cupru, fier şi petrol se găsesc în subsolul Saharei ?

R. 500 000 000 t; 400 000 000 t; 250 000 000 t.

26. Un tată a avut 28 ani la naşterea fiului său.

a) Cîţi ani va avea fiul cînd tatăl va avea 50 ani ?

b) Cîţi ani va avea tatăl cînd fiul va avea 48 ani ?

R. a) 22 ani; b) 76 ani.

27. Eugenia, Dinu şi Sandu au strîns nuci. Cîte nuci a strîns fiecare dintre ei dacă adunînd nucile Eugeniei şi ale lui Dinu, obţinem 30, pe ale lui Dinu cu ale lui Sandu 38, iar ale Eugeniei cu ale lui Sandu 32 ?

R. 12; 18; 20 nuci.

28. Viorel îi zice Mariei: dă–mi 6 alune de la tine, ca să am şi eu cîte ai tu. Maria răspunde: dă–mi tu 6 alune, ca să am de două ori cîte ai tu. Cîte alune are fiecare din cei doi copii ?

R. 12 alune; 18 alune.

29. 50 sticle de vin alb şi 156 sticle de vin roşu costă 4 608 lei. O sticlă de vin alb costă cît două sticle de vin rosu. Cît costă o sticlă de vin alb si cît costă o sticlă de vin roşu?

R. 18; 36.

30. Roata unei trăsuri are lungimea cercului egală cu 240 m şi face pe un drum 26 800 învîrtituri. Care este lungimea drumului parcurs ?

R. 64 320 m.

31. a) Suma a două numere este 319, cîtul lor 23, restul împărțirii 7. Să se găsească cele două numere. b) Să se găsească două numere a căror sumă este egală cu 6 612 și cîtul împărțirii 75.

R. a) 306; 13; b) 87; 6 525.

32. Leul poate mînca o oaie în 2 ore, lupul în 3 ore, cînele în 6 ore. In cît timp ar mînca o oaie împreună ?

R: In 6 ore 6 oi sau o oaie într–o oră.

33. Restul unei împărțiri este 97, cîtul 665. Impărțitorul întrece cu 91 suma dintre rest și cît. Să se găsească deîmpărțitul.

R. 567 342; 853.

34. Trei muncitori au primit pentru o lucrare 3 310 lei. Primul muncitor a lucrat 10 zile, cîte 11 ore pe zi, al doilea 12 zile cîte 10 ore pe zi și al treilea 10 zile cîte 9 ore pe zi. Primul muncitor fiind mai calificat, primește cu 10% mai mult pe oră decît fiecare dintre ceilalți doi. Cît a încasat fiecare muncitor ?

R. 1 210; 1 200; 900 lei.

35. Elefantul poate trăi 200 ani ursul a patra parte din cît poate trăi elefantul, iepurele a cincea parte din cît poate trăi ursul, iar vulpea de două ori mai mult decît iepurele. Cît poate trăi vulpea ?

R. 20 ani.

36. De pe un teren în formă de dreptunghi, cu dimensiunile 160 m și 75 cm s–au strîns 21 t de nutreț verde. Cîte chintale de nutreț verde s–au produs la un hectar ?

R. 175 q.

37. Un dreptunghi are dimensiunile de 18 m și 8 m. Un alt dreptunghi, care are aria egală cu primul, are lungimea de 4 ori mai mare decît lățimea. Care sînt dimensiunile celui de–al doilea dreptunghi ?

R. 6 m; 24 m.

38. O vie de formă dreptunghiulară, cu dimensiunile de 1 000 m și 300 m, se stropește cu sulfat de cupru pentru a stîrpi dăunătorii. Ce cantitate de sulfat de cupru este necesară, dacă la 1 ha se folosesc 175 kg ?

R. 5 250 kg.

39. Un teren în formă de dreptunghi are lungimea de 200 m, iar lățimea cu 104 m mai mică decît lungimea. 5 țărani prășesc acest teren în 3 zile. Să se afle cîți țarani vor prăși în 5 zile un teren de 3 ori mai mare ?

R. 9 țărani.

40. Intr–o familie compusă din părinți și 4 copii, părinții consumă zilnic cîte 300 g de pîine și copii cîte 350 g de pîine. Ce rezervă de grîu trebuie să–ș,i facă această familie pentru 325 de zile, dacă din 100 kg de grîu ies 130 kg de pîine?

R. 500 kg.

41. Un teren mlăștinos avea forma de dreptunghi cu lungimea de 650 m și lățimea cu 250 m mai mică decît lungimea. Cîți hectolitri de apă de var s–au folosit pentru îmbunătățirea lui, dacă pentru un hectar s–au consumat 55 hl ?

R. 1 430 hl.

42. La curățirea Dunării în fața portului Giurgiu au lucrat draga nr. 1 timp de 20 ore și draga nr. 2 cu 4 ore mai puțin scoțînd amîndouă 21 816 m^3 de pămînt. Cîți metri cubi de pămînt a scos fiecare dragă, dacă au scos aceeași cantitate pe oră ?

R. 12 12λ m^3; 9 696 m^3.

43. Un elev care a participat la o tragere la ţintă a încercat 63 de lovituri. Pentru fiecare lovitură care atinge ţinta a cîştigat 4 puncte şi pentru fiecare lovitură nereuşită a pierdut 5 puncte. In total, el a obţinut 144 puncte. De cîte ori a nimerit ţinta?

R. 53 lovituri.

44. Trei elevi au participat la o întrecere sportivă şi au tras la ţintă de cîte 36 ori fiecare. Pentru fiecare atingere a ţintei s–au obţinut 5 puncte şi pentru fiecare lovitură nereuşită s–au pierdut 4 puncte. Rezultatul final a fost următorul: primul elev 108 puncte cîştigate; al doilea elev 0 puncte cîştigate; al treilea elev 0 puncte pierdute. Cîte lovituri reuşite a avut fiecare elev ?

R. 28; 16; 15 lovituri.

45. Un biciclist şi–a propus să parcurgă 304 km cu viteza de 8 km la oră. După ce a mers o parte din drum s–a oprit 5 ore să se odihnească şi, pornind din nou cu viteza dublată, a reuşit să ajungă la destinaţie în acelaşi timp pe care şi l–a propus la început. La ce distanţă de punctul de sosire s–a oprit să se odihnească ?

R. 80 km.

46. O livadă dreptunghiulară este îngrădită cu un gard lung de 210 m; lăţimea livezii este de două ori mai mică decît lungimea. Această livadă trebuie împărţită în două părţi astfel încît una să fie cu 450 m.p. mai mare decît cealaltă. Care va fi aria fiecărei parcele ?

R. 1 450 m.p.; 1 000 m.p.

47. O livadă dreptunghiulară este împrejmuită cu un gard de 214 m. Lăţimea este cu 7 m mai mare decît a treia parte din lungime. Această livadă se împarte în trei părţi: două egale şi una mai mare decît celelalte două la un loc cu 600 m.p. Care este aria fiecărei parcele ?

R. 450 m.p.; 450 m.p.; 1 500 m.p.

48. Un vas este plin cu apă, dacă se scoate a patra parte din apă, el cîntăreşte 2 050g iar dacă se scoate o jumătate din cantitatea de apă, vasul cu apă cîntăreşte 1 450 g. Care este masa apei şi a vasului ?

R. 2 400 g.; 250 g.

49. Ţăranii iobagi din Transilvania, nemaiputînd îndura greutatea birurilor şi a suferinţelor, au căutat să-şi facă singuri dreptate prin două răscoale: dacă adunăm anii în care au avut loc cele două răscoale, obţinem 2 951. A doua răscoală a avut loc peste 77 de ani de la prima. Aflaţi în ce ani au avut loc cele două răscoale ?

R. 1437; 1514.

50. Un acoperiş format din două dreptunghiuri cu dimensiunile de 8 m şi 4 m trebuie acoperit cu ţiglă. Pe un metru pătrat sînt necesare 15 ţigle. O ţiglă cîntăreşte 2 hg. Ţiglele sînt transportate de la fabrică cu o căruţă care goală cîntăreşte 310 kg, iar plină cîntăreşte 790 kg. Cîte drumuri va face căruţa ?

R. 4 drumuri.

51. In două bidoane se află lapte: în primul de două ori mai mult decît în al doilea. Cînd din primul s–au scos 30 ℓ iar din al doilea 20 ℓ, în primul a rămas lapte de 3 ori mai mult decît în al doilea. Cît lapte era în fiecare bidon la început ?

R. 60 ℓ; 30 ℓ.

52. La fabrica de zahăr din Giurgiu au adus sfeclă de zahăr trei asociatii de ţărani: prima a adus 860 chintale, a doua de două ori mai mult şi a treia jumătate din ceea ce au adus primele două. Cîte tone de sfeclă s–au adus în total ?

R. 387 tone.

53. Pentru 26 m de şifon şi 19 m de stambă s–au platit 2 130 lei. Altă dată, preţurile fiind aceleaşi s–au plătit tot 2 130 de lei pentru 20 m şifon şi 29 m de stambă. Cît costă 1 m de şifon şi cît costă 1 m de stambă ?

R. 60 lei; 30 lei.

54. Suma vîrstelor lui Leonardo da Vinci, Galilei şi Newton este de 229 ani. Dacă Leonardo da Vinci ar mai fi trăit 14 ani, vîrsta sa ar fi fost jumătate din suma vîrstelor lui Galilei şi Newton, dar el a murit la un an dupa ce a atins de 11 ori diferenţa dintre vîrstele lui Newton şi Galilei. Cît a trăit fiecare dintre ei ?

R. 67 ani; 78 ani; 84 ani.

55. O platformă de beton armat are 36 m.c. La fiecare m.c. de beton armat, s–au folosit 6 saci de cîte 50 kg de ciment şi 110 kg de oţel. Cît costă materialul platformei, dacă 1 kg de ciment costă 1 leu, iar 1 kg de fier 18 lei ?

R. 82 080 lei.

56. a) Diferenţa a două numere este 100. Impărţind numărul mai mare la cel mai mic obţinem cîtul 6 şi restul 5. Care sînt cele două numere ? b) Diferenţa dintre două numere este 202. Impărţind pe cel mai mare la cel mai mic obţinem cîtul 12 şi restul 15. Care sînt cele două numere ? c) Să se găsească 2 numere, ştiind că diferenţa lor este 3 şi dacă mărim fiecare număr cu 5 produsul se măreşte cu 270.

R. a) 19; 119; b) 17; 32; c) 23; 26.

57. Un vapor de 23 000 t pleacă la vînătoare de balene. Echipamentul şi materialele necesare ocupa 4 800 m.c., iar echipajul a şasea parte din echipament şi materiale. Ce volum poate ocupa vînatul, dacă 1 t are capacitatea de 283 m.c. ?

R. 909 m.c.

58. Pe un cîmp pătrat cu latura de 360 m s–a pus îngrăşamînt natural. Aceeaşi cantitate de îngrăşămînt s–a folosit pentru un loc dreptunghiular cu lungimea de 540 m. Care e lăţimea locului, dacă s–a pus aceeaşi cantitate de îngrăşămînt la hectar ?

R. 240 m.

59. Patru muncitori au primit pentru lucrarea efectuată suma de 1 945 lei. Ce sumă se cuvine fiecăruia, dacă primul a lucrat 10 zile, al doilea 8 zile, al treilea 15 zile, al patrulea 12 zile şi dacă pe zi trebuie să primească al doilea cu 5 lei mai mult ca primul, al treilea cu 7 lei mai puţin ca al doilea iar al patrulea cu 5 lei mai puţin decît al doilea ?

R. 430 lei; 384 lei; 615 lei; 516 lei.

60. Pentru a cosi un teren dreptunghiular lung de 250 m şi lat de 1,2 hm, 5 muncitori au lucrat 3 zile cîte 10 ore pe zi. In cîte zile va cosi această echipă un teren în formă de pătrat a cărui latură este egală cu 0,8 din lungimea terenului dreptunghiular şi ţinînd cont că, de data aceasta, muncitorii lucrează numai 8 ore pe zi ?

R. 5 zile.

61. Platforma unui autocamion are formă de dreptunghi cu dimensiunile de 2,10 m şi

3,25 m. In camion se aşază piese cubice cu latura de 65 cm pînă la înălţimea de 2,6 m. a) Cîte piese sînt în acest camion ? b) Ce masă are încărcătura, dacă fiecare piesă cîntăreşte 75 kg ?

R. a) 60 piese; b) 4,5 tone.

62. Două roţi sînt legate printr–o curea de transmisie. Circumferinţa unei roţi este de 0,98 m, iar a celeilalte de 1,75m. Să se determine cîte învîrtituri pe minut va face a doua roată, dacă prima face 75 învîrtituri pe minut ?

R. 42 învîrtituri.

63. Două roţi sînt legate printr–o curea de transmisie. Circumferinţa unei roţi este de 0,65 m. Să se determine lungimea circumferinţei roţii a doua, dacă prima face 154 de învîrtituri, iar a doua 110 învîrtituri pe minut ?

R. 31 m.

64. Pentru a încălzi o cameră cu dimensiunile de 6,5 m, 5,20 m şi 3,18 m, s–au consumat într–o iarnă 4,25 steri de lemne. Cîţi steri de lemne sînt necesari pentru a încălzi 2 camere cu dimensiunile de 7,20 m , 6,75 m şi 3,18 m. ?

R. 4,25 steri.

65. O roată face, pe o distanţă, 50 învîrtituri, iar altă roată 40 învîrtituri. Să se afle această distanţă, ştiind că lungimea circumferinţei uneia din roţi este cu 4,4 dm mai mare decît a celeilalte ?

R. 880 dm.

I.4. DIVIZIBILITATEA NUMERELOR

Cel mai mare divizor comun şi cel mai mic multiplu comun a mai multor numere

66. a) Să se afle mulţimea divizorilor comuni ai numerelor: 210 şi 240; 120 şi 135; 54, 90 şi 126. b) Numerele 3 625; 4 523; 7 440 împărţite la acelaşi număr dau resturile 25, 23 şi 240. Să se afle numărul la care au fost împărţite.

R. 900; 60; 72.

67. Vrem să construim o ladă în formă de cub în care să putem aşeza cutii cu dimensiunile de 36 cm, 24 cm şi 18 cm. Cît de mare trebuie să fie latura cubului pentru a aşeza un număr întreg de cutii ?

R. 72 cm.

68. Un biciclist a parcurs un drum în trei zile: în prima zi 72 km; în a doua zi 108 km şi în a treia zi 120 km. Cîte ore a mers în total, dacă ar fi avut aceeaşi viteză egală cu cea maximă în toate cele trei zile ?

R. 2,5 ore.

69. In fiecare dimineaţă de vară, la ora 5, din oraşul Constanţa pleacă pe litoral patru autobuze ale căror curse dus şi întors împreună cu opririle durează: pentru primul, trei sferturi de oră; pentru al doilea, o jumătate de oră; pentru al treilea, 36 de minute şi, pentru al patrulea, o oră. La ce oră pleacă din nou toate o dată din Constanţa? Cîte curse a făcut fiecare autobuz pînă, la această oră?

R. 8; 4; 6; 5; 3.

70. Dacă dintr–un număr de 3 cifre scădem 7, rezultatul este divizibil cu 7; dacă scădem din acelaşi număr 8, rezultatul este divizibil cu 8 şi dacă scădem 9 rezultatul este divizibil cu 9. Care este numărul ?

R. 504.

71. Intrebată cîte mere are într–un coş, o femeie a răspuns: nu ştiu cîte am, dar pot să vă spun că dacă le număr cîte 2, cîte 3, cîte 4, cîte 5, cîte 6, îmi rămîne cîte un măr în coş, dar dacă le număr cîte 7 nu–mi rămîne nici un măr. Cîte mere avea în coş ?

Verificaţi prin exemple numerice proprietăţile din problemele 72 – 76.

72. Două numere impare consecutive sînt totdeauna prime între ele.

73. Dacă două numere sînt prime între ele, atunci suma şi diferenţa lor sînt prime cu produsul lor.

74. Produsul a trei numere consecutive este totdeauna divizibil cu 6. Explicaţie.

75. Produsul a patru numere consecutive este totdeauna divizibil cu 24.

76. Orice număr par mai mare decît 2 poate fi scris sub formă de sumă a două numere prime.

77. a) Să se afle numerele naturale x, y astfel ca $\overline{3x5y}$ să fie divizibil cu 5 şi 9.

b) $\overline{7x3y}$ să fie divizibil cu 3 şi 5.

c) $\overline{3x7y5}$ să fie divizibil cu 3 şi 25.

78. Impărţind numerele $a = 427$ şi $b = 519$ prin acelaşi număr d se obţin resturile 7şi 3. Să se determine numărul d.

R. 3.

I.5. OPERAŢII CU FRACŢII ORDINARE ŞI ZECIMALE

Rezolvarea unui exerciţiu de aritmetică se poate face în ansamblu sau pe părţi.

Forma de rezolvare în ansamblu este mai elegantă: ea însă cere din partea rezolvitorului o bună tehnică de calcul, multă atenţie şi o privire de ansamblu perfect formată asupra întregului exerciţiu în timpul rezolvării lui.

Să se calculeze expresia:

1. $$E=1\frac{9}{20}-\frac{\left(0,645:0,3-1\frac{107}{180}\right)\cdot\left(4:6,25-1:5+\frac{1}{7}\cdot1\frac{24}{25}\right)}{1-2\frac{1}{5}:7}.$$

R. $$1\frac{9}{20}-\frac{\left(2\frac{3}{20}-1\frac{107}{180}\right)\cdot\left(\frac{4}{1}\cdot\frac{4}{25}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\cdot1\frac{24}{25}\right)}{1-\frac{11}{5}\cdot\frac{1}{7}}=1\frac{9}{20}-\frac{\left(1\frac{207}{180}-1\frac{107}{180}\right)\cdot\left(\frac{16}{25}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{49}{25}\right)}{1-\frac{11}{35}},\ E=1\frac{9}{20}-\frac{\frac{5}{9}\cdot\frac{18}{25}}{\frac{24}{35}}=\frac{13}{15}$$

Să se efectueze operațiile :

2. $\left[\left(3\frac{2}{3}+1\frac{7}{10}\right):8\frac{1}{20}-\left(2\frac{7}{23}-1\frac{45}{46}\right)\cdot\frac{23}{45}\right]+\frac{1}{2}+1$. **R. 2.**

3. $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^3\right]\cdot\frac{9}{2\,437}:\frac{1}{24^2}$. **R. 1.**

4. $\left[\left(1\frac{1}{5}\right)^2-\left(\frac{7}{10}\right)^2+\left(1\frac{1}{5}-\frac{7}{10}\right)^2\right]\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{2^3\cdot5^2\cdot3^3}{5\cdot2^3\cdot3^2}$. **R. 15.**

5. $\left(2\frac{1}{2}\right)^3-\left(1\frac{1}{4}\right)^3+\left(2\frac{1}{2}-1\frac{1}{4}\right)^3-0{,}625$. **R. 15.**

6. $3\frac{1}{2}+\left\{\frac{1}{3}-\left[7\frac{16}{142}-\left(12\frac{80}{213}-5\frac{135}{426}\right)\right]\right\}\cdot12\frac{9}{17}$. **R. 7.**

7. $\left\{\left[\left(2\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{4}{7}\right]:\left[\left(40-38\frac{4}{5}\right):\frac{1}{5}\right]\right\}\cdot\left[\left(2\frac{1}{2}:1\frac{1}{4}\right):\left(1\frac{1}{2}:6\frac{1}{4}\right)\right]-\frac{7}{18}$ **R. 1.**

8. $70\frac{3}{4}:\left\{30\frac{1}{2}-\left[\frac{\left(8\frac{5}{8}-6\frac{1}{4}\right):1\frac{1}{5}}{2\frac{2}{5}:\frac{4}{5}-2\frac{2}{3}}+\frac{67\frac{1}{2}:2\frac{1}{7}}{4\frac{1}{2}:2\frac{2}{3}}\right]\right\}$. **R. 12.**

9. $\frac{1}{\left(1:\frac{2}{3}-1:2\frac{3}{5}\right):2\frac{3}{13}}+\frac{(0{,}2)^3-\frac{1}{125}+(0{,}1)^2}{(0{,}3)^3+0{,}973}\cdot10^2$. **R. 3.**

10. $\frac{\left(2\frac{1}{2}-1\right):6+\left(3\frac{3}{4}-1\right):11+\left(2\frac{7}{9}-1\right):7\frac{1}{9}}{\frac{1}{2\frac{2}{3}}+\frac{1}{1\frac{1}{7}}-\frac{1}{\frac{8}{9}}}$. **R. 6.**

11. $\frac{2\frac{3}{5}-1\frac{3}{10}}{2\frac{1}{2}-3\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{4}}+\frac{1}{3\frac{3}{7}+\frac{1}{7}}+\frac{2\frac{8}{9}\cdot1\frac{5}{13}}{3\frac{51}{85}+2\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{11}+\frac{24}{85}}-2$. **R. 0.**

12. $\frac{49}{50}+\left[\left(3\frac{2}{5}-\frac{10-\frac{1}{4}}{3}\right)\cdot 1\frac{3}{5}-\frac{1\frac{1}{7}+\frac{1}{2}}{11\frac{65}{77}+\frac{2}{33}}\right]1\frac{2}{3}:15\frac{1}{2}$. **R.** 1.

13. $\frac{\left(37\frac{2}{5}-18\frac{6}{7}\right)\cdot 11\frac{2}{3}}{13\frac{4}{9}-11\frac{11}{18}}-\frac{\left(2\frac{3}{20}-\frac{11}{30}\right)\cdot\frac{6}{7}}{\left(1\frac{3}{100}-\frac{17}{20}\right):6\frac{3}{10}}:21\frac{1}{2}\cdot\frac{3^2\cdot 5^4\cdot 15}{5^6\cdot 3^3}$. **R.** 3/5.

14. $\frac{1}{15}+\frac{\left(8-3\frac{1}{4}\right):6\frac{1}{3}+9\frac{1}{4}}{\left(12\frac{2}{9}+\frac{5}{6}+7\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{27}{185}}+\frac{\left(20-31\frac{4}{15}\cdot\frac{3}{7}\right):2\frac{1}{5}}{\left(6+1:\frac{3}{10}\right)\cdot\frac{15}{28}}$. **R.** 4.

15. $\frac{4}{5}+\frac{30\cdot 4\frac{1}{4}-11\frac{1}{5}:9\frac{1}{3}}{14:2\frac{2}{9}+8\frac{2}{5}\cdot 14\frac{2}{7}}:\frac{1:6+12:5}{2\frac{1}{2}\cdot 15-4\frac{13}{15}\cdot 7\frac{3}{5}}$. **R.** 1.

16. $1\frac{1}{8}:\left(\frac{2\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\cdot 1\frac{5}{6}}{\frac{1}{5}\cdot 3\frac{1}{3}+\frac{13}{36}}-\frac{1}{2\frac{1}{2}}\right):\frac{1}{1\frac{1}{2}}$. **R.** $\frac{5}{4}$.

17. $\frac{\frac{5}{21}\cdot\frac{3}{5}+\frac{15}{28}:\frac{5}{84}}{10+5:\frac{1}{2}}+\frac{2:\frac{1}{2}+3:\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}:2+\frac{1}{3}:3}:36-1\frac{16}{35}$. **R.** 0.

18. $\frac{\left(\frac{31}{63}+5\frac{1}{84}\right)-\left(3\frac{5}{21}+2\frac{31}{252}\right)\cdot 24:1\frac{1}{2}\cdot 4\frac{3}{8}}{\left(1\frac{15}{26}+\frac{1}{39}-\frac{7}{156}\right)\cdot 1\frac{4}{9}}-\frac{4}{9}$. **R.** 4.

19. $3{,}3(3)+\frac{(2^3\cdot 3^4\cdot 5^4):(3^3\cdot 5^3\cdot 2^5)-\frac{3}{4}+2{,}(3)+\frac{22}{33}}{(489\cdot 7+311\cdot 7-777\cdot 7-23\cdot 7)+2}$. **R.** $6\frac{1}{3}$.

Să se efectueze operațiile:

20. $\left[\frac{13:3\frac{3}{4}-\left(10\frac{1}{2}:1\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{14}-\frac{29}{30}}{0{,}001:\frac{1}{20}+0{,}08}+2{,}625+\frac{3}{8}\right]:\frac{2^3:2^4}{0{,}5}$. **R.** 13.

21. $2\frac{3}{4}:\dfrac{\left(\frac{7}{15}+\frac{14}{15}+\frac{2}{9}\right)\cdot 10\frac{1}{2}-1\frac{1}{11}\left(\cdot 2\frac{2}{3}-1\frac{3}{4}\right)7}{1:\left[2\left(0,002:\frac{1}{50}\right)+\frac{1}{10}\right]}+\frac{9}{4}$. **R.** 5.

22. $\dfrac{\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{10}}{\frac{15}{16}\cdot\frac{14}{39}\cdot\frac{24}{25}\cdot\frac{13}{21}}:\left(2\frac{1}{8}\cdot 2\frac{2}{7}\cdot 2\frac{15}{17}\cdot 4\frac{2}{3}:196\right)+2,1(3)-\frac{2}{15}$. **R.** 7.

23. $1\frac{3}{5}:\dfrac{\left(1:\frac{1}{40}\right):(1:0,05):(1:0,04)+0,02}{(0,01+0,09+0,01):\frac{1}{50}}\cdot\frac{5}{8}$. **R.** 1.

24. $\dfrac{\left[5\frac{1}{84}+\frac{31}{63}-\left(2\frac{31}{252}+3\frac{5}{21}\right)\right]\left[24:\left(1\frac{1}{2}:4\frac{3}{8}\right)\right]}{\left(1\frac{15}{26}+\frac{1}{39}-\frac{7}{156}\right):\left(20\frac{1}{4}:26\right)}$. **R.** 5.

25. $\dfrac{\left(\frac{2}{15}+1\frac{7}{12}\right)\cdot\frac{30}{103}-\left(2:2\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{9}{32}}{0,014+0,086}:2,5$. **R.** 1.

26. $\dfrac{\left(\frac{7}{15}+\frac{14}{45}+\frac{2}{9}\right)\cdot 10\frac{1}{3}-\frac{12}{11}\left(2\frac{2}{3}-1\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{4}\right):\frac{3}{28}-1}$. **R.** 14.

27. $\dfrac{(1,09-0,29)\cdot 1\frac{1}{4}}{\left(18,9-16\frac{13}{20}\right)\frac{8}{9}}+\dfrac{(11,81+8,19)\cdot 0,02}{9:11,25}$. **R.** 1.

28. $\dfrac{\left(4,07:\frac{1}{20}-23,01\cdot 0,06\right):4+0,0703\cdot\frac{1}{2}}{\left(7,3745:3,01-1\frac{1}{4}\right)\cdot 1,02+0,78}$. **R.** 10.

29. $\dfrac{\left(4\frac{11}{30}+\frac{17}{60}+\frac{7}{80}+3\frac{5}{8}\right)\cdot\frac{50}{223}:\left(4\frac{3}{5}-2\frac{7}{8}\right)\cdot\frac{23}{25}}{(2^3\cdot 3^3\cdot 5^3)(5^2\cdot 3^4\cdot 2^2):(2^5\cdot 3^6\cdot 5^6)+\frac{2}{5}}$. **R.** 1.

30. $\dfrac{0,(04):0,(40)}{7+3:\left(2\frac{5}{9}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{3}{13}}-\dfrac{120-20:4+5-114-6}{2\,364^2\cdot 3\,042:\left(\frac{29}{34}\right)^3}$. **R.** $\frac{1}{90}$.

31. $\dfrac{\left(\frac{2}{9}+\frac{14}{45}+\frac{7}{15}\right)\cdot 10\frac{1}{3}-1\frac{1}{11}\left(2\frac{2}{3}-1\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{4}\right):\frac{3}{28}-1}+2,62(3)-1\frac{187}{300}$. **R.** 15.

32. $\dfrac{\left(8,25-\frac{3}{8}\right):3,5+3,125-3\cdot 0,1(6)}{(5-4,4):0,1-4-1,375:\frac{2,5}{3\frac{1}{8}}+\frac{23}{32}}$. **R.** $4\frac{7}{8}$.

Să se verifice egalităţile :

33. $\left(4\frac{1}{10}-3\frac{4}{15}\right):1\frac{1}{5}=\dfrac{4\frac{1}{10}}{1\frac{1}{5}}-\dfrac{3\frac{4}{15}}{1\frac{1}{5}}$.

34. $\dfrac{\left(2\frac{1}{2}\right)^3-\left(1\frac{1}{3}\right)^3}{2\frac{1}{2}-1\frac{1}{3}}=\left(2\frac{1}{2}\right)^2+2\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{3}+\left(1\frac{1}{3}\right)^2$.

35. $\left(3\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3=\left[\left(3\frac{1}{2}\right)^2-3\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]\left(3\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$.

Să se găsească *x* din egalităţile următoare:

36. $12\frac{1}{3}:\left\{\left[2\frac{3}{4}:\left(3\frac{1}{3}-1\frac{7}{8}x\right)\right]\cdot\frac{8}{11}+1\frac{2}{3}\right\}=5$. **R.** $x=\frac{4}{9}$.

37. $\left[10\frac{17}{40}-\left(12\frac{1}{2}-x\right)+6\frac{47}{60}\right]:22\frac{11}{36}-\frac{15}{22}$. **R.** $x=10\frac{1}{2}$.

38. $\left\{\left[4\frac{3}{5}-\dfrac{6\frac{1}{14}}{13\frac{1}{3}:\left(5\frac{1}{3}-x\right)-3\frac{4}{7}}\right]\cdot\frac{9}{14}+1\frac{1}{3}\right\}:4\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$. **R.** $x=3\frac{1}{5}$.

39. $1,1(3)x-\dfrac{(2^3\cdot 3^5\cdot 5^8):(3^4\cdot 2^4\cdot 5^9)}{\dfrac{3}{10}}=x+1$. **R.** $x=15$.

40. $\left[\dfrac{x+1}{0,75}+\dfrac{8(x+2)}{3}\right]\cdot\dfrac{3}{4}=x+7$ **R.** $x=1$.

41. $\dfrac{\sqrt{2^3\cdot 3^3}}{2\sqrt{6}}x=\dfrac{3}{5}$. **R.** $x=5$.

42. $\dfrac{\dfrac{3}{4}}{x}+\dfrac{4}{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{25}{4}$. **R.** $x=3$.

43. $\dfrac{\dfrac{x}{2}-5}{\dfrac{x+8}{2}}+\dfrac{x-8}{2}=2,1$. **R.** $x=12$.

44. $\dfrac{5:\left(3-\dfrac{1}{x}\right)}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1+\dfrac{1}{x+2}}{1-\dfrac{1}{x+2}}-\dfrac{1}{3}$. **R.** $x=2$.

45. $3-\dfrac{2}{5}-\left(\dfrac{1\frac{1}{3}}{3\frac{1}{3}-x}+\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}-\dfrac{4}{9}\right)=\dfrac{2}{5}$. **R.** $x=\dfrac{1}{3}$.

46. $\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)+2\right]-1\right\}+1=1$. **R.** $x=2$.

I.6. ECUAŢII DE GRADUL I CU O NECUNOSCUTĂ

Să se rezolve ecuaţiile:

1. $2(x+3)-3(x+4)=4(x+5)-6$. **R.** $x=-4$.

2. $(x+5)^2+(x+6)-(x-6)=(x+5)^2+x$. **R.** $x=12$.

3. $\frac{x+3}{4}+\frac{x+4}{5}+6=\frac{x+7}{2}$. **R.** $x=81$.

4. $\frac{x+1}{3}-\frac{1}{2}x+1=\frac{5x-4}{4}-\frac{1}{2}$. **R.** $x=2$.

5. $\frac{x-1}{6}-\frac{x+2}{4}+\frac{1}{3}=\frac{x+5}{8}-2$. **R.** $x=5$.

6. $\frac{x+\frac{1}{2}}{2}-\frac{2x-\frac{x+3}{4}}{5}=4$. **R.** $x=24$.

7. $\frac{2x-\frac{x-1}{5}}{3}-\frac{\frac{x+1}{3}-2x}{5}=2\frac{1}{3}$. **R.** $x=2\frac{1}{2}$.

8. $-x-0,(6)-\frac{1}{3}=2$. **R.** $x=3$.

9. $-1,1(6)x-\frac{5}{6}x=10$. **R.** $x=-5$.

10. $-0,03x-8-\frac{7x}{100}=0$. **R.** $x=-80$.

11. $-3,01-\frac{99}{100}-0,004x=0,096x$. **R.** $x=-40$.

12. $-\left[1,1(3):6\frac{4}{5}\right]x-\frac{5x}{6}=10$. **R.** $x=-10$.

13. $-(0,00002:0,0006)x-\frac{2x}{30}=3$. **R.** $x=-30$.

14. $-\frac{0,(9)x}{\frac{1}{6}}-\frac{1,2(2)}{\frac{11}{9}}x=63$. **R.** $x=-9$.

15. $-2x-\frac{0,(33)}{4}x-\frac{2}{3}x=51$. **R.** $x=-17$.

16. $\frac{4}{11}\left\{\frac{3}{2}\left[\frac{1}{3}(x-1)-5\right]\right\}-\frac{x}{11}=0$. **R. Nedeterminat.** **R.** $x=32$.

17. $\left[\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right):\frac{x+1}{2}\right]:\left[0,2(2)+\frac{7}{9}\right]=\frac{1}{2}$. **R. Nedeterminat.**

18. $\left[\frac{1}{0,1(6)}x-5x\right]\cdot\left[2,01-\frac{2}{1,(9)}\right]=\frac{1}{100}$. **R.** $x=1$.

19. $x\left[0,5(1)+\frac{4}{9}\right]^{199}=\frac{\frac{x-1}{111}}{0,(900)}$. **R.** Nedeterminat.

20. $\left[(-3)^2+(-2)^3\right]x=\frac{x-4}{5}$. **R.** $x=-1$.

I.7. INECUAŢII DE GRADUL I CU O NECUNOSCUTĂ

1. $\frac{(-2)}{-3}+\frac{(-2)(+3)}{-1}+\frac{(-3)}{-2}+1+\frac{1}{-2}+\frac{1}{-3}<\frac{2x}{3}-4x$ **R.** $x<-2,5$.

2. $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{1}{-5}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)+\left(\frac{-2}{-5}\right)\left(\frac{4}{-3}\right)\right]-(-2+5)x<1$. **R.** $x>-\frac{24}{83}$.

3. $\frac{(3)+(-7)+(-5)+(10)+(-4)+(+4)}{(-5)+(-7)-(+4)+(+10)+(-2)}+\frac{x}{8}<5x$. **R.** $x>-\frac{1}{39}$.

4. $\frac{7+(-2)-(-3)-4+(+5)-(-1)}{(-3)(-2)(-1)}+\frac{x}{4}>-\frac{3x}{8}$. **R.** $x>\frac{8}{3}$.

5. $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right):\left[\frac{5}{6}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{-3}{5}\right)(-3)\right]-\frac{3}{8}<-\frac{5x}{8}$. **R.** $x<\frac{6}{5}$.

6. $\frac{(-5):(+5)+(+3):(+\frac{3}{5})}{\frac{3}{5}:\left(\frac{-2}{5}\right)}+2,(90)-1\frac{1}{11}<\frac{x}{3}$. **R.** $x>-\frac{28}{11}$.

7. $1,1(36)x+\frac{5x}{22}>\frac{2x}{11}+2$. **R.** $x>1\frac{9}{13}$.

8. $\frac{\left[(-3)^2+(-2)^3\right]x}{(-1)^{100}+(-2)^2}<\frac{1}{5}+x$. **R.** $x>-\frac{1}{4}$.

9. $\frac{200(0,005)x-0,01x}{0,99}<1,(99)$. **R.** $x<\frac{1}{100}$.

10. $\left\{\left[(-2)^2\cdot(-2)^3\right]:2^5\right\}x-\frac{x-1}{2}<\frac{x}{4}$ **R.** $x<-\frac{2}{13}$.

11. $x(0,001)^2\cdot10^6\cdot0,1(12)\cdot\frac{33}{37}<2^6\cdot2^5:2^9$. **R.** $x<4$.

12. $\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x+2\right)+2\right]+2\right\}-1<0$. **R.** $x<3$.

I. 8. PROBLEME A CĂROR REZOLVARE CONDUCE LA ECUAŢII DE GRADUL INTII CU O NECUNOSCUTĂ

1. Două persoane au împreună 38 lei. Prima are cu 6 lei mai mult decît a doua. Cîţi lei are fiecare ?

R. 22; 16.

2. Cineva are 81 lei în două buzunare. In primul are de două ori mai puţin decît în al doilea. Cîţi lei are în fiecare buzunar ?

R. 27; 54.

3. In trei coşuri se află 47 mere. In primele două numărul merelor este acelaşi, iar în al treilea coş, sînt cu două mere mai mult decît în fiecare din celelalte. Cîte mere sînt în fiecare coş ?

R. 15; 15; 17.

4. Pe trei rafturi se află 63 cărţi: pe primul raft, de trei ori mai multe decît pe al doilea şi pe al doilea de două ori mai multe decît pe al treilea. Cîte cărţi sînt pe fiecare raft ?

R. 42; 14; 7.

5. Un ceas, un lănţişor şi un deşteptător costă împreună 720 lei. Deşteptătorul este de două ori mai scump decît lănţişorul, iar ceasul este de trei ori mai scump decît deşteptătorul. Cît costă fiecare obiect ?

R. 80; 160; 430.

6. Să se împartă 21 în două părţi, aşa fel încît raportul lor să fie $\frac{3}{4}$.

R. 9; 12.

7. Conducătorul unei brigăzi spune celor 88 brigadieri din echipa sa: "împărţiţi–vă" în două grupe, aşa fel ca o cincime din numărul brigadierilor din grupa întîia să fie egală cu o şesime a numărului din grupa a doua". După cîteva minute un elev din echipă spune: 40 în grupa întîia, 48 în grupa doua. Cum a calculat ?

R. $x=\frac{88-x}{6}$; $x=40$.

8. Să se afle două numere, cunoscînd suma lor 85 şi diferenţa lor 15.

R. 50; 35.

9. Diferenţa a două numere este 8, raportul lor este 3:2. Care sînt numerele ?

R. 24; 16.

10. Să se împartă numărul 46 în două părţi, aşa fel ca o treime a părţii întîia să întreacă cu doi o şeptime a părţii a doua.

R. 18; 28.

11. Suma a două numere este 64. Impărţind numărul cel mare la cel mic, obţinem cîtul 3 şi restul 4. Să se găsească cele două numere.

R. 49; 15.

12. Diferenţa a două numere este 35. Impărţind numărul cel mare la cel mic, obţinem cîtul 4 şi restul 2. Să se găsească cele două numere.

R. 46; 11.

13. Avem două rezervoare, dintre care unul conţine de două ori mai multă apă decît celălalt. Dacă turnăm din primul rezervor în al doilea 16 hl, ambele rezervoare conţin aceeaşi cantitate de apă. Cîtă apă a fost în fiecare rezervor ?

R. 64; 32.

14. Intr–o cutie, sînt 68 kg marfă, iar în alta 92 kg. Cîtă marfă trebuie scoasă din a doua cutie şi pusă în prima, pentru ca ambele cutii să conţină aceeaşi cantitate de marfă?

R. 12 kg.

15. Se amestecă două calităţi de vopsea. Prima calitate costă 10 lei kilogramul, iar a doua, 7 lei kilogramul. Cîte kilograme trebuie luate din fiecare fel, pentru a obţine 30 kg de amestec, care să coste 8 lei kilogramul ?

R. 10; 20.

16. In clasele I–a A şi I–a B ale unei şcoli, au fost înscrişi la începutul anului 90 elevi, clasa I–a A, avînd un număr mai mic de elevi. După un trimestru, doi elevi din clasa I–a A au fost mutaţi în clasa I–a B. Acum numărul elevilor din clasa I–a A este 80% din numărul elevilor din clasa I–a B. Cîţi elevi au fost în fiecare clasă la începutul anului şcolar ?

R. 44; 46.

17. Din două metale cu densităţile 7,2 şi 8,4 s–au fabricat 19 kg de aliaj cu densitatea 7,6. Cît s–a luat din fiecare metal?

R. 12,7 kg; 6,3 kg.

18. Tata e cu 39 ani mai în vîrstă decît fiul; peste 7 ani, tata va fi de patru ori mai în vîrstă decît fiul. Cîţi ani are acum fiecare din ei ?

R. 6 ani; 45 ani.

19. Un muncitor cumpără de la cooperativă 38 kg marfă şi anume: făină cu 10 lei kg şi mălai cu 3,50 lei kg, plătind pentru făină cu 110 lei mai mult decît pentru mălai. Ce cantitate a cumpărat din fiecare fel ?

R. 18 kg; 20 kg.

20. Pentru 40 kg mere s–a plătit cu 20 lei mai mult decît pentru 3 kg nuci: 22 kg mere costă cu 24 lei mai puţin decît 2 kg nuci. Cît costă 1 kg de nuci şi cît costă 1 kg de mere ?

R. 100 lei; 8 lei.

21. Un număr e format din două cifre. Dacă scădem din el 18 obţinem numărul răsturnat. Sa se afle numărul, ştiind că suma cifrelor sale este 12.

R. 75.

22. Intr–un număr de două cifre, cifra zecilor este de două ori mai mare decît cifra unităților. Răsturnatul acestui număr este cu 36 mai mic decît cel cerut. Să se afle acel număr.

R. 84.

23. O traversă de fier trebuie tăiată în două părți, ale căror lungimi să fie în raportul 5:3 iar prima parte trebuie să fie cu 5 dm mai lungă decît 5/9 din toată traversa. Să se afle lungimile celor două părți.

R. 45; 27.

24. Dintr–un rezervor s–a scos la început jumătate din apa care se afla în el, plus 1/2 hl; pe urmă, jumătate din acest rest plus 1/2 hl; în sfîrșit, încă o jumătate din rest plus 1/2 hl. După aceste operații, rezervorul mai conține 6 hl apă. Cîtă apă a fost la început în rezervor ?

R. 55 hl.

I.9. EXERCIȚII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Un lot agricol a fost semănat astfel: pe $\frac{1}{3}$ din lot plus 10 ha s–au semănat cartofi; pe $\frac{4}{5}$ din rest, floarea soarelui și pe $\frac{1}{8}$, cît a mai rămas din lot, varză. a) Să se afle aria fiecăreia din cele trei parcele. b) Să se determine mulțimea M ale cărei elemente sînt factorii primi ai c.m.m.d.c. al celor trei numere ce reprezintă aria celor trei parcele. c) Să se scrie mulțimea M în mai multe moduri.

Indicație. Primele două părți împreună fac $\left(\frac{1}{3}+\frac{8}{15}\right)$ din lot + 2 ha = $\frac{13}{15}$ din lot + 2. Toată aceasta reprezintă: $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ din lot. Deci, cele 2 ha vor valora: $\frac{7}{8}-\frac{13}{15}$ din lot, adică $\frac{1}{120}$ din lot. In consecință, lotul are 240 ha.

R. a) 90 ha; 120 ha; 30 ha; b) $M=\{3;2;5\}$;
c) $M=\{2;3;5\}$; $M=\{5;2;3\}$; $M=\{2;5;3\}$.

2. Dintr–o cantitate de cărbune s–au consumat în prima lună $\frac{5}{16}$ și încă 3 t, în a doua lună $\frac{7}{24}$ și încă 2 t, iar în a treia s–a consumat restul, care cîntărea cu $2\frac{2}{3}$ t mai mult decît 0,3 din întreaga cantitate. Care a fost întreaga cantitate ?

Indicație. $3+2+2\frac{2}{3}=\frac{23}{3}$ t; $\frac{5}{16}+\frac{7}{16}+\frac{3}{10}=\frac{217}{240}$ din cantitatea inițială $\frac{240}{240}-\frac{217}{240}=\frac{23}{240}$ repr. $\frac{23}{3}$ t.

R. 80 t.

3. O persoană cheltuiește odată cu 4 lei mai puțin decît 3/5 din ceea ce are, altă dată 1/4 din rest plus 3 lei, iar apoi 2/5 din noul rest plus 1,20 lei. I–au mai rămas 24 de lei. a) Ce sumă a avut și cît a cheltuit de fiecare dată ? b) Sumele cheltuite în cele trei rînduri fiind considerate elementele mulțimii S să se scrie această mulțime.

Indicație. Aplicăm metoda mersului invers: ultimul rest este de 24 de lei. La 24 lei adăugăm 1,20 lei,

obținem 25,20 lei, ceea ce reprezintă $\frac{3}{5}$ din ce a rămas a treia oară; deci restul al treilea este: 24+1,20=25,20.

R. a) $\begin{cases} \text{Suma inițială 140 lei;} \\ \text{Sume cheltuite: 80 lei, 18 lei, 18 lei;} \end{cases}$
b) $S=\{80; 18\}$.

4. Pentru instalarea luminii electrice în două camere s–a cumpărat sîrmă. Pentru prima cameră s–a întrebuințat cu $2\frac{1}{2}$ m mai puțin decît jumătate din toată sîrma, iar pentru camera a doua, 0,9 din cantitatea folosită pentru prima cameră. Cîți metri de sîrmă s–au cumpărat dacă au mai rămas $6\frac{1}{4}$ m ?

Indicație. Dacă s–ar fi folosit și pentru camera a doua aceeași cantitate de sîrmă ca pentru prima, ar fi rămas: $2\left(2\frac{1}{2}\right)=5$ m de sîrmă. Pentru a doua cameră s–a folosit însă cu 6,25–5=1,25 m de sîrmă mai puțin. 1,25 m reprezintă $\frac{10}{10}-\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$ din sîrma consumată la prima cameră. La prima cameră s–a consumat $1{,}25:\frac{1}{10}=12{,}5$ m.

R. 30 m.

5. O mamă cu 2 copii au împreună 60 de ani. a) Să se afle vîrsta fiecăruia dintre copii, știind că cel mai mare are de 3 ori vîrsta celui mai mic, și că mama are dublul sumei vîrstelor copiilor. b) Considerăm elemente ale mulțimii M, numerele care reprezintă vîrstele copilului mic, copilului mare și mamei. Să se determine această mulțime.

Indicație. Știind că mama are vîrsta de două ori mai mare decît suma vîrstelor copiilor, înseamnă că din cei 60 de ani, mama are $\frac{2}{3}$; copiii împreună, $\frac{1}{3}$; deci mama are 40 de ani și copiii împreună 20 de ani. Din acești 20 de ani, copilul mai mare, va avea $\frac{3}{4}$ iar cel mai mic $\frac{1}{4}$.

R. $\begin{cases} \text{a) 15 ani; 5 ani} \\ \text{b) } M=\{5;\ 15;\ 40\}. \end{cases}$

6. Ce oră este dacă mai rămîn din zi $\frac{5}{3}$ din ceea ce a trecut? (Ziua se consideră de 24 de ore și începe la 12 noaptea.)

Indicație. Considerînd ceea ce a trecut din zi ca un întreg, deci $\frac{3}{3}$, și ceea ce mai este (din datele problemei) $\frac{5}{3}$, avem ziua întreagă formată din $\frac{8}{3}$ din ceea ce a trecut. Deci $\frac{8}{3}$ reprezintă 24 de ore.

R. ora 9.

7. Trei brigăzi au arat împreună 396 ha de pămînt. Prima brigadă are de arat $\frac{1}{2}$ din cît are a treia, iar a doua are de arat $\frac{1}{3}$ din cît are a treia brigadă. Cîte hectare de pămînt are de arat fiecare brigadă?

Indicație. Intrebuințăm metoda falsei ipoteze. Admitem că cea de a treia brigadă are de arat 54 ha; atunci prima va avea 27 ha, iar a doua 18 ha. In total 27+18+54=99. Raportul $\frac{396}{99}=4$ ne arată că am presupus pentru a treia brigadă că are de arat o întindere de 4 ori mai mică decît în realitate. Intinderile reale vor fi (27x4)ha, (18x4)ha, (54x4) ha.

R. a) 108 ha; 72 ha; 216 ha.

8. Ioan zice lui George: dă–mi o pară şi voi avea îndoit cît vei avea tu. George răspunde: dă–mi tu o pară şi voi avea şi eu cît tine. Cîte pere avea fiecare ?

Indicaţie. Dacă *I.* dă o pară lui *G.*, ei vor avea un număr egal de pere, deci *I* are cu două pere mai mult decît *G.* Dacă *G.* dă o pară lui *I.*, diferenţa dintre numărul perelor pe care le au ei devine 4; *G.* rămîne cu 4 pere. In concluzie *G.* avea 4+1=5 pere, iar *I.* avea 5+2=7 pere.

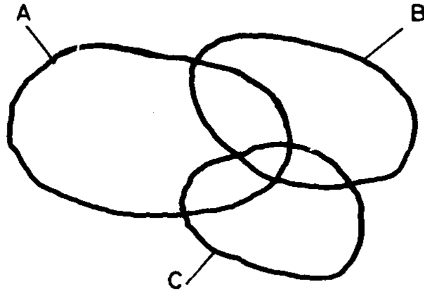


Fig.I.20

9. Fie mulţimile A, B şi C din figura I.20, ale căror elemente nu le–am mai pus în evidenţă. Să se pună în evidenţă cu diferite culori următoarele mulţimi $A\cap B$; $B\cap C$; $A\cap C$; $A\cap(B\cap C)$; $A\cup(B\cup C)$; $(A\cap B)\cup C$; $A\cap(B\cup C)$.

10. O dactilografă a efectuat $\frac{4}{5}$ din lucrarea ce avea de făcut în $\frac{2}{3}$ ore. După cît timp îşi va termina lucrarea dacă va lucra tot timpul în acelaşi ritm.

R. 10 minute.

11. Dacă la numărul muncitorilor dintr–o uzină se adaugă încă pe atît şi încă $\frac{2}{9}$ din acest număr, apoi se repartizează $\frac{2}{5}$ din ei la altă uzină, mai rămîn în uzină 1 200 de oameni. Cîţi oameni au fost la început în uzină ?

R. 900 de oameni.

12. Se dau mulţimile: $A=\{a;\ b;\ 3;\ 9\}$, $B=\{a;\ b;\ 5\}$, $C=\{7;8;a;5\}$. Să se calculeze:
a) $A\cup B$; b) $(A\cup B)\cap C$; c) $(A\cap C)$; d) $B\cap C$; e) $(A\cap C)\cup(B\cap C)$; f) $(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

13. Dintr–un butoi s–a scos la început $\frac{2}{5}$ apoi $\frac{1}{3}$ din cantitatea de apă ce a fost în el, rămînînd în butoi 8 găleţi. Cîtă apă a fost în butoi ?

R. 30 de găleţi.

14. Notăm lungimea unui dreptunghi cu AB. După ce s–a parcurs $\frac{3}{10}$ din AB au mai rămas 8 dm pînă la $\frac{AB}{2}$. Laţimea dreptunghiului BC este 0,75 din AB. a) Să se afle cîţi metri pătraţi reprezintă $\frac{3}{8}$ din aria dreptunghiului $ABCD$?

R. 4,5 m^2.

15. Să se determine x astfel ca $\{3;2\}=\{1;2;3\}\cap\{2;x\}$.

R. $x=3$.

16. Un biciclist a parcurs distanţa AB cu viteza medie de $14\frac{1}{3}$ km pe oră astfel: numărul de km parcurşi în prima zi notat cu x este divizibil cu 2 şi 3 şi este $102<x<114$; a doua zi a parcurs $\frac{11}{12}$ din AB şi a treia zi de $1\frac{1}{6}$ ori mai mult decît în a doua zi. In cîte ore a parcurs biciclistul distanţa AB ?

R. $22\frac{1}{2}$ ore.

17. Fie dreptunghiul $ABCD$. $\frac{1}{5}$ din AB (lungimea dreptunghiului) este cît $\frac{1}{3}AD$ (din lăţimea lui) şi $AB-AD=30$ m. Pe $\frac{3}{5}$ din aria dreptunghiului s–a amenajat un teren de sport. Cît la sută reprezintă terenul de sport din aria întregului teren ?

R. 60%.

18. Să se determine mulţimea E ştiind că îndeplineşte simultan condiţiile: $E\cup\{1;2;5\}=\{1;2;5;4\}, E\cap\{1;2;5\}=\{1;2\}$.

R. $E=\{1; 2; 4\}$.

19. Doi biciclişti au plecat în acelaşi timp, din acelaşi punct spre o localitate ce se afla la o distanţă de 60 km. Un biciclist merge cu viteza de 14 km pe oră, iar celălalt cu viteza de $12\frac{1}{2}$ km pe oră. Cu a cîta parte din drum va rămîne în urmă cel de–al doilea biciclist faţă de primul, după $2\frac{1}{2}$ ore de la plecare ?

R. $\frac{1}{16}$.

20. Două robinete unul cu apă caldă şi unul cu apă rece curgînd împreună pot umple o baie în 8 minute. Numai robinetul cu apă caldă poate umple baia în 18 minute. In cîte minute poate fi umplută baia pînă la acelaşi nivel de robinetul cu apă rece ?

R. $14\frac{2}{5}$ minute.

21. Suma a două numere este 1. Să se găsească aceste numere, ştiind că $\frac{1}{2}$ din primul reprezintă $\frac{1}{3}$ din al doilea.

R. $\frac{2}{5};\frac{3}{5}$.

22. Să se găsească mulţimea X ştiind că: $X\subset\{1; 2; 3\}$ şi $\{1; 2; 3\}\cap X=\{1; 2\}$.

R. $X=\{1; 2\}$.

23. Intr–un coş sînt cu 35 de mere mai mult decît în al doilea coş şi $\frac{1}{3}$ din merele din primul coş reprezintă $\frac{3}{4}$ din numărul de mere din coşul al doilea. Cîte mere sînt în fiecare coş ?

R. 63 şi 28 mere.

24. Diferenţa între lungimea AB şi lăţimea AD a unui dreptunghi este de 40 de metri. Dacă din AB se scad $\frac{4}{5}$ din ea iar din AD $\frac{2}{3}$ din ea, obţinem lungimi egale.
a) Să se afle AB şi AD. b) Cîţi ari reprezintă $\frac{3}{5}$ din aria dreptunghiului?

R. a) 100 m; 60m; b) 36 ari.

25. Se dau mulţimile: $A=\{4; 5; 6; 7\}$ $B=\{3; 4; 5; 6; 7\}$. Să se scrie mulţimile:
a) $\{x|x\in A$ şi $x\notin B\}$. b) $\{x|x\notin A$ şi $x\in B\}$.

R. $A-B=\emptyset$; $B-A=\{3\}$.

26. Un trapez $ABCD$ cu baza mare AB, baza mică CD şi înălţimea DE. Se ştie că $AB=3CD$ şi $2DE=DC$; $BC+AD=\frac{AB+DC}{2}$. Perimetrul trapezului este 60 cm. Să se afle aria trapezului.

R. 100 cm^2.

27. Intr–un paralelogram $ABCD$ cu baza $AB=20$ cm, înălţimea x a paralelogramului este numărul $\{x \in N \mid 15 < x < 42$ şi x să fie divizibil prin 2 şi 7$\}$. Să se arate cît reprezintă 0,1(6) din aria paralelogramului.

R. $93\frac{1}{3}$ cm^2.

28. Un trapez isoscel $ABCD$ (AB baza mare şi DC baza mică) are perimetrul de 90 cm. Ştiind că $AB=4$ DC şi $AD=\frac{AB}{2}$, să se afle aria trapezului cunoscînd că înălţimea este de 13,4 cm.

R. 335 cm^2.

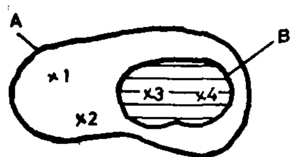


Fig.I.21

29. Se dau mulţimile $A=\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, $B=\{3;\ 4\}$. Să se calculeze $C_A B$ (fig.I.21).

R. $C_A B=A-B=\{1;\ 2\}$.

30. Dacă se măreşte lungimea unui dreptunghi cu 0,5 cm, atunci aria lui creşte cu $2\frac{1}{2}$ cm^2, dacă se măreşte lăţimea cu 0,25 cm, aria lui se va mări cu 1,25 cm^2. Să se arate că acest dreptunghi este un pătrat.

31. Se dau mulţimile $E=\{x \in N \mid x < 10\}$, $A=\{x \in N \mid x < 6\}$, $B=\{x \in N \mid x < 4\}$. Să se scrie mulţimile: a) $C_E A$; b) $C_E B$; c) $C_A B$.

R. a) $\{6;\ 7;\ 8;\ 9\}$; b) $\{4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$; c) $\{4;\ 5\}$.

32. Se dă dreptunghiul $ABCD$ cu lungimea AB şi lăţimea BC. Se cunoaşte că $\frac{3}{8}$ din $AB=\frac{3}{4}$ din BC şi $AB-BC=40$ cm. Să se calculeze cît la sută reprezintă AB din BC.

R. 200%.

33. Un copil are pasul de 70 cm, un altul are pasul de 50 cm. Ei pornesc în acelaşi timp, din acelaşi loc. Care este cea mai mică distanţă după care urmele paşilor se găsesc una în dreptul celeilalte?

R. 3,5 m.

34. Se dau mulţimile: $A=\{2;3;a;5\}$, $B=\{a;5\}$. Să se calculeze: $A-B$ şi $B-A$.

R. $\{2;\ 3\}$; $\emptyset$.

35. Un muncitor execută o lucrare în 5 ore, alt muncitor şi–o îndeplineşte în 8 ore. a) Peste cîte ore, de la data înregistrării muncii lor, ei vor îndeplini un număr întreg de

norme ? b) Cîte norme întregi va îndeplini fiecare ?

R. a) 40 ore; b) 8; 5.

36. Se dau mulţimile: $A=\{2;3;4;5\}, B=\{2;3;4\}$. Să se determine $C_A B$.

R. $\{5\}$.

37. Să se găsească un număr prim de trei cifre, ştiind că produsul cifrelor lui este 252. Justificaţi răspunsul.

Indicaţie. Prin descompunerea lui 252 în factori primi rezultă că numărul căutat poate avea cifrele 4; 7; 9 sau 6; 6; 7. Din numerele ce se pot forma, numai două sînt convenabile.

R. 479 şi 947.

38. Intr–un magazin au fost aduse nişte obiecte în 10 lăzi astfel: în a doua ladă cu un obiect mai mult decît în prima, în a treia cu un obiect mai mult decît în a doua ş.a.m.d. O persoană cumpără lada cu cel mai mare număr fără soţ (impar) de obiecte. Din lăzile rămase, altă persoană cumpără toate lăzile care conţin un număr par (cu soţ) de obiecte. In magazin au rămas 24 obiecte. Cîte obiecte erau în total în magazin şi cîte în fiecare ladă ?

R. Prima ladă conţine 2 obiecte, în total 65 obiecte.

39. Dintre numerele de forma $71x\,84y$ divizibile cu 18, care este cel mai mare şi care este cel mai mic ?

Indicaţie. Ca un număr să se dividă cu 18, trebuie să fie divizibil cu 2 şi cu 9.

R. 718 848; 711 846.

40. Să se găsească două numere naturale astfel ca de şase ori primul înmulţit cu de 4 ori al doilea să se obţină 1 680 şi de trei ori primul să fie mai mare cu 1 ca al doilea.

Indicaţie. Produsul numerelor căutate este cîtul dintre 1 680 şi 6 · 4. Se caută două numere în aceste condiţii; din soluţiile posibile, convine perechea 5;14.

R. 5; 14.

41. Intr–un săculeţ sînt 10 bile albe, 12 bile negre şi 16 bile roşii. Care este numărul cel mai mic de bile pe care trebuie să–l scoatem fără a ne uita în săculeţ, pentru a fi siguri că am scos trei bile de aceeaşi culoare ? De ce ?

R. 7 bile.

42. Să se efectueze:

$$2^2\cdot 2^2+[(600:300)^2]\cdot[120:(30,2:15,1):2-(10,01-9,01)]+2^7:2^6.$$

R. 134.

43. Să se determine un număr de cinci cifre ştiind că produsul dintre numărul format din primele două cifre şi numărul format din ultimile cifre este 1 111.

R. 11 101.

44. Elevii unei clase au participat la o întrecere sportivă în două zile astfel: în prima zi 15 elevi, în a doua zi de două ori mai mulţi ca în prima zi. Să se afle numărul elevilor din clasă, dacă 12 din ei au venit în fiecare zi iar 3 elevi în nici o zi.

R. 36 elevi.

53. Două trenuri cu viteze medii diferite au pornit în acelaşi timp din staţia A spre staţia B care se află la depărtarea de 341,25 km de A. După $3\frac{1}{2}$ ore distanţa dintre cele două trenuri era de 35 km iar după $5\frac{1}{4}$ ore de la plecare primul tren ajunge în staţia B. Să se afle viteza medie a fiecărui tren.

R. 65 km/h; 55 km/h.

54. Să se afle în care sistem de numeraţie avem: $\overline{65} \times \overline{31} = \overline{3005}$. Să se treacă apoi în baza 10 şi să se verifice.

R. Baza este 7.

55. Fie mulţimile $A = \{4; 3; 2; 9\}$, $B = \{4; 8; 9; 11\}$, $C = \{1; 7; 3\}$. Să se arate că $(A-B)-C \neq A-(B-C)$ adică diferenţa nu este asociativă.

Indicaţie. $(A-B)-C = \{3; 2\}-\{1; 7; 3\} = \{2\}$ şi $A-(B-C) = \{4; 3; 2; 9\}-\{4; 8; 9; 11\} = \{3; 2\}$.

56. Andrei este cel mai mic din cinci fraţi şi Barbu cel mai mare. Emil este mai mic decît Călin, Dumitru este mai mare decît Călin. Fiecare dintre fraţi este cu acelaşi număr de ani mai mic decît următorul. (Se consideră ani împliniţi exprimaţi prin numere întregi.) 1) Să se scrie în ordinea crescătoare a vîrstei cei cinci fraţi. 2) Dacă mijlociul are şapte ani care este suma vîrstelor ? 3) Care este maximul vîrstei pe care ar putea-o avea cel mare ?

R. 2) 35 ani; 3) 13 ani.

II. C l a s a a–VI–a

ARITMETICĂ ŞI ALGEBRĂ

II.1. FRACŢII ORDINARE

1. Un ceasornic rămîne în urmă cu $\frac{3}{4}$ s într–o oră. El a fost potrivit azi la ora 13 şi 30 minute. Cu cît va rămîne în urmă pînă mîine la ora 12 ?

R. $16\frac{7}{8}$ s.

2. Pămîntul săpat îşi măreşte volumul cu o cincime. Ce volum de pămînt se va obţine, după săpare din 60 m.c. de pămînt ?

R. 72 m.c.

3. $\frac{3}{5}$ din suprafaţa unei parcele de pămînt s–au semănat cu grîu, iar restul cu sfeclă. Scrieţi cîtul acestor două suprafeţe de pămînt.

R. $\frac{3}{2}$.

4. $\frac{2}{3}$ dintr–un rezervor al unui automobil reprezintă 36 l benzină. Cîtă benzină conţin $1\frac{1}{2}$ rezervoare ?

R. 81 l.

5. La fabrica de la Comarnic se transformă zilnic în var cîte 5 vagoane de cîte 15 t de calcar. Varul obţinut reprezintă $\frac{55}{100}$ din calcarul folosit. Cîte kilograme de var s–au obţinut într–o săptămînă ?

R. 247 500 kg.

6. O gospodină vrea să facă dulceaţă de nuci verzi şi întrebuinţează 5 kg de nuci şi o cantitate de zahăr egală cu $\frac{3}{5}$ din masa fructelor. Prin fierbere se pierde $\frac{1}{8}$ din masa totală. Cîte kg de dulceaţă a obţinut această gospodină ?

R. 7 kg.

7. Mama a cumpărat 27 kg de lînă nespălată. Prin spălare lîna a pierdut $\frac{5}{9}$ din masă, iar prin toarcere $\frac{1}{3}$ din masă. Cîte kilograme de lînă toarsă s–au obţinut ?

R. 8 kg.

8. Pe un lot s–au semănat 480 ha cu grîu şi 520 ha cu porumb. Ce parte din suprafaţa semănată cu porumb reprezintă suprafaţa semănată cu grîu şi invers ? (Scrieţi pe rînd suprafaţa semănată cu grîu şi porumb şi suprafaţa întreagă.) Ce observaţi la aceste fracţii ? Scrieţi sub forma cea mai simplă.

R. $\frac{12}{13}$; $\frac{13}{12}$.

9. Un biciclist a făcut în prima oră $8\frac{1}{3}$ km, în a doua oră cu $2\frac{1}{4}$ km mai mult şi în a treia cu $1\frac{3}{5}$ km mai mult decît în a doua oră. Cîţi kilometri a mers în cele trei ore?

R. $31\frac{1}{10}$ km.

10. Intre pereţii unei camere este o distanţă de $\frac{1}{3}$ m. Ce lungime are o bîrnă care este zidită într–un perete pe o distanţă de $\frac{1}{3}$ m, iar la celălalt capăt pe o distanţă de $\frac{3}{5}$ m ?

R. $6\frac{4}{15}$ m.

11. Doi muncitori execută o piesă în 9 ore dacă lucrează împreună. Unul dintre ei ar termina această piesă în 15 ore. In cîte ore ar termina celălalt muncitor piesa ?

R. $22\frac{1}{2}$ ore.

12. Un rezervor poate fi umplut printr–un robinet în 8 ore şi golit în 11 ore. (Se presupune că debitul este constant.) In cît timp se umple rezervorul, dacă sînt deschise robinetul şi orificiul de scurgere ?

R. $29\frac{1}{3}$ ore.

13. Patru muncitori trebuiau să facă împreună o lucrare; primul a lucrat $\frac{3}{20}$ din toată lucrarea, al doilea $\frac{5}{20}$, al treilea $\frac{1}{4}$ şi al patrulea restul. Ce parte a lucrat al patrulea muncitor?

R. $\frac{13}{30}$.

14. Un vapor parcurge în sensul curentului $24\frac{1}{2}$ km/h. Viteza apei este de $2\frac{3}{4}$ km/h. Cîţi kilometri pe oră va parcurge vaporul, dacă va merge împotriva curentului ?

R. $21\frac{3}{4}$ km/h.

15. Un graur poate zbura 1 200 m pe minut, un lăstun are $\frac{4}{3}$ din viteza graurului, iar un uliu $\frac{7}{16}$ din viteza lăstunului. Cîţi metri pe minut poate zbura un lăstun şi cîţi un uliu ?

R. 1 600 m; 700 m.

16. Care este masa unui paralelipiped dreptunghic de fontă cu dimensiunile de $3\frac{1}{2}$ cm, $7\frac{1}{8}$ cm şi $5\frac{1}{3}$ cm, dacă fonta are densitatea de $7\frac{4}{5}$ g/cm^3 ?

R. 1 $037\frac{2}{5}$ g.

17. Dintr–o cisternă de benzină s–a scos prima dată $\frac{1}{12}$ din toată cantitatea, a doua oară $\frac{1}{5}$ din rest, a treia oară de două ori mai mult decît se scosese pînă atunci, a patra oară o treime din ultimul rest şi în cisternă au mai rămas 160 l de benzină. Cîţi litri avea cisterna şi cît s–a scos de fiecare dată ?

R. 1 200 l; 100 l; 220 l; 640 l; 80 l.

18. Dintr–o bucată de stofă s–au vîndut $\frac{1}{5}$ şi încă $\frac{2}{3}$ din ea: bucata care a mai rămas s–a vîndut apoi cu 2 240 lei. Un metru de stofă costă 400 lei. Cîţi metri de stofă au fost la început în bucată şi cîţi metri s–au vîndut de fiecare dată ?

R. 42 m; $8\frac{2}{5}$ m; 28 m.

19. Un lucrător cheltuieşte din salariul lunar: $\frac{5}{12}$ pentru hrană, $\frac{1}{12}$ pentru locuinţă, $\frac{1}{4}$ pentru îmbrăcăminte, $\frac{1}{6}$ pentru spectacole iar restul de 150 lei îi depune la CEC. Cît cheltuieşte pentru hrană, locuinţă, îmbrăcăminte şi cît la sută din retribuţie depune la CEC ?

R. 500 lei; 100 lei; 300 lei; 12,50%.

20. 12 muncitori repară o jumătate dintr–un drum de fier în 28 zile. In cîte zile va fi reparată cealaltă jumătate, dacă numărul muncitorilor s–a micşorat cu 4 (norma a rămas aceeaşi) ?

R. 42 zile.

II.2. IMPĂRŢIREA IN PĂRŢI PROPORŢIONALE

21. Un premiu de 1 600 lei a fost împărţit între cinci cîştigători astfel: primul o optime din premiu, al doilea $\frac{2}{5}$ din rest iar ceilalţi sume proporţionale cu numerele $2\frac{1}{2}$, 5 şi 6,5. Ce sumă a primit fiecare cîştigător ?

R. 200 lei; 560 lei; 150 lei; 300 lei; 380 lei.

22. Două asociaţii agricole au irigat un teren, cheltuind pentru aceasta 6 580 lei şi hotărînd să plătească fiecare proporţional cu cantitatea de cereale recoltată după irigare. Prima asociaţie a însămînţat 24 ha cu grîu şi 12 ha cu orz, iar a doua 32 ha cu grîu şi 26 ha cu orz. Recolta de grîu a fost de 24 chintale la hectar, iar cea de orz 16 chintale la hectar. Cît trebuie să plătească fiecare ?

R. 7 689 lei; 18 849 lei.

23. 15 ţesătoare au ţesut 2 280 m de pînză în 16 zile. Cîte ţesătoare vor ţese 1 596 m de pînză în 24 zile ? Cîţi metri ţese o ţesătoare pe zi ? Din pînza ţesută de o ţesătoare într-o zi, se poate confecţiona un şorţ, o cămaşă şi un cearceaf. Să se afle cîţi metri de pînză se vor folosi pentru fiecare din aceste confecţii, dacă metrajul folosit este invers proporţional cu numerele $2\frac{8}{7}$ şi 17.

R: 7 ţesătoare; 9,5 m; 2 m; 13,50 m; 4 m.

24. Două familii mergînd în munţi au poposit la cabană Padina şi au plătit proporţional cu numărul persoanelor şi al zilelor cît au stat, dînd în total 700 lei. Prima familie, compusă din 3 persoane, a stat 5 zile, iar a doua, compusă din 5 persoane, a stat 4 zile. Cît a plătit fiecare familie ?

R. 300 lei; 400 lei.

II.3. MĂRIMI INVERS PROPORŢIONALE

25. Un tren a pornit cu o viteză de 36 km pe oră, urmînd să parcurgă un drum în 8 ore, dar după ce a parcurs 108 km a trebuit să se oprească pentru $\frac{3}{4}$ ore. Cu ce viteză trebuie să-şi continue drumul pentru a ajunge la ora fixată ?

R. $42\frac{6}{17}$.

26. Un grup de muncitori a făcut trei inovaţii pentru care a primit cîte 6 273 lei. Grupul era compus din 3 muncitori şi banii s-au împărţit astfel: pentru prima inovaţie proporţional cu numerele 3,4,10, pentru a doua invers proporţional cu aceleaşi numere şi pentru a treia în părţi egale. Cîţi lei a primit fiecare muncitor pentru cele trei inovaţii ?

R. 3 000 lei; 2 295 lei; 978 lei.

27. Reparatul şi tencuitul unui perete ale cărui dimensiuni sînt: lungimea 38,4 m, înălţimea 9 m şi grosimea 0,48 m, costă 2 000 lei. Cît va costa reparatul şi tencuitul unui perete care este cu 6,4 m mai scurt, cu 2,25 m mai puţin înalt şi cu 0,12 m mai gros decît primul perete?

R. 1 562,50 lei.

II.4. RAPOARTE ŞI PROPORŢII

28. Lungimea totală a fluviului Dunărea este de 2 800 km. In ţara noastră Dunărea are o lungime de 1 075 km. Cît reprezintă lungimea de pe teritoriul ţării noastre faţă de lungimea totală ?

R. $\frac{215}{572}$.

29. a) Un cub are muchia de 3 cm; un alt cub are muchia de 5 cm. Să se afle raportul muchiilor şi cel al volumelor. b) Un cub are muchia de 2,5 cm, un alt cub are muchia de $7\frac{1}{2}$ cm. Să se afle raportul muchiilor şi cel al volumelor.

R. a) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; b) $\frac{4}{9}$; $\frac{1}{27}$.

30. Lungimea drumului de la Bucureşti la Bacău este de 302 km. Pe o hartă această distanţă are lungimea de 15,1 cm. Care este scara acestei hărţi ?

31. Distanţa de la Bucureşti la Drăgăşani este de 240 km. Cît va măsura această distanţă pe o hartă cu scara $\frac{1}{2\ 000\ 000}$?

32. Doi biciclişti pleacă în acelaşi timp unul spre celălalt din două localităţi. Distanţa dintre ele este de 45 km. Raportul vitezelor celor doi biciclişti este $\frac{4}{5}$ şi unul din ei face cu 3 km/oră mai mult decît celălalt. Se cer: a) vitezele celor doi biciclişti; b) distanţa la care se întîlnesc; c) timpul după care se întîlnesc.

R. a) 12 km/h, 15km/h; b) 20 km; c) $\frac{5}{3}$ ore.

33. O intreprindere agricolă de stat a însămînţat 1 900 ha cu grîu, orz, ovăz şi secară. Să se afle suprafeţele însămînţate cu fiecare fel de cereale, dacă se ştie că raportul dintre suprafeţele însămînţate cu orz şi grîu este 1/3, a celor însămînţate cu ovăz şi orz 1/2 şi a celor însămînţate cu secară şi orz 1/4.

R. 1 200 ha; 400 ha; 200 ha; 100 ha.

34. Un tren de marfă care are o viteză de 18 km pe oră şi un tren personal care are o viteză de 24 km pe oră merg pe o linie dublă în sensuri opuse. Mecanicul din trenul de marfă observă că trecerea trenului personal prin faţa sa durează 13 secunde. Care este lungimea trenului personal ?

R. $151\frac{2}{3}$ m.

35. Un şofer merge cu autocamionul spre Ploieşti cu o viteză de 40 km pe oră. El a întîlnit un tren care venea de la Ploieşti cu o viteză de 24 km pe oră şi care avea o lungime de 180 m. In cît timp a trecut autocamionul pe lîngă tren ?

R. $10\frac{1}{8}$ s.

36. Un muncitor poate construi un zid lung de 33 m în 22 zile. In cît timp vor construi 7 muncitori un zid de 56 m, dar mai greu de lucrat ca primul de $\frac{6}{5}$ ori ?

R. $6\frac{2}{5}$ zile.

37. O placă de metal de formă paralelipipedică are lungimea de 26 cm, lăţimea 14 cm şi grosimea de 1 mm şi are masa de 275 g. O placă din acelaşi material cu aceeaşi lungime şi lăţime, dar grosimea diferită, are masa de 81,9 g. Care este grosimea acestei plăci ?

R. 0,3 mm.

38. O mamă împreună cu fiica ei lucrează într–un atelier de covoare. Mama ţese $3\frac{1}{2}$ m pe zi, iar fiica $2\frac{3}{4}$ m pe zi. Pentru 18 zile de lucru, mama a încasat cu 108 lei mai mult decît fiica. Cît a încasat fiecare din ele pentru cele 18 zile de lucru ?

R. 504 lei, 396 lei.

39. Două roţi sînt legate printr–o curea de transmisie. Lungimea cercului primei roţi este de 90 cm, iar a celeilalte cu 12 cm mai mare ca prima. Prima roată face 68 învîrtituri pe minut. Cîte învîrtituri face roata a doua ?

R. 60 învîrtituri.

40. Media aritmetică a trei numere este egală cu $46\frac{2}{3}$. Numărul al doilea reprezintă 1/2 din primul număr şi al treilea reprezintă 0,5 din al doilea. Să se afle aceste numere.

R. 80; 40; 20.

41. Media aritmetică a patru numere este egală cu 1 093,75. Care sînt aceste numere, dacă se ştie că primul reprezintă 75 % din al doilea, al doilea 75% din al treilea şi al treilea 75% din al patrulea ?

R. 1 000; 1 200; 900; 675.

42. Patru numere sînt direct proporţionale cu: 0,0(3); 0,5; $\frac{1}{3}$ şi 1, iar media lor aritmetică este egală cu 28. Să se afle aceste numere.

R. 2; 30; 20; 60.

43. 21 muncitori lucrînd cîte 8 ore pe zi pot termina o lucrare în 12 zile. In a cincea zi de la începutul lucrului le–au mai venit în ajutor cîţiva lucrători şi astfel lucrînd cîte 6 ore pe zi au terminat restul lucrării în 7 zile. Cîţi muncitori au venit a cincea zi ?

R. 7 muncitori.

II.5. PROCENTE

44. Patru elevi vor să cumpere, fiecare cîte o minge. Primului nu–i ajunge 26,(9)% din cost, celui de–al doilea nu–i ajunge 12/25, celui de–al treilea nu–i ajunge 47 % din costul mingii, iar celui de–al patrulea îi mai rămîne 0,22 din costul mingii. Să se calculeze cîte mingi ar putea cumpăra cei patru elevi, dacă ar pune toți banii împreună.

R. 3 mingi.

45. După două reduceri succesive de prețuri de cîte 10 %, un metru de mătase vegetală costă 81 lei. Cît a costat înainte de prima reducere de prețuri ?

R. 100 lei.

46. Prin irigare s–a obținut în medie la ha o recoltă de porumb cu 2 380 kg mai mare. Știind că sporul de recoltă reprezintă 85 % din recolta obținută înainte de irigare, să se afle producția obținută la hectar pe pămîntul irigat.

R. 5 180 kg.

II.6. PROBLEME CARE SE REZOLVĂ ARITMETIC SAU ALGEBRIC

1. Primul termen al unui raport este 26,4, valoarea raportului este $\frac{3}{5}$. Să se găsească termenul necunoscut.

R. 44.

2. Al doilea termen al unui raport este 0,35, valoarea raportului este $3\frac{1}{3}$. Să se găsească termenul necunoscut.

R. $1\frac{1}{6}$.

3. Panta unui teren se determină prin raportul dintre înălțimea terenului și proiecția orizontală a terenului. Să se determine panta terenului, știind că baza este de 91 m, iar înălțimea de 7 m.

R. $\frac{1}{13}$.

4. Raportul dintre numărul băieților și numărul fetelor dintr–o clasă este $\frac{3}{4}$. Cîți băieți sînt în clasă dacă: 1) totalul elevilor din clasă este 35; 2) numărul fetelor este 20; 3) băieți sînt cu 5 mai puțini decît fete ?

R. 15 băieți.

5. Să se găsească raportul perimetrelor și ariilor a două dreptunghiuri, știind că lungimea unui dreptunghi este de 25 cm, iar lătimea de 20 cm și că lungimea altui dreptunghi este de 24 cm, iar lățimea de 15 cm.

R. $\frac{15}{13}$; $\frac{25}{18}$.

6. Să se determine scara unei hărți, știind că distanța dintre două puncte de pe teren este de 975 m, iar pe hartă de 3,9 cm.

R. $\frac{1}{25\,000}$.

7. O grădină de zarzavat are lungimea de 340 m şi lăţimea de 220 m. Ce lungime, lăţime şi arie, va avea planul acestei grădini de zarzavat pe un desen executat la scara de $\frac{1}{500}$?

R. 68 cm, 44 cm, 2 992 cm^2.

8. Pentru încălzirea unei case s–a pregătit combustibil pentru 60 de zile, la un consum de 700 kg pe zi. Pentru cîte zile ar ajunge acelaşi combustibil, dacă se întrebuinţează zilnic 525 kg?

R. 80 zile.

9. Pentru acoperirea unei podele sînt necesari 39 m de linoleum cu lăţimea de 0,9 m; dar depozitul nu a avut linoleum de această lăţime şi a propus un linoleum cu 0,25 m mai îngust. Cîţi metri de linoleum îngust vor fi necesari, pentru acoperirea podelei date ?

R. 54 m.

10. O roată dinţată are 75 dinţi şi face 92 învîrtituri pe minut. Cîte învîrtituri pe minut va face o roată cu 5 dinţi, angrenată cu prima ?

R. 1 380.

11. Dacă se folosesc pentru un parchet plăci dreptunghiulare cu lungimea de 6,3 dm şi lăţimea de 4,0 dm, atunci sînt necesare 460 de plăci. Cîte plăci pătrate se vor folosi la acelaşi parchet dacă se vor lua•plăci cu mărimea de 0,01 m.p. ?

R. 11 592 plăci.

12. Un vapor parcurgînd cîte 20 km pe oră, face un drum în $9\frac{1}{5}$ ore. Cît timp va întrebuinţa vaporul pentru acelaşi drum, dacă parcurge cîte 18,4 km într–o oră ?

R. 10 ore.

13. Să se împartă numărul 720 în 2 părţi care se raportă între ele ca $\frac{2}{3}:\frac{5}{6}$.

R. 320; 400.

14. Să se împartă numărul 100 în 3 părţi proporţionale cu numerele $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ şi $\frac{5}{6}$.

R. 24; 36; 40.

15. Să se împartă numărul 9 510 proporţional cu numerele $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{5}$.

R. 2 700; 2 400; 2 250; 2 160.

16. Să se împartă numărul 200 în 4 părţi, astfel ca: prima să fie de $2\frac{1}{6}$, a doua de $3\frac{2}{3}$, a treia de $\frac{1}{2}$ ori mai mare decît a patra.

R. 52; 88; 36; 24.

17. Să se găsească două numere, ştiind că unul este mai mare decît celălalt de $1\frac{1}{2}$ ori şi adunate, ele dau 105.

R. 42; 63.

18. Diferenţa a două numere este 10. Aceste numere sînt în raportul: $\frac{5}{6}:\frac{1}{2}$. Să se gă–

sească aceste numere.

R. 25; 15.

19. Să se găsească trei numere, ştiind că ele sînt direct proporţionale cu numerele 1; $\frac{2}{3}$ şi $\frac{3}{4}$ şi că primele două numere adunate dau cel mai mic număr de trei cifre.

R. 60; 40; 45.

20. O sîrmă lungă de $38\frac{1}{2}$ m trebuie tăiată în 3 părţi, astfel încît prima bucată să fie de atîtea ori mai mare decît a doua, de cîte ori $\frac{2}{3}$ este mai mare decît $\frac{5}{12}$, iar bucata a doua să fie de atîtea ori mai mică decît a treia, de cîte ori $\frac{3}{5}$ este mai mic decît $\frac{3}{4}$. Să se determine lungimea fiecărui segment de sîrmă.

R. 16; 10; $12\frac{1}{2}$ m.

21. Să se găsească trei numere, ştiind că primul număr se raportă la cel de–al treilea ca $\frac{2}{3}:\frac{1}{2}$, iar al treilea se raportă la cel de–al doilea ca $1:\frac{4}{7}$ şi că suma celui de–al doilea număr cu cel de–al treilea este 60.

R. $50\frac{10}{11}$; $21\frac{19}{11}$; $38\frac{2}{11}$.

22. Două roţi sînt legate printr–o curea de transmisiune. Circumferinţa unei roţi este de 80 cm, iar a celeilalte de 185 cm. Să se determine cîte învîrtituri pe minut face a doua roată, dacă prima face 74 învîrtituri pe minut ?

R. 32 învîrtituri.

23. Intr–o şcoală elementară învaţă 192 de elevi. Numărul elevilor din clasa a II–a reprezintă $16\frac{2}{3}$ % din numărul total al elevilor, numărul elevilor din clasa a III–a reprezintă 125 % din numărul elevilor din clasa a II–a. Cîti elevi sînt în clasele a II–a şi a III–a luate împreună ?

R. 72 elevi.

24. Un grup de copii a strîns într–o zi 48 de snopi de grîu, iar a doua zi 30 de snopi. Cu cît la sută au strîns copii mai mulţi snopi în prima zi decît în a doua zi ?

R. 60 %.

25. La o fabrică lucrează 4 125 de femei şi bărbaţi; numărul femeilor reprezintă 65 % din numărul bărbaţilor. Cu cît este mai mare numărul bărbaţilor decît al femeilor?

R. 875.

26. Suma de 300 lei a fost împărţită în două părţi, dintre care una este de $1\frac{1}{2}$ ori mai mare decît cealaltă. Partea mai mare a fost depusă la CEC cu dobîndă de 5 %, partea mai mică a fost depusă la CEC cu dobîndă de 4 %. Ce dobîndă se va obţine de la ambele părţi după trecerea unui an ?

R. 13,80 lei.

27. La o fabrică, 35 % din totalul lucrătorilor îl formează femeile, iar restul bărbaţii, care sînt cu 420 mai mulţi decît femeile. Să se determine numărul total al muncitorilor din fabrică.

R. 1 400 muncitori.

28. Cîtă pînză s–a vîndut în patru zile, ştiind că în prima zi s–a vîndut 4 % din toată pînza, în a doua zi 15 % din ce a rămas, iar numărul de metri vînduţi în a treia zi se raportă la numărul metrilor de pînză vînduţi în a patra zi ca $2\frac{1}{2}$ la $1\frac{2}{3}$? In a patra zi s–au vîndut 163,2 m de pînză.

R. 500 m.

29. Un copil are 90 de nuci, un altul 10 nuci. De cîte ori s–au dat fiecăruia dintre ei cîte 5 nuci, dacă primul a rămas numai cu de 3 ori mai multe nuci decît al doilea ?

R. 6 ori.

30. Mama, fiica şi fiul au cheltuit împreună o sumă oarecare de bani; mama şi fiica au cheltuit împreună 100 de lei; fiica şi fiul au cheltuit împreună 75 lei, iar mama şi fiul au cheltuit împreună 110 lei. Cîţi lei a cheltuit fiecare în parte ?

R. 67,5 lei; 32,5 lei; 42,5 lei.

31. Trei grupe de copii au sădit un număr de pomi. Primul grup a sădit 32,5 % din numărul total de pomi; raportul dintre numărul de pomi sădiţi de al doilea grup şi numărul de pomi sădiţi de al treilea grup este 1,2 : 1,5. Care este numărul total de pomi sădiţi de copii, ştiind că primul grup a sădit cu 120 de pomi mai puţini decît cel de–al treilea ?

R. 2 400 pomi.

32. După ce am citit $\frac{1}{4}$ dintr–o carte şi încă 20 de pagini, mi–au rămas să mai citesc $\frac{2}{3}$ din carte fără 3 pagini. Cîte pagini are cartea pe care am citit–o ?

R. 144 pagini.

33. Să se găsească două numere, ştiind că dacă se înmulţeşte primul din ele cu $2\frac{1}{4}$ se obţine un număr cu $5\frac{5}{8}$ mai mic decît al doilea şi în cazul cînd se înmulţeşte primul cu $5\frac{1}{4}$ se obţine un număr cu $7\frac{7}{8}$ mai mare decît al doilea număr.

R. $4\frac{1}{4}$; $15\frac{3}{4}$.

34. Să se afle lungimea, lăţimea şi aria unui dreptunghi, cunoscînd următoarele: dacă lăţimea dreptunghiului (avînd aceeaşi lungime) ar fi $7\frac{1}{4}$ cm, atunci aria lui ar fi mai mică decît aria căutată cu $2\frac{5}{16}$ cm^2; dacă lăţimea dreptunghiului ar fi fost $7\frac{3}{4}$ cm, atunci aria lui ar fi fost mai mare decît aria căutată cu $2\frac{5}{16}$ cm^2.

R. $9\frac{1}{4}$ cm; $7\frac{1}{2}$ cm; $69\frac{3}{8}$ cm^2.

35. Să se găsească 3 numere, ştiind că $\frac{1}{2}$ din primul număr este egal cu $\frac{1}{3}$ din al doilea sau $\frac{1}{4}$ din al treilea număr şi că al treilea număr este mai mare decît primul cu 6,4.

R. 6,4; 9,6; 12,8.

II.7. EXERCIŢII ŞI PROBLEME RECAPITULATIVE

Să se efectueze:

1. $$\frac{\left(\frac{33\frac{1}{3}}{2^2 \cdot 5^2}+\frac{2}{3}\right) \cdot \sqrt{\frac{4^2}{3}:\frac{1}{\sqrt{3}}+0{,}1:\frac{1}{200}}}{12-2\left(\frac{3}{4}+0{,}25\right) \cdot 3-2}+\frac{\sqrt{8}+\sqrt{20}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}.$$ **R.** 2.

2. $$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{3\frac{1}{8}:\left[\left(4\frac{5}{12}-3\frac{13}{24}\right) \cdot \frac{4}{7}\left(3\frac{1}{18}-2\frac{7}{12}\right) \cdot 1\frac{10}{17}\right]}{2\frac{1}{5}+\frac{1}{1\frac{1}{3}}-\sqrt{3{,}8025}+0{,}1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}.$$ **R.** 1.

3. $$\frac{7}{12}+\frac{\left[15:3\frac{3}{5}+\left(10\frac{1}{2}:\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{14}\right] \cdot \left(1\frac{23}{52}-1\frac{1}{4}\right)}{\left(2\frac{1}{4}+0{,}25 \cdot 8\frac{3}{7}\right)-\frac{5}{14}}+\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}.$$ **R.** 5.

4. $$\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}-\frac{0{,}71-\frac{1}{4}}{0{,}71+\frac{1}{4}} \cdot \frac{\left(15-9\frac{1}{3}\right) : 2\frac{5}{9}}{\left(19\frac{2}{3}-11\frac{7}{9}\right) \cdot \frac{9}{71}}:\frac{\sqrt{289}}{16}-\sqrt{0{,}1(6)}:\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{8}.$$ **R.** $\frac{5}{3}$.

5. $$\frac{3\frac{13}{15}:\frac{42}{45}+\left(6\frac{53}{56}-2{,}375\right)}{1\frac{19}{3+\frac{4}{5}}-\frac{1+\frac{1}{2}}{8-\frac{7}{5-1{,}5}}} \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{122}\right)^2:\frac{2}{23}.$$ **R.** 1.

6. $\sqrt{\frac{271}{476}+\frac{2\frac{1}{2}}{8\frac{1}{2}}:\frac{3\frac{1}{2}}{5\frac{1}{8}}+\left(\frac{1}{2,5-1}-\frac{1}{3\frac{1}{2}-1}\right):\frac{4}{5}+\frac{2}{3}}$. **R. 2.**

7. $\frac{\left(2\frac{1}{2}\right)^3-\left(1\frac{1}{4}\right)^2-\left(1-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{33,(3)}{100}-13\frac{2}{3}}{(2^3\cdot 3^2\cdot 5^2):(2^2\cdot 5\cdot 3^3)+0,375+\frac{5}{8}-4}\cdot\sqrt{3}:\sqrt{27}$. **R. 1.**

8. $\frac{(0,2)^3:(0,3)^3 1\frac{1}{8}\cdot(1,2)^2\cdot(2\frac{1}{2})^2+30,(5)+3,(4)-27}{(0,1)^2:(0,01)^2:10-(0,9)^3:(0,9)^2:\frac{9}{10}+1}\cdot\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}}$. **R. 7.**

9. $\frac{\left(0,5:1,25+\frac{7}{5}:1\frac{4}{7}-\frac{3}{11}\right):\frac{8}{11}}{\left(1,5+\frac{1}{4}\right):18\frac{1}{3}}-\frac{\left(6-4\frac{1}{2}\right):0,003:50}{\left(3\frac{1}{20}-2,65\right)\cdot 4:\frac{1}{5}}-13+\frac{7}{12}$. **R. 1.**

10. $\left(10-3\cdot 0,3\cdot 10+\frac{1}{19}+2\frac{5}{76}-\frac{3}{532}\right)-2\frac{15}{133}+\frac{\left(\sqrt{903,6036}:1,2-2\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{25}{1371}}{0,003:0,15+0,08}+\frac{5}{6}$. **R. 6.**

11. $2+19\left[\frac{2,652:1,3-1\frac{17}{30}+\frac{3}{50}}{(24:6,4-12:3\frac{3}{5}+\frac{2}{5})\cdot 0,5-\sqrt{1,5625}}\right]-3+2\cdot 2$. **R. 19.**

12. $1,456:\frac{7}{25}+\frac{5}{16}:0,125+\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{5}+\frac{(1-0,1):1\frac{11}{16}}{\left(\sqrt{1,7956}+1\frac{1}{10}:\frac{11}{15}\right):5\frac{13}{40}}$. **R. 10.**

13. $\frac{\left[7,25+11\frac{3}{4}-\left(3,092+9\frac{51}{125}\right)\right]:6\frac{1}{4}}{2\frac{6}{11}\cdot 0,275+0,315:\frac{3}{25}-1,7}\cdot\frac{1}{\sqrt{0,0256}}$. **R. 4.**

14. $$213-32\cdot\left[\frac{\left(15-9\frac{1}{3}\right):3\frac{7}{9}}{\left(19\frac{2}{3}-11\frac{7}{9}\right)\frac{9}{71}}\cdot\left(\sqrt{0,6241}:\frac{1}{4}:0,79+\frac{1}{4}\right)\right].$$ R. 9.

15. $$9+4\left[\frac{(1-0,1)\cdot 1\frac{2}{3}}{0,625+\frac{3}{8}+0,0625:\frac{1}{16}}+\sqrt{4,1616}:\frac{3}{25}\right]-\sqrt{14\frac{1}{16}}+\frac{3}{4}.$$ R. 77.

16. $$10-4\left[\frac{0,0625+\frac{15}{16}+\sqrt{4,1616}-\frac{1}{25}}{(2^3\cdot 3^2\cdot 5^4):(5^3\cdot 3^2\cdot 2^2)\cdot 0,1+\frac{33,(3)}{6^2x2^2}}\right].$$ R. 1.

17. $$\frac{\left[\left(\frac{17}{5}+5\frac{4}{15}\right)\cdot 0,25\cdot\frac{7}{13}-\left(\frac{15}{2}-0,5\right):7\right]\cdot 6}{\left(\sqrt{25,1001}-4\frac{7}{50}\right):0,03}+\left(\frac{\sqrt{28}}{29}\right)^2$$ R. 1.

18. $$\frac{2\frac{3}{20}-1\frac{1}{2}\left(4\frac{1}{6}+\frac{0,003}{0,25}:\frac{0,004}{0,2}-\frac{1}{2}\cdot 9\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\sqrt{1,5625}}{\left(2,625+\frac{3}{8}+0,0625+\frac{15}{16}\right)-\left(0,03125+\frac{31}{32}+1,25+\frac{3}{4}\right)}+\frac{4}{5}.$$ R. 3.

19. $$\frac{\left(\frac{27}{5}-5\frac{4}{15}\right)\cdot 0,25:\frac{1}{19}+\left(\frac{15}{2}-0,5\right):7}{\left(\sqrt{26,4196}-4\frac{7}{50}\right):0,125-6\frac{2}{3}}.$$ R. 1.

20. $$\frac{\left(\frac{7}{15}+\frac{14}{45}+\frac{2}{9}\right)\cdot 10\frac{1}{3}-1\frac{1}{11}\left(2\frac{2}{3}-1\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{4}\right):\frac{3}{28}-1}\cdot 2+\frac{\sqrt{24^2}}{144}.$$ R 30

21. $$\frac{\left(6\frac{5}{9}-3\frac{1}{4}\right)2\frac{2}{17}+40,5\cdot\frac{2}{9}:9}{4:6,25-1:5+\frac{1}{7}\sqrt{3,8416}+0,28}:\sqrt{192}\cdot\sqrt{3}.$$ R. 1.

22. $\dfrac{8-4,7:\left(5-0,8:2\frac{4}{6}\right)+\frac{4}{5}\cdot 1,25}{\left(5\frac{3}{9}-3\frac{3}{4}\right):1\frac{7}{12}+2}\cdot\frac{3}{8}.$ **R.** 1.

23. $50,05-\left(1,5+3\frac{2}{3}\right)\cdot 7\frac{1}{2}:\sqrt{9,9\ 225}\cdot\frac{63}{31}-\left(1-2\frac{1}{5}:7\right)\cdot 1\frac{11}{24}-\frac{1}{20}.$ **R.** 24.

24. $\dfrac{\left(4\frac{3}{10}:3\frac{7}{12}-0,2\right)\cdot 55}{2\frac{7}{12}-0,25\cdot 9\frac{1}{3}\cdot 3\frac{13,75}{6}\cdot\frac{3}{127}}+\dfrac{\sqrt{9,2416}}{2}+14\frac{12}{25}.$ **R.** 40.

25. $\dfrac{\left(5\frac{4}{45}-4\frac{1}{15}\right)\cdot 30}{1\frac{1}{3}}+\dfrac{4\frac{1}{4}:0,85+1:\sqrt{0,25}}{(5,56-\sqrt{16,4836}):3}.$ **R.37**

26. $\dfrac{\frac{10}{2}+13\frac{1}{2}-4\frac{2}{3}\cdot 3\frac{3}{4}+4,8:\frac{6}{25}}{6\frac{3}{7}-1:0,7}\left(\frac{7}{8,9-2,6}:\frac{2}{3}\right):\sqrt{196}\cdot(\sqrt{2})^2.$ **R.** 1.

27. $\dfrac{\left(1\frac{16}{75}+2,46\right):(55,1:5)}{1\frac{2}{3}:1\frac{8}{9}\left(\frac{2}{15}+0,15\right)}+\dfrac{9,72-6\frac{13}{25}}{\sqrt{1\ 640,25}\cdot\frac{2}{9}:9}.$ **R.** $4\frac{8}{15}$.

28. $\dfrac{\left(15-9\frac{1}{3}\right):2\frac{5}{9}}{\left(19\frac{2}{3}-11\frac{7}{9}\right)\frac{9}{71}}\left(\sqrt{0,5\ 041}-\frac{1}{4}\right):\left(0,71+\frac{1}{4}\right).$ **R.** $1\frac{1}{16}$.

29. $2+0,125\cdot\dfrac{5\frac{8}{3}\left(4,2-3\frac{7}{11}+\frac{9}{55}\right)\cdot\frac{3}{23}}{4,8:5\frac{7}{10}\cdot 1\frac{3}{16}-\left(3\frac{1}{7}-2,8\right)\cdot 1\frac{1}{6}}-\sqrt{3\frac{37}{121}}$ **R.** $\frac{1}{3}$.

30. $\dfrac{\left(5{,}225-\frac{5}{9}-3\frac{5}{6}\right)\frac{36}{43}+1{,}3}{\left(2\frac{23}{50}+1\frac{16}{75}\right):(55{,}1:5)-0{,}09+\frac{227}{300}}$. R. 2.

31. $\dfrac{5}{16}:0{,}125+1{,}456:\dfrac{91}{250}+4\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{2{,}652:1{,}3-1\frac{17}{30}+\frac{3}{50}}{\left(\sqrt{1{,}7956}+1\frac{1}{10}:\frac{11}{15}\right):5\frac{13}{40}}$. R. 9.

32. Se dau mulţimile: $A=\left\{\dfrac{\sqrt{275}}{\sqrt{11}};\ \dfrac{\sqrt{153}}{\sqrt{17}};\ 2\right\}$,. $B=\left\{\dfrac{\sqrt{325}}{\sqrt{13}};\ \dfrac{\sqrt{99}}{\sqrt{11}}\right\}$.

a) Să se determine $A\cap B$ şi $A\cup B$. b) Să se determine $A-B$ şi $B-A$. c) Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiilor: $p: B\subset A$; $r: A\sim B$.

R. a) $A\cap B=\{5;\ 3\}$; b) $A\cup B=\{2;\ 3;\ 5\}$;
c) p: adevărată , r: falsă .

33. Să se calculeze expresia:

$$E=\left(\frac{2\frac{1}{3}+3\frac{1}{5}}{1\frac{1}{7}-\frac{3}{5}}+\frac{1}{2}\right):\frac{\left[1\frac{1}{2}+1{,}(7)\right]\cdot\left[2{,}(3)-\frac{1}{2}\right]}{2{,}(3)+\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{1{,}(7)-1}{1{,}(7)+1}+\frac{18}{25}}}{3-(10^2-9^2)\cdot 0{,}(142857)}.$$

R. 21.

34. Se dau expresiile:

$$A=\frac{1+\frac{1}{2}\cdot\left(0{,}5+2\frac{1}{3}\right)+0{,}6:\frac{1}{5}}{2\sqrt{0{,}0121}},\ B=\sqrt{\frac{0{,}01+0{,}001+0{,}0001+1:1\ 000}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right):\left(1-\frac{1}{4}\right)}},\ C=\frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{4^2-3^2+2^2-1^2}.$$

Să se calculeze valoarea lui x din expresia $\dfrac{B}{C}=\dfrac{A}{x}$.

R. $x=\dfrac{15}{0{,}011}$.

35. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiei: $p: M\cap N=M-N=\complement_M N$ unde $M=\{2, 3\}$ şi $N=\{4, 5\}$.

R. falsă.

36. Se dau mulţimile $M=\{x\in N\,|\,2<x<12$ şi $3\,|\,x\}$, $N=\{x\in N\,|\,8<x<14$ şi $9\,|\,x\}$.
Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiei $p: M\cap N=$ soluţia ecuaţiei:

$\dfrac{\sqrt{8\cdot 27}}{\sqrt{6}}x-\dfrac{4x}{9}-5x=5.$

R. $M\cap N=\{9\}$; $x=9$.

37. Se dă egalitatea $\frac{\sqrt{48}}{3}-\frac{x}{4}+\frac{\frac{3x}{4}}{3}=\frac{4}{\sqrt{3}}$ definită pe mulţimea $A=\{x\in N|2<x<8$ şi $2|x\}$. Să se determine soluţia ecuaţiei.

R. identitate.

38. Să se determine x din egalitatea $\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{125}}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}-\frac{3x}{15}=\frac{x}{5}$

R. $x=\frac{40}{3}$.

39. Se dau mulţimile $A=\{3;5;8;2\}$, $B=\{3;5;2;7\}$. Să se arate că $A-B$ este soluţia ecuaţiei: $\frac{(2^3\cdot3^2\cdot5^5):(3^2\cdot5^4\cdot2^4)}{5:2}+\frac{x}{8}=\frac{x}{2}-2$.

R. $A-B=\{8\}$; $x=8$.

40. Se dă egalitatea $\frac{\sqrt{180}}{\sqrt{5}}-\frac{\frac{x}{2}}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{9}=6$. Să se arate că soluţia ecuaţiei aparţine mulţimii $A=\{9;10;12\}$.

R. 9.

41. Să se determine x din egalitatea: $\frac{\sqrt{27}}{9}\cdot\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{4x}{\sqrt{8}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{6}=\frac{x}{3}+1$

R. $x=3$.

42. Se dau mulţimile $A=\{\sqrt{144};\ \sqrt{121};\ \sqrt{169}\}$; $B=\{\sqrt{169};\ \sqrt{225};\ \sqrt{256}\}$.
a) Să se determine $A\cup B$ şi $A\cap B$, elementele mulţimilor fiind numerele rezultate din extragerea rădăcinii pătrate. b) Sînt egale aceste mulţimi ?

R. a) $A\cup B=\{11;12;13;15;16\}$; $A\cap B=\{13\}$; b) $A\neq B$.

43. Suma a două numere este a, raportul lor este $\frac{b}{c}$. In funcţie de mărimile date să se arate care sînt cele două numere.

R. $\frac{ab}{b+c}$; $\frac{ac}{b+c}$.

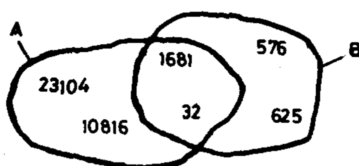


Fig.II.1.

44. Fie mulţimile A şi B ca în figura 2.1: Să se determine $C\cup D$, elementele mulţimilor C şi D fiind numerele naturale obţinute prin extragerea rădăcinii pătrate a numerelor din A şi B.

R. $C\cup D=\{18;24;25;41;104;152\}$.

45. Suma a două numere este $\sqrt{2\ 601}$ raportul lor este $\sqrt{\frac{25}{144}}$. Să se determine cele două numere.

R. 15; 36.

46. Se dă mulţimea $M=\{\sqrt{107,1225};\ \sqrt{309,76};\ \sqrt{2,2201}\}$. In ce caz mulţimea $A=\{a;1;49\}$ este o submulţime a mulţimii M ?

R. Dacă $a=$ 10,35 sau 17,6.

47. Diferența a două numere este $\sqrt{12,3\,201}$ raportul lor este $\frac{2,5}{6,4}$ să se calculeze aceste numere.

R. 5,76; 2,25.

48. Diferența a două numere este b iar raportul lor este $\frac{c}{d}$ unde $d>c$. Să se exprime aceste numere.

R. $\frac{bc}{d-c}$; $\frac{db}{d-c}$.

49. Fie mulțimile:

$$A=\left\{\sqrt{2^2\cdot3^3\cdot5^3};\ \sqrt{3^4\cdot4^2\cdot2^5};\ \sqrt{4^2\cdot5^3\cdot7^2}\right\},\quad B=\left\{\sqrt{\frac{2^3}{5^2}\cdot\frac{3^2}{5^2}\cdot\frac{5^3}{3^2}};\ \sqrt{4^2\cdot5^6\cdot7^4};\ \sqrt{4\cdot27\cdot125}\right\}.$$

a) Să se scrie elementele mulțimilor A și B după extragerea rădăcinilor pătrate.
b) Să se determine Card A+Card B; c) $A\cup B$; $A\cap B$.

R. a) $A=\{30\sqrt{15};\ 144\sqrt{2};\ 140\sqrt{5}\}$; $B=\left\{2\sqrt{\frac{2}{5}};\ 30\sqrt{15};\ 24\,500\right\}$
b) 6; c) $A\cap B=30\sqrt{15}$.

50. Suma a două numere este 432 iar cîtul lor este 8. a) Care sînt cele două numere ? b) In această problemă să considerăm suma S și cîtul rezultat "n". Să se scrie cele două numere prin S și n.

R. a) 384; 48; b) $\frac{S}{n+1}$; $\frac{nS}{n+1}$.

51. Fie mulțimea $A=\left\{\sqrt{1,0816};\frac{\sqrt{5,76}}{1,2};\ \left(\sqrt{4^2}\right)^2;x\right\}$. a) Să se găsească cardinalul lui A. b) Să se alcătuiască o proporție din elementele mulțimii A și să se determine x.

52. Suma a două numere este 65. Dacă împărțim aceste numere (cel mai mare la cel mai mic) obținem cîtul 5 și restul 5. a) Să se determine aceste numere. b) Să se exprime numerele considerînd suma S, cîtul C și restul r. c) Să se determine x din proporția $\frac{\sqrt{6,25}}{\frac{3}{4}}=\frac{x}{\sqrt{2,25}}$.

R. a) 55;10; b) $\frac{SC+r}{C+1}$; $\frac{S-R}{C+1}$, $x=5$.

53. Suma a două numere este 495. Unul din numere se termină cu zero. Dacă acestuia i se taie zeroul se obține cel de–al doilea număr. Care sînt cele două numere ?

54. Fie mulțimile $E=\{x\in N|x<11\}$; $A=\{0;1;2\}$; $B=\{3;4;5\}$; $C=\{6;7;8\}$. a) Să se găsească Card $(A-C_EB)$. b) Să se determine Card $((A-B)\cup(B-C)\cup(C-A))$ și Card $(A\cup B)\cup C$.

R. a) 1; b) 9.

55. Diferența între vîrsta tatălui și a fiului este de 50. Raportul vîrstelor lor este $\frac{3}{8}$. a) Cîți ani are tatăl și cîți ani are fiul ? b) Considerăm diferența vîrstelor "a" ani și raportul vîrstelor lor $\frac{b}{c}$; $b<c$. Să se exprime vîrstele tatălui și fiului.

R. a) 80; 30 ani; b) $\frac{a\cdot b}{c-b}$; $\frac{a\cdot c}{c-b}$.

56. Să se calculeze media proporţională a numerelor $\sqrt{5^2 x 10^2}$ şi $\sqrt{2^2}$

R. 10.

57. Se dau mulţimile $A=\{n \in N | x<10\}$; $B=\{n \in N | 11<x<20\}$.
Să se găsească Card A + Card B.

R. 9+8=17.

58. Lungimea drumului de la Bucureşti la Bacău este de 302 km. Pe o hartă această distanţă are lungimea de 15,1 cm. Care este scara acestei hărţi ?

R. $\frac{1}{2\,000\,000}$.

59. Distanţa de la Bucureşti la Drăgăşani este de 240 km. Cît va măsura această distanţă pe o hartă cu scara $\frac{1}{2\,000\,000}$?

R. 12 cm.

60. Pe o hartă cu scara $\frac{1}{2\,000\,000}$ drumul de la Iaşi la Bucureşti este de 20,4 cm. Care este în realitate această distanţă ?

R. 408 km.

61. In cît timp se poate parcurge cu bicicleta o distanţă care pe hartă este de 32 cm, dacă scara hărţii este de $\frac{1}{50\,000}$ iar viteza biciclistului este de 8 km pe oră ?

R. 2 ore.

62. Se dau mulţimile: $M=\{x \in N \mid 400 < x < 411\}$; $P=\{x \in N \mid 409 < x < 413\}$.
a) Să se scrie mulţimile enumerînd elementele. b) Să se găsească card M + card P.

R. b) 13.

63. Un excursionist care are viteza de 4 km pe oră, trebuie să parcurgă o distanţă care pe harta lui cu scara $\frac{1}{100\,000}$ măsoară 2,4 cm. La ce oră va trebui să pornească la drum, ca să fie la destinaţie la ora 16 ?

R. ora 15 şi 24 minute.

64. Să se calculeze: a) Card $\{0\}$ + Card $\{0\}$; b) $\{$Card $\{0\} \cup$ Card $\{0\}\}$.

R. a) 2; b) 1.

65. La construirea unui zid s–au întrebuinţat 18 400 cărămizi. Cîte cărămizi trebuie pentru construirea unui alt zid, dacă raportul dintre lungimea zidului al doilea şi lungimea primului zid este $\frac{7}{12}$, raportul grosimilor este de $\frac{3}{2}$, iar raportul înălţimilor de $\frac{5}{14}$?

R. 5 750 cărămizi.

66. Se ştie că: Card A=20; Card B=40; Card $(A \cup B)$=50. Sînt disjuncte mulţimile A şi B ?

R. Nu.

Card A=20; Card B=63 şi Card $(A \cup B)$=83. Ce se poate spune despre mulţimile A şi B ?

R. Sînt disjuncte.

67. 5 pompe în 3 ore extrag 1 800 căldări de apă; 4 pompe în 4 ore, cîte căldări de apă extrag ?

R. 1 920.

68. 5 muncitori lucrează 100 de piese în 10 ore. Cîte ore sînt necesare pentru ca trei muncitori să lucreze cu 20% piese mai mult decît cei 5 muncitori ?

R. 20 ore.

69. Pentru încălzirea a patru sobe în $8\frac{1}{2}$ luni s–au întrebuințat 10,88 tone de cărbune. Cîte sobe se pot încălzi cu 9,6 tone de cărbune timp de $2\frac{1}{2}$ luni, norma fiind aceeaşi?

R. 12 sobe.

70. Una din roţile dinţate ale unei maşini face 240 învîrtituri în 3 minute şi are 60 de dinţi. Cîte învîrtituri pe minut va face altă roată care are 48 dinţi şi este prinsă de prima roată ?

R. 100 învîrtituri.

71. Mulţimea A are ca elemente numerele rezultate din scrierea numărului 28, folosind adunarea şi numai cifra 2 de 5 ori. Mulţimea B are ca elemente numerele rezultate din scrierea lui 120 folosind tot adunarea şi cifra 8 de 6 ori. Să se scrie $A \cup B$ şi $A \cap B$.

R. $A=\{2;22\}$; $B=\{8;88\}$; $A\cup B=\{22;2;88;8\}$; $A\cap B=\emptyset$.

72. Două dactilografe au primit pentru lucrarea efectuată o sumă oarecare de bani pe care trebuie s–o împartă între ele în raportul 4:1; astfel prima dactilografă efectuînd o parte mai mare a obţinut cu 105 lei mai mult decît a doua. Ce sumă au încasat ele pentru toată lucrarea ?

R. 140+35=175 lei.

73. O sumă de bani a fost împărţită la trei persoane. Să se afle ce sumă a luat fiecare, ştiind că sumele primite sînt proporţionale cu 5, 8, 3 şi că prima a primit cu 200 de lei mai mult decît a treia.

R. 500 lei; 800 lei; 300 lei.

74. Fie mulţimea $A=\{n\in N | n<4\}$. Să se scrie mulţimea: $B=\{(a;b) | a\in A$; şi $b\in A$; $a+b\in C\}$ unde mulţimea $C=\{x\in N | x<3\}$.

R. $A=\{0;1;2;3\}$; $B=\{(0;1);(0;2);(1;0);(2;0)\}$; $C=\{0;1;2\}$

75. Laturile unui triunghi ABC sînt de 3 cm, 4 cm, 5 cm, ele sînt proporţionale cu ale altui triunghi $A'B'C'$ ce are perimetrul de 24 cm. Să se calculeze aria $\Delta A'B'C'$.

R. 24 cm^2.

76. Să se scrie egalităţile următoare sub formă de proporţii: $a^2=bc$; $(x+y)(x+y)=m^2$; $(a-b)m=(a+b)n$; $(m \cdot n) \cdot k=(m+n)^2$. Prin mutarea termenilor, să se formeze din proporţiile date proporţii noi.

77. Să se extragă pe cale grafică rădăcina pătrată din numărul 35 şi apoi să se verifice prin calcul rezultatul obţinut.

Indicaţie. Se ţine seama că $35=5 \cdot 7$. Se va lua o unitate de măsură după voie, de exemplu centimetrul, se va construi media proporţională între 5 cm şi 7 cm, apoi se va măsura segmentul obţinut.

78. Sporurile încasate de trei muncitori pentru orele de noapte efectuate într–o lună

sînt proporționale cu 0,75; $\frac{2}{3}$; $1\frac{1}{15}$. Cît a încasat fiecare, dacă primul a încasat cu 25 lei mai mult decît al doilea ?

R. { 225; 200; 320 }.

79. Se dau multimile $A=\{0;3\}$; $B=\{4;5;6\}$. a) Să se scrie mulțimea $P=A\cup B$. b) Cît este cardinal de P ?

R. Card $P=5$.

80. Intr–un triunghi ABC unghiul A este egal cu suma unghiurilor B şi C. Să se afle fiecare unghi al triunghiului ştiind că raportul dintre unghiurile B şi C este $\frac{2}{2,5}$ şi cît la sută reprezintă unghiul cel mai mare față de cel mai mic ?

R. 90^o; 40^o; 50^o; 225%.

81. Raportul a două numere este $\frac{a}{b}$, iar diferența lor este c. Să se afle numerele dacă $a>b$; $c>0$.

R. $\frac{ac}{a-b}$; $\frac{bc}{a-b}$.

82. Se dau mulțimile: $M=\{5;6;7;10\}$; $S=\{5;8;7\}$. Să se determine $A=M\cap S$.

R. {5;7}.

83. Să se verifice că dacă aria unui dreptunghi este constantă şi mărim baza "a" de o sută de ori, înălțimea "h" a dreptunghiului se micşorează de acelaşi număr de ori.

84. Trei muncitori prelucrează 1 134 piese în 6 zile lucrînd fiecare respectiv 6, 7, 8 ore zilnic. Cîți muncitori vor prelucra 1 620 piese în patru zile lucrînd fiecare cîte 6 ore zilnic, dacă viteza de prelucrare se măreşte de 1,5 ori față de primul caz şi dacă între muncitori nu sînt deosebiri de îndemînare ?

R. 5 muncitori.

85. Să se împartă numărul 1 080 în două părți astfel încît 5% din prima parte să fie egal cu 4% din a doua parte.

R. 480; 600.

86. Suma a două numere este $285\frac{3}{4}$; primul număr reprezintă 14,3% din cel de–al doilea. Să se găsească aceste numere.

R. 35; 75; 250.

87. In trei clase dintr–o şcoală elementară sînt 192 elevi. Numărul elevilor din cl. a II–a reprezintă $16\frac{2}{3}$% din numărul total al elevilor, numărul elevilor din cl. a III–a reprezintă 125% din numărul elevilor din cl. a II–a. Cîți elevi sînt în cl. a II–a şi a III–a luate împreună?

R. 72 elevi.

88. Fonta conține 3,5% carbon, 1,5% siliciu, 1% mangan, $\frac{2}{5}$% fosfor, şi 0,01% sulf. Să se determine cantitatea în kg a acestor elemente dintr–o tonă de fontă.

R. 35 kg; 15 kg; 10 kg; 4 kg; 0,1 kg.

89. Intr–un manej sînt 12 cai. Intr–o zi au venit la antrenament 12 călăreți amatori. a) Să se stabilească corespondența ce se poate exprima între cele două mulțimi (cai şi călăreți). b) Să se reprezinte această corespondență printr–un desen.

90. Există $x \in N$ pentru ca $x+1 \leq 3$? Care sînt aceste numere ?

R. $x = \{0;1;2\}$.

91. Ciupercile proaspete conțin 90% apă iar cele uscate 12% apă. Ce cantitate de ciuperci uscate se pot obține din 10 kg de ciuperci proaspete ?

R. ≈1,14 kg.

92. La scriere numărului 4 056 s–a omis cifra 0. Să se afle: a) eroarea absolută; b) eroarea relativă (cu aproximatie de 0,1%); c) cîte procente reprezintă numărul dat, față de numărul scris greșit (cel nou); d) cu cîte procente este mai mic numărul cel nou, decît numărul dat.

R. a) 3 600; b) 88,8%; c) 889,5%; d) 88,8%.

93. Să se arate că dacă avem mulțimile: $M=\{1;5;9;13\}$; $P=\{x \in N | x=4n-3,\ n \in N,\ n \leq 5\}$, atunci Card $M <$ Card P.

R. $P=\{1;5;9;13;17\}$. Card $M=4$; Card $P=5$; $4<5$.

94. Un atelier poate să execute o comandă în 4 zile; un alt atelier, în 3 zile. Executînd împreună lucrarea, amîndouă atelierele au efectuat–o în $1\frac{1}{2}$ zile, fiecare atelier executînd $\frac{1}{2}$ din lucrare. In care ateliere s–a mărit productivitatea muncii, și de cîte ori ?

Soluția I–a. Primul atelier putea efectua într–o zi $\frac{1}{4}$ din lucrare, al doilea $\frac{1}{3}$. Lucrînd $1\frac{1}{2}$ zile, primul atelier ar fi făcut $1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$ din lucrare. Problema spune că a efectuat $\frac{1}{2}$ din lucrare, deci mai mult decît $\frac{3}{8}$; rezultă că primul atelier și–a mărit productivitate muncii de $\frac{1}{2} : \frac{3}{8} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ ori. Al doilea atelier, lucrînd $1\frac{1}{2}$ zile, face $1\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ din lucrare fără a–și mări productivitatea muncii.

Soluția II–a. Primul atelier executînd $\frac{1}{2}$ din lucrare în $1\frac{1}{2}$ zile, înseamnă că ar fi putut termina toată lucrarea în trei zile, în loc de 4 zile, deci că face $\frac{1}{3}$ din lucrare pe zi, în loc de $\frac{1}{4}$. Deci, productivitatea s–a mărit de $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$ ori. Al doilea atelier, efectuînd $\frac{1}{2}$ din lucrare în $1\frac{1}{2}$ zile, urmează că toată lucrarea a fost terminată în 3 zile (nu și–a mărit productivitatea).

95. Pentru o instalație s–a întrebuințat un sul de sîrmă în felul următor: în prima zi s–a întrebuințat $\frac{1}{3}$ din sîrmă și încă 90 m; în a doua zi s–a întrebuințat $\frac{1}{3}$ din rest și încă 60 m; în a treia zi s–a întrebuințat $\frac{1}{3}$ din noul rest plus 20 m; în a patra zi s–au întrebuințat 40 m rămași. a) Cîți metri de sîrmă avea sulul ? b) Fie M și N mulțimile a căror elemente sînt factorii primi ai numerelor ce reprezintă lungimea totală a sîrmei respective și lungimea unei treimi din ea. Să se determine $M \cup N$ și $M \cap N$. c) Să se prezinte graficul $M \cap N$.

Indicație. Utilizăm metoda mersului invers, adică pornim cu raționamentul de la finele problemei.

R. 472,5 m.

96. Un grup de băieţi s–au dus la rîu să se scalde. 8 dintre ei au trecut înot pe celălalt mal al rîului, apoi au mai trecut jumătate din cei rămaşi şi atunci pe malul celălalt au fost de două ori mai mulţi băieţi decît cei ramaşi. Cîţi băieţi s–au dus să se scalde?

Indicaţie. Considerăm situaţia după ce au trecut pe cel de–al doilea mal 8 băieţi şi încă un grup ce reprezintă $\frac{1}{2}$ din cei rămaşi pe mal. Grupul de băieţi de pe acest mal reprezintă un număr de 2 ori mai mare decît acela al băieţilor rămaşi pe primul mal. Aşadar avem pe ambele maluri trei grupe egale de cîte 8 băieţi fiecare, de unde rezultă că în total sînt 24 băieţi.

R. 24 băieţi.

97. Intr–o sală de festivităţi a unei şcoli se pun bănci. Dacă în fiecare bancă s–ar aşeza cîte 5 elevi, ar mai trebui 8 bănci, dar dacă în fiecare bancă s–ar aşeza cîte 6 elevi, ar ramîne goale două bănci. a) Cîte bănci erau în sală ?

Indicaţie. Rămîn $8 \cdot 5=40$ de elevi fără bănci; cei 40 elevi completează $40:1=40$ de bănci. Dar mai rămîn încă 2 bănci libere adică cei $2 \cdot 5=10$ elevi, din aceste bănci, vor trebui să se aşeze cîte unul în băncile care au numai cîte 5 elevi. Astfel vor completa încă 10 bănci, pe lîngă cele 40; mai sînt 2 bănci libere.

R. 52 bănci.

98. Cu aceeaşi sumă de bani doi elevi au cumpărat caiete. Primul a cumpărat cu 5,60 lei bucata şi i–au rămas 4 lei, cel de–al doilea a cumpărat cu 4,80 lei bucata şi i–au rămas 2,40 lei. Ştiind că primul elev a cumpărat cu 2 caiete mai puţin decît al doilea, să se afle ce sumă a avut fiecare şi cîte caiete s–au cumpărat.

Indicaţie. Dacă şi cel de–al doilea elev ar fi cumpărat acelaşi număr de caiete (cu 2 mai puţin), i–ar fi rămas: $2x4,80+2,40=12$ lei, adică i–ar fi rămas in plus faţă de primul elev: $12-4=8$ lei. Această diferenţă provine din faptul că l–a costat un caiet $5,60-4,80=0,80$ lei mai puţin.

R. 60 lei; 10 caiete; 12 caiete.

99. O asociaţie de viticultori trebuie să altoiască cîte 50 butuci de vie zilnic. Asociaţia a altoit în fiecare zi cîte 56 butuci şi a terminat lucrarea cu 3 zile înainte de termen, depăşind planul cu 120 de butuci altoiţi. Să se afle cîţi butuci de vie trebuia să altoiască după plan ?

Indicaţie. Lucrînd cîte 56 butuci pe zi, în 3 zile se realizează 168 butuci. S–ar fi depăşit deci planul în total cu $120+168=288$ de butuci. Această depăşire provine din depăşirea zilnică cu 6 butuci de vie.

R. 2 400.

100. O cooperativă de producţie trebuia să semene conform planului cîte 40 ha pe zi. Depăşind norma, se lucrează în 3 zile 156 ha. Lucrînd în acelaşi ritm, termină semănatul cu 2 zile înainte de termen şi realizează cu 4 ha mai mult decît era prevăzut în plan. a) Cîte hectare a semănat ? b) Fie H mulţimea ale cărei elemente sînt cifrele scrise în ordinea crescătoare a numărului ce reprezintă totalul de hectare semănate şi D mulţimea ale cărei elemente sînt cifrele scrise în ordine descrescătoare a aceluiaşi număr. Să se determine $H \cup D$; $H \cap D$.

Indicaţie. Dacă s–a r fi lucrat întreg numărul de zile prevăzute în plan, planul ar fi fost depăsit cu încă

104 ha, deci în total s–ar fi obţinut 108 ha depăşite. Depăşirea zilnică fiind de 12 ha, depăşirea totală s–ar fi obţinut în 9 zile.

R. a) 364 ha; b) $H=\{3;4;6\}$; $D=\{6;4;3\}$; $H \cup D = H \cap D = \{3;4;6\}$.

101. C.m.m.d.c. a două numere este 2. C.m.m.m.c. al acestor numere este 60. Să se găsească aceste numere, ştiind că raportul lor este $\frac{5}{6}$.

R. 10; 12.

102. Un elev are o sumă de bani. Dacă dă fratelui lui un leu îi mai rămîne pe jumătate cît are acum fratele lui, dacă însă fratele lui îi dă un leu, atunci ei vor avea sume egale. Cîţi lei are fiecare (soluţie aritmetică) ?

R. 5 lei şi 7 lei.

GEOMETRIE

II.8. UNGHIURI

1. Să se facă următoarele calcule cu grade, minute şi secunde.

a) $35^{o}43'28''+46^{o}32'43''-15^{o}27'8''$,

b) $24^{o}85'72''+86^{o}320'245''+1^{o}320''$,

c) $85^{o}12'46''-24^{o}37'32''$, d) $120^{o}-85^{o}26'38''$,

e) $84^{o}98'305''-24^{o}350'430''$, f) $(28^{o}18'27'')\cdot 4$,

g) $(57^{o}23'15''):5$, h) $(16^{o}342'84''+8^{o}316'94'')\cdot 4:3$.

2. Să se afle în grade, minute şi secunde complementele unghiurilor de 45^{o}; 32^{o}; 18^{o}; $84'72''$; $31^{o}94''102''$.

3. Raportul măsurilor a două unghiuri complementare este $\frac{2}{7}$. Să se determine măsurile acestor unghiuri.

R. 20^{o}; 70^{o}.

4. Să se construiască două unghiuri adiacente, a căror sumă să fie egală cu 126^{o} şi unul din unghiuri să fie $\frac{1}{2}$ din celălalt.

R. 84^{o}; 42^{o}.

5. Două drepte D şi Δ sînt concurente în punctul A. Să se scrie această relaţie.

R. $\Delta \cap D=\{A\}$.

6. Să se calculeze măsura unghiului care reprezintă $\frac{3}{5}$ din măsura unghiului la centrul unui cerc care cuprinde între laturile lui un arc egal cu a 8–a parte din cerc. (Unghiul de la centrul unui cerc se măsoară prin arcul cuprins între laturile sale.)

R. 27^{o}.

7. Două unghiuri adiacente au unul $27^{o}38'23''$ şi celălalt 152^{o}. Să se spună dacă laturile necomune sînt în prelungire.

8. Să se demonstreze că bisectoarele a două unghiuri opuse la vîrf sînt în prelungire.

9. Două unghiuri sînt suplementare, unul dintre ele este 2/7 din suplementul său. Unghiul cel mai mare se împarte în alte trei unghiuri A,B,C astfel $m(\sphericalangle B) > m(\sphericalangle A)$ cu 40^o, $m(\sphericalangle C)=\frac{m(\sphericalangle A)}{3}$ plus 30^o. Să se calculeze măsurile unghiurilor A,B,C (soluţie aritmetică).

R. $m(\sphericalangle A)=30^o$; $m(\sphericalangle B)=70^o$; $m(\sphericalangle C)=40^o$..

10. Să se arate că unghiul format de bisectoarea AO a unui unghi BAC cu o dreaptă oarecare AD dusă prin vîrful unghiului în afară de unghi este egală cu semisuma unghiurilor, pe care această dreaptă le face cu fiecare dreaptă din laturile unghiului.

11. Un unghi este de 7 ori mai mare decît suplementul său. Să se afle măsurile acestor unghiuri.

R. $22^o30'$; $157^o30'$.

12. Un unghi este 2/7 din complementul său. Să se calculeze măsura unghiului format de jumătatea unghiului celui mai mare şi unghiul cel mai mic.

R. 55^o.

13. Mediana dusă din unul din unghiurile egale ale unui triunghi isoscel împarte perimetrul lui în două părţi de 15 cm şi 6 cm. Să se calculeze baza triunghiului isoscel.

R. 1 cm.

14. Un unghi este 7/8 din suplimentul său. Să se arate că 2/3 din unghiul cel mai mare este cu un grad mai mare decît 3/4 din unghiul cel mai mic.

15. Să se demonstreze că dacă suma măsurilor a 3 unghiuri este egală cu 90^o atunci suma măsurilor complementelor lor este egală cu 180^o.

Indicaţie. $90^o-a+90^o-b+90^o-c=270^o-90^o=180^o$.

Să se facă această demonstraţie prin construirea unghiurilor respective fără calcul. Să se generalizeze considerînd în loc de trei unghiuri, n unghiuri.

16. Să se demonstreze că două unghiuri care au acelaşi vîrf şi laturile două cîte două perpendiculare sînt: sau congruente sau suplementare.

Indicaţie. Dacă unghiurile sînt amîndouă ascuţite sau amîndouă obtuze ele sînt congruente; cînd unul este obtuz şi celălalt ascuţit ele sînt suplementare.

17. Să se demonstreze că unghiul format de bisectoarele a două unghiuri adiacente are măsura egală cu semisuma măsurilor celor două unghiuri.

18. In jurul unui punct sînt patru unghiuri consecutive AOB, BOC, COD, DOA, astfel că al doilea este dublul primului şi încă 20^o, al treilea este cu 10^o mai puţin decît întreitul primului, iar al patrulea este de patru ori mai mare decît primul şi încă 30^o. Cîte grade are fiecare unghi ?

R. 32^o; 84^o; 86^o; 158^o.

19. Se dă unghiul AOB; să se construiască unghiul COD care să fie suplementul primului unghi şi să aibă aceeaşi bisectoare cu el.

Indicaţie. Se duc semidrepte perpendiculare în O pe OA şi OB.

20. Fie OC bisectoarea unghiului AOB, iar OM o dreaptă oarecare. Să se arate că

m($\sphericalangle COM$) este semidiferenţa sau semisuma măsurilor unghiurilor *AOM* şi *BOM* după cum *OM* este interioară sau exterioară unghiului *AOB*.

Indicaţie. m($\sphericalangle AOM$)$=a$; m($\sphericalangle MOB$)$=b$; m($\sphericalangle COM$)$=c$, avem $a-c=b+c$.

21. Se dă unghiul *AOB*, se duc prin *O* semidreptele *OA'* şi *OB'* astfel ca *OB* să fie bisectoarea unghiului *AOA'* iar *OA* să fie bisectoarea unghiului *BOB'*. Cum trebuie să fie unghiul *AOB* pentru ca semidreptele *OA'; OB' să fie sau în prelungire sau perpendiculare ?*

Indicaţie. m($\sphericalangle A'OB'$)$=3$m($\sphericalangle AOB$)$\rightarrow$m($\sphericalangle AOB$) este de 60^o sau 30^o.

II.9.TRIUNGHIURI

22. Să se demonstreze că dacă ducem o perpendiculară pe bisectoarea unui unghi, ea formează cu laturile unghiului un triunghi isoscel.

Indicaţie. (Se vor observa două triunghiuri congruente.)

23. Să se demonstreze că medianele duse din extremităţile bazei unui triunghi isoscel sînt congruente. Aceeaşi proprietate, să se demonstreze şi pentru bisectoarele şi înălţimile duse din aceleaşi extremităţi.

24. Pe laturile triunghiului echilateral *ABC*, se iau, în acelaşi sens, lungimile egale *AM*, *BN*, *CP*; să se arate că triunghiul *MNP* este şi el echilateral.

25. Pe o latură a unui unghi *xOy* se iau două lungimi oarecare *OA* şi *OB*, $A\in OX$ şi $B\in OX$, iar pe cealaltă latură se iau lungimile $OC=OA$ şi $OD=OB$; $AD\cap BC=\{M\}$. Să se demonstreze că *OM* este bisectoarea unghiului *xOy*.

26. Să se demonstreze că în două triunghiuri congruente segmentele determinate de înălţimile sau bisectoarele corespunzătoare unghiurilor congruente pe laturile opuse sînt congruente.

27. Să se demonstreze că distanţele a două din vîrfurile unui triunghi la mediana ce corespunde vîrfului al treilea sînt congruente.

28. Să se arate că dacă într–un triunghi dreptunghic o catetă este egală cu jumătate din ipotenuză , atunci unghiul opus acelei catete este de 30^o.

29. Se prelungesc în acelaşi sens laturile *BC*, *CA*, *AB* ale unui triunghi echilateral *ABC* cu lungimile $CA'=AB'=BC'$. Să se demonstreze că $\Delta A'B'C'$ este şi el echilateral.

30. Fie unghiul *xOy* şi *OP* bisectoarea unghiului. Punctul $M\in OP$. Se duc perpendicularele *MA* şi *MB* pe *Ox* şi *Oy*; $MB\cap Ox=\{B'\}$; $MA\cap Oy=\{A'\}$. a) Să se arate că *MA'B'* este un triunghi isoscel. b) $OM\cap A'B'=\{N\}$. Să se arate că *ON* este bisectoarea unghiului *A'MB'*.

31. In triunghiul isoscel ABC, $[AB]\equiv[AC]$, se duc înălţimile BB' şi CC'. Să se arate că $\Delta\ AB'C'$ este isoscel. Să se arate că şi în cazul cînd BB' şi CC' sînt bisectoare, $\Delta\ AB'C'$ este isoscel.

32. Să se demonstreze că dacă două triunghiuri sînt simetrice faţă de o axă atunci şi medianele şi înălţimile celor două triunghiuri sînt simetrice faţă de acea axă.

33. Se dă Δ isoscel ABC, $[AB]\equiv[AC]$; AD înălţime; $N\in AD$. Fie N' şi N'' simetrice lui N faţă de AB şi AC. Să se arate că $\Delta\ AN'N''$ este isoscel. Ce fel de patrulater este $AN'NN''$?

34. Se dă $\Delta\ ABC$ dreptunghic în A. Fie $M\in BC$; M' şi M'' simetrice lui M faţă de catetele AB şi AC. Să se arate că $\Delta\ MM'M''$ este dreptunghic şi că M', A, M'' sînt puncte coliniare.

35. Să se demonstreze că o mediană a unui triunghi este mai mică decît semisuma laturilor care pornesc din acelaşi vîrf.

Indicaţie. Fie media AD în $\Delta\ ABC$; se construieşte simetricul punctului A faţă de punctul D.

36. Să se demonstreze că suma medianelor unui triunghi este mai mică decît perimetrul triunghiului.

Indicaţie. Se foloseşte indicaţia din problema precedentă, pentru fiecare mediană.

37. Pe latura BC a triunghiului ABC se ia un punct oarecare D. Să se demonstreze că AD este mai mică decît semiperimetrul triunghiului ABC dar mai mare decît diferenţa dintre semiperimetrul acestui triunghi, şi latura BC.

Indicaţie. $AD<AB+AC$ şi $AD>AC-AB$.

38. Fie un patrulater $ABCD$ în care ştim că AD este latura cea mai mare iar BC latura cea mai mică. Să se arate că $m(\sphericalangle B)>m(\sphericalangle D)$.

39. Se dă $\Delta\ ABC$ în care $AC>AB$. Să se demonstreze că cel mai mare dintre unghiurile făcute de mediana AD cu latura BC este acela care se opune la latura cea mai mare dintre laturile AC şi AB.

Indicaţie. Se consideră triunghiurile ABC şi ADC sau se foloseşte înălţimea dusă din A.

II.10. LINII IMPORTANTE IN TRIUNGHI

40. Fie triunghiul echilateral ABC şi AD înălţimea ($D\in BC$). Mediana dusă din D intersectează pe AC în M. Să se arate că: 1) $DM=DC=\frac{AC}{2}$; 2) $\Delta\ ADM$ este isoscel.

Indicaţie. Fie D' simetricul punctului D în raport cu punctul M. Patrulaterul format $ADCN$ este dreptunghi.

Observaţie. Intr-un triunghi dreptunghic cateta opusă unghiului de 30^{o} şi mediana dusă din unghiul drept pe ipotenuză sînt congruente şi egale fiecare cu jumătate din ipotenuză.

41. Bisectoarele unghiurilor consecutive A şi B ale paralelogramului $ABCD$ se intersectează în $N(N \in CD)$. Fie NM mediana triunghiului ANB.

1) Să se arate că $AMND$ este paralelogram.

2) Triunghiul AMN este isoscel.

42. Se dă triunghiul dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A)=90^{\circ}$, în care AD este înălţime $(D \in BC)$. Fie M şi N mijloacele catetelor AB şi AC şi $MN \cap AD=\{O\}$. Să se arate că:
1) $\Delta\ AMD$ isoscel; 2) $AO \perp MN$.

43. Să se arate că într–un triunghi oarecare ABC mediana AD este egal depărtată de B şi C.

Indicaţie. Din B şi C se duc perpendiculare pe AD. Se vor observa triunghiurile formate.

44. O mediană într–un triunghi este mai mică decît semisuma laturilor adiacente.

Indicaţie. Se prelungeşte mediana cu o lungime egală cu ea şi se va observa triunghiul în care o latură este îndoitul medianei.

45. In două triunghiuri congruente medianele, bisectoarele şi înălţimile corespunzătoare la două laturi omoloage sînt congruente.

46. Intre două sate A şi B trece o şosea S. Unde trebuie construită pe şosea o staţie de autobuz ca să fie la egală depărtare de ambele sate ?

R. La intersecţia mediatoarei segmentului AB cu şoseaua.

47. Două şosele Ox şi Oy sînt aşezate astfel $xO \cap yO=\{O\}$. Pe şoseaua xO se află o combină de treierat A, iar pe şoseaua yO o combină B. Unde trebuie aşezat un stîlp cu lumină ca să fie egal depărtat de cele două combine şi egal depărtat de cele două şosele ?

Indicaţie. Se vor folosi proprietăţile bisectoarei şi a mediatoarei.

48. Unde trebuie să se construiască o fîntînă F între două şosele paralele Δ şi Δ' pentru ca să fie egal depărtată de două sate A şi B în cazul cînd $A \in \Delta$ şi $B \in \Delta'$ sau $(A$ şi $B) \in \Delta$ sau $(A$ şi $B) \in \Delta'$?

49. Să se determine un punct egal depărtat de trei puncte date ce nu sînt situate pe aceeaşi linie dreaptă.

50. Se dă triunghiul dreptunghic ABC $m(\sphericalangle A)=90^{\circ}$ şi $m(\sphericalangle B)=60^{\circ}$. Să se afle: 1) unde trebuie să luăm un punct N pe ipotenuza BC astfel ca triunghiul ABN să fie echilateral; 2) unde trebuie să luăm un punct M pe cateta AC ca triunghiul ANM să fie isoscel; 3) AD fiind înălţimea $(D \in BC)$ să se arate că $m(\sphericalangle DAN)=\dfrac{m(\sphericalangle A)}{3}$.

Indicaţie. AN mediană, BM bisectoare şi NM mediatoarea segmentului BC. Se studiază triunghiurile ABM; BMN şi AMN.

51. Fie dreapta AB şi două puncte C şi D de aceeaşi parte a ei. Să se afle punctul P pe dreapta AB aşa fel încît $CP+PD$ să fie minimă.

Indicaţie. Fie C' simetricul punctului C faţă de AB; $AB \cap CC'=\{I\}$, IP este mediatoarea segmentului CC'.

52. In Δ *MNP*, înălţimea $MA=\frac{NP}{2}$. Să se arate că unghiul *M* este ascuţit. In ce caz acest unghi poate fi drept?

53. Fie *O* mijlocul segmentului *BC*. Se duce semidreapta *Ox* şi se ia pe această semidreaptă un punct *A*. Să se arate că dacă $OA=\frac{BC}{2}$ atunci $\sphericalangle BAC$ este drept.

54. Să se arate că pe un cerc punctul cel mai apropiat şi punctul cel mai depărtat de un punct dat *A* sînt extremităţile diametrului ce trece prin *A*. (*A* situat în interiorul sau exteriorul cercului.)

55. La un cerc dat să se ducă o tangentă perpendiculară pe o dreaptă dată.

56. La un cerc dat să se ducă o tangentă care să facă cu o dreaptă dată un unghi dat α.

57. Fiind date trei puncte *A*, *B*, *O* să se afle o dreaptă ce trece prin *O* şi este egal depărtată de punctele *A* şi *B*.

58. Se dă tiunghiul *ABC* în care $m(\sphericalangle B)-m(\sphericalangle C)=90^{\circ}$. Fie *AD* bisectoarea unghiului $A(D\in BC)$. Să se arate că $m(\sphericalangle ADC)-m(\sphericalangle ADB)=90^{\circ}$.

59. Intr–un triunghi *ABC* unghiul exterior *B* este cu 140° mai mare decît unghiul *C* şi cu $\frac{2}{9}$ dr. mai mare decît unghiul *A*. Să se arate că triunghiul *ABC* este isoscel.

60. Fie triunghiul *ABC* şi *D* un punct în interiorul triunghiului astfel că $m(\sphericalangle ABD)=\frac{m(\sphericalangle A)}{2}$ şi $m(\sphericalangle ACD)=\frac{m(\sphericalangle A)}{3}$. Să se arate că $\frac{m(\sphericalangle BAC)}{m(\sphericalangle BDC)}=\frac{6}{11}$.

61. Fie triunghiul *ABC* şi *AM* bisectoarea interioară a unghiului $A(M\in BC)$. Prin punctul *B* se duce o paralelă la *AM* care intersectează pe *AC* în *D*. Să se arate că:

1) $m(\sphericalangle ADB)=\frac{m(\sphericalangle BAC)}{2}$; 2) Δ *ADB* este isoscel.

62. Fie *N* un punct în interiorul triunghiului *ABC*. Să se arate că $m(\sphericalangle BNC)>m(\sphericalangle BAC)$.

63. Pe laturile *AB* şi *CA* ale triunghiului echilateral *ABC* se iau punctele *C'* şi *B'* astfel ça $[AC']\equiv[CB']$; $CC'\cap BB'=\{M\}$. Să se arate că $m(\sphericalangle BMC)=120^{\circ}$.

Indicaţie. Triunghiul $BB'C\equiv\Delta AC'C$; $m(\sphericalangle BMC)=m(\sphericalangle BB'C)+m(\sphericalangle B'CC')=m(\sphericalangle AC'C)+$ $+m(\sphericalangle ACC')=180^{\circ}-60^{\circ}=120^{\circ}$.

64. Fie punctul *D* pe baza *BC* a unui triunghi isoscel *ABC*. Să se arate că diferenţa măsurilor unghiurilor formate de *AD* cu *BC* este egală cu diferenţa măsurilor unghiurilor formate de *AD* cu laturile congruente.

65. Fie *A'*, *B'*, *C'* picioarele bisectoarelor interioare ale unghiurilor *A*, *B*, *C* ale triunghiului *ABC*. Să se arate că $m(\sphericalangle AA'C)+m(\sphericalangle BB'A)+m(\sphericalangle CC'B)=270^{\circ}$.

Indicaţie. $m(\sphericalangle AA'C)=\frac{m(\sphericalangle A)}{2}+m(\sphericalangle B)$; $m(\sphericalangle AB'B)=\frac{m(\sphericalangle B)}{2}+m(\sphericalangle C)$; $m(\sphericalangle CC'B)=\frac{m(\sphericalangle C)}{2}+m(\sphericalangle A)$.

II.11. CONGRUENŢA TRIUNGHIURILOR

66. Să se demonstreze că două triunghiuri isoscele care au bazele congruente şi înălţimile ce cad pe ele congruente sînt congruente.

67. Să se arate că două triunghiuri isoscele sînt congruente dacă au unghiurile de la vîrf congruente şi înălţimile ce cad pe baze congruente.

68. Să se demonstreze că două triunghiuri isoscele sînt congruente dacă au bazele congruente şi înălţimile corespunzătoare congruente.

69. Se dă triunghiul isoscel ABC, $[AB]\equiv[BC]$, se prelungesc BA şi CA cu segmentele $[AA']\equiv[AB']$; $BB'\cap CA'=\{N\}$. Să se arate că triunghiul NBC este isoscel.

70. Măsura unghiului exterior unui triunghi este mai mare decît măsura fiecărui unghi interior al triunghiului nealăturat lui.

Indicaţie. Fie triunghiul ABC şi C unghiul exterior. Se duce mediana din $\sphericalangle B$ pe latura AC şi se prelungeşte cu un segment egal cu ea.

71. Fie M şi N mijloacele laturilor AB şi AC ale unui triunghi ABC. Să se arate că $MN=BC/2$.

Indicaţie. Simetricul punctului M în raport cu N este un alt punct M'. Se cercetează triunghiurile AMN şi NCM' şi patrulaterul $MM'CB$.

72. In triunghiul isoscel ABC, $[AB]\equiv[AC]$, se prelungeşte baza de o parte şi alta cu segmentele $[BM]\equiv[CN]$. Fie AI mediana ($I\in BC$). Să se arate că $m(\sphericalangle MAI)=m(\sphericalangle NAI)$.

73. Intr-un triunghi isoscel ABC, $[AB]\equiv[AC]$, se duc înălţimile CN şi BM ($N\in AB$; $M\in AC$). Fie B' şi C' simetricele lui B şi C în raport cu M şi N. Să se arate că:
1) $[BC']\equiv[CB']$; 2) $\Delta AB'C'$ este isoscel; 3) Să se determine $m(\sphericalangle B'AC')$ ştiind că $m(\sphericalangle BAC)= =42^\circ33'12''$.

R. 3) $127^\circ39'36''$.

74. Pe baza BC a triunghiului isoscel ABC se construieşte pătratul $BCC'B'$, $AB'\cap BC=\{M\}$ şi $AC'\cap BC=\{N\}$. Să se arate că $[B'N]\equiv[C'M]$.

75. In triunghiul isoscel ABC, $[AB]\equiv[AC]$, fie ND mediatoarea laturii $AB (D\in AC)$ şi BD bisectoarea unghiului B. Să se arate că $m(\sphericalangle BAC)=\dfrac{m(\sphericalangle B)+m(\sphericalangle C)}{4}=36^\circ$.

76. In triunghiul echilateral ABC simetricul punctului B faţă de AC este B'. Pe AB' se construieşte pătratul $AB'C'A'$. Să se arate că triunghiul ABA' este isoscel.

77. Pe laturile pătratului $ABCD$ se iau segmente congruente în acelaşi sens. Să se arate că patrulaterul obţinut $A'B'C'D'$ este tot un pătrat.

78. In interiorul unui hexagon regulat $ABCDEF$ (cu toate laturile şi unghiurile congruente) se unesc vîrfurile din două în două. 1) Să se arate că ΔAEC este echilateral.

2) Să se calculeze unghiurile triunghiului ABF. 3) Să se determine un punct în interiorul triunghiului BFD care împarte hexagonul în şase triunghiuri congruente.
4) Să se arate că aria Δ BFD= aria $\frac{ABCDEF}{2}$.

79. Fie AD bisectoarea unghiului $A(D \in BC)$ iar simetricele punctului D faţă de AC şi AB, sînt respectiv M şi N. Să se arate că $[DM] \equiv [DN]$.

80. Se dă triunghiul ABC în care $m(\sphericalangle B)=60^{\circ}$ iar $m(\sphericalangle C)=30^{\circ}$. Bisectoarea interioară a unghiului B intersectează pe AC în D. Din punctul D se duce perpendiculara DM pe $BC(M \in BC)$. Prelungirea lui MD intersectează pe AB în N. Să se arate că triunghiul BNC este echilateral.

81. De o parte şi de alta a unui segment AB se construiesc unghiuri congruente BAC şi ABD; $[AC] \equiv [BD]$; $CD \cap AB = \{M\}$. Să se arate că $[AM] \equiv [MB]$.

Indicaţie. Se observă mai întîi triunghiurile ABD şi BAC apoi triunghiurile ACD şi CBD şi apoi $\Delta AMC \equiv \Delta BMD$.

82. Fie triunghiul echilateral ABC. Se duce din A o perpendiculară pe AB care intersectează pe AC în F şi pe AD în M astfel $m(\sphericalangle MBD)=\frac{1}{3}$ $m(\sphericalangle ABM)$. Fie CN bisectoarea unghiului exterior $C(N \in AD)$. Să se arate că: $[AM] \equiv [CD]$; şi $[AN] \equiv [ND]$.

II.12. SUMA UNGHIURILOR UNUI POLIGON CONVEX

83. Numărul laturilor unui poligon convex neregulat este n divizibil cu 2 şi 9. Să se calculeze suma măsurilor unghiurilor interioare ale acestui poligon ştiind că $8<n<36$.

R. 2 880°.

84. Suma măsurilor unghiurilor interioare ale unui poligon convex este egală cu măsura a 6 unghiuri drepte. Să se determine numărul laturilor acestui poligon.

R. 5.

85. Fie poligonul convex neregulat $ABCDE$. Avem $m(\sphericalangle D)<m(\sphericalangle B)$ cu 20°, $m(\sphericalangle C)>m(\sphericalangle B)$ cu 40°; $(\sphericalangle A) \equiv (\sphericalangle B)$ şi $m(\sphericalangle E)>m(\sphericalangle B)$ cu 20°. Să se determine măsurile unghiurilor interioare ale acestui poligon.

R. $m(\sphericalangle A)=100^{\circ}$; $m(\sphericalangle B)=100^{\circ}$; $m(\sphericalangle C)=140^{\circ}$; $m(\sphericalangle D)=80^{\circ}$; $m(\sphericalangle E)=120^{\circ}$.

86. Măsurile unghiurilor interioare ale unui poligon convex sînt proporţionale cu numerele 5; 8; 14; 12; 17; 16. Să se determine măsura unghiului sub care se intersectează bisectoarele interioare ale unghiurilor celor mai mici ale poligonului dat.

R. 115°.

87. Să se calculeze măsura unui unghi al unui poligon regulat (cu laturile egale) cu 7 laturi, cu 8 laturi şi cu 15 laturi.

R. $128^{\circ}34'17'',2$; 135°; 156°.

88. Să se arate că într–un patrulater convex suma măsurilor a două unghiuri exterioare este egală cu suma măsurilor celor două unghiuri interioare nealăturate.

Indicaţie. Considerăm unghiurile exterioare din A şi B şi avem $180-m(\sphericalangle A)+180-m(\sphericalangle B)=$ $=360^{o}-[m(\sphericalangle A)+m(\sphericalangle B)]=m(\sphericalangle C)+m(\sphericalangle D)$.

89. Se dă patrulaterul convex $ABCD$, bisectoarele unghiurilor alăturate A şi B se intersectează în M, iar bisectoarele unghiurilor alăturate C şi D se intersectează în N. Să se arate că $m(\sphericalangle AMB)+m(\sphericalangle CND)=180^{o}$.

Indicaţie. $m(\sphericalangle AMB)=180^{o}-\frac{m(\sphericalangle A)+m(\sphericalangle B)}{2}$; $m(\sphericalangle CND)=180^{o}-\frac{m(\sphericalangle C)+m(\sphericalangle D)}{2}$.

90. Suma măsurilor unghiurilor interioare ale unui poligon convex este de 540^{o}. Aceste măsuri sînt invers proporţionale cu $\frac{1}{8};\frac{1}{9};\frac{1}{11};\frac{1}{12};\frac{1}{14}$. Să se determine măsurile acestor unghiuri.

R. 80^{o}; 90^{o}; 110^{o}; 120^{o}; 140^{o}.

91. Să se arate că suma măsurilor unghiurilor exterioare oricărui poligon convex este egală cu suma măsurilor a 4 unghiuri drepte.

Indicaţie. $180^{o}n-180^{o}(n-2)=360^{o}$.

92. Să se calculeze suma măsurilor unghiurilor unui poligon convex care îndeplineşte condiţia că există un punct în interiorul lui din care să se vadă laturile sale sub acelaşi unghi. Să se construiască un astfel de poligon.

Indicaţie. Se ţine seama de poziţia diagonalelor unui patrulater, care să îndeplinească condiţia cerută.

93. Fiind dat un triunghi ABC, bisectoarele interioare duse din B şi C se intersectează în punctul O şi formează unghiul BOC care are măsura de 120^{o}. Să se determine măsura unghiului A al triunghiului ABC.

R. 60^{o}.

94. Se dă un triunghi isoscel ABC, $[AB]\equiv[AC]$. Se prelungeşte BA dincolo de A cu lungimea $AD=BA$. Să se arate că ΔDBC este dreptunghic.

Indicaţie. $\Delta\, DAC$ isoscel; se studiază unghiurile.

II.13. DREPTE PARALELE

95. Să se demonstreze că bisectoarele a două unghiuri cu laturile respectiv paralele sînt perpendiculare sau paralele.

96. Să se demonstreze că bisectoarele a două unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare, sînt perpendiculare sau paralele.

97. Fiind date două paralele tăiate de o secantă, să se demonstreze că bisectoarele unghiurilor corespondente sînt paralele.

98. Să se arate că dacă două unghiuri au două laturi paralele şi celelalte două perpendiculare, suma sau diferenţa măsurilor lor este egală cu măsura unui unghi drept sau cu măsura a trei unghiuri drepte.

99. Intr–un triunghi ABC se duc bisectoarele BB' ($B'\in AC$) şi CC'($C'\in AB$), $BB'\cap CC'=$ $=\{I\}$. Se duce prin I o paralelă MN la BC. ($M\in AB$, $N\in AC$). Să se arate că avem relaţia $MN=MB+NC$.

Indicaţie. Δ MBI şi Δ NCI sînt isoscele.

100. Prin vîrful A a unui triunghi ABC se duce o paralelă la BC. Bisectoarea unghiului B taie paralela dusă prin A în N; $BN=20$ cm, $AB=6$ cm. Să se calculeze perimetrul ΔABN. R. 32 cm.

101. Prin vîrfurile unui triunghi se duc paralele la laturile opuse şi se prelungesc pînă ce se întîlnesc două cîte două. Să se arate că triunghiul format este de patru ori mai mare decît cel dat.

102. Intr–un triunghi ABC, măsura unghiului A este de două ori mai mare decît măsura unghiului B. Bisectoarea unghiului A intersectează pe BC în D, iar bisectoarea unghiului ADC intersectează pe AC în E. a) Să se arate că $DE||AB$. b) Ce fel de triunghiuri sînt ABD, ADE ?

II.14. PATRULATERE

103. Intr–un paralelogram $ABCD$, dreapta MN uneşte mijloacele laturilor opuse AB şi CD. Fie O centrul paralelogramului. Să se arate că MN este paralelă cu AD şi cu BC şi că punctele N, O, M sînt coliniare.

104. Prin centrul unui paralelogram $ABCD$ se duc două drepte după voie, prima intersectează laturile opuse AB şi CD în M şi N, iar a doua intersectează celelalte două laturi opuse în P şi Q. Să se demonstreze că patrulaterul $MQNP$ este un paralelogram. Cum trebuie duse aceste drepte ca patrulaterul să devină romb ?

105. Să se demonstreze că un patrulater în care două laturi opuse sînt paralele, iar o diagonală este tăiată în părţi de lungimi egale de cealaltă diagonală este paralelogram.

106. Bisectoarele interioare ale unui paralelogram se întîlnesc între ele formînd un dreptunghi.

107. Pe laturile AB, BC, CD, DA ale unui paralelogram se iau în acelaşi sens respectiv punctele E, F, G, H astfel ca $[AE]\equiv[CG]$ şi $[BF]\equiv[DH]$. Să se demonstreze că patrulaterul $EFGH$ este paralelogram cu acelaşi centru ca şi paralelogramul dat.

108. Prin vîrfurile opuse A şi C ale paralelogramului $ABCD$ se duc două drepte paralele, după voie, care intersectează diagonala BD în punctele A' şi C'. Să se demonstreze că $[A'B]\equiv[C'D]$.

Indicaţie. Se vor considera triunghiul $AA'B$ şi triunghiul $CC'D$.

109. Să se demonstreze că mijloacele laturilor unui patrulater sînt vîrfurile unui paralelogram. In ce caz acest paralelogram devine: romb, dreptunghi sau pătrat ?

Indicaţie. Se va observa că laturile noului patrulater sînt paralele cu diagonalele patrulaterului dat.

110. Punctele de intersecție a celor patru bisectoare interioare ale unui dreptunghi sînt vîrfurile unui pătrat.

Indicație. Se va observa că aceste bisectoare formează cu laturile dreptunghiului patru triunghiuri dreptunghice isoscele, congruente două cîte două.

111. Ducînd două paralele la egală distanță de diagonala unui dreptunghi, în interiorul dreptunghiului și unind extremitățile se formează un paralelogram.

112. Să se arate că picioarele perpendicularelor duse din vîrfurile unui dreptunghi pe diagonalele sale sînt vîrfurile altui dreptunghi, avînd laturile respectiv paralele cu ale dreptunghiului dat.

113. Să se arate că picioarele perpendicularelor duse din centrul unui romb pe laturile sale sînt vîrfurile unui dreptunghi.

114. Se unesc extremitățile unei laturi a unui dreptunghi cu un punct arbitrar de pe latura opusă. Să se arate că triunghiul astfel format are aria jumătate cît a dreptunghiului.

115. Se unește un punct M interior unui paralelogram cu vîrfurile acestuia. Fie AB și CD două laturi opuse. Să se arate că suma ariilor triunghiurilor MAB și MCD este constantă oricum s-ar mișca punctul M.

116. Pe laturile unui paralelogram ca baze se construiesc în afară triunghiuri echilaterale. Să se arate că vîrfurile acestor triunghiuri diferite de vîrfurile paralelogramului sînt vîrfurile altui paralelogram.

117. Se prelungesc laturile AB și AD ale unui paralelogram $ABCD$ cu segmentele $[BM]\equiv[AD]$ și $[DN]\equiv[AB]$. Să se arate că $\Delta\ DCN$ și $\Delta\ BMC$ sînt isoscele și că punctele M,N,C sînt coliniare.

118. Se dau trei puncte necoliniare A,B,C. Fie punctele M,N,P simetricele lor față de un punct O. Cîte paralelograme se pot forma cu punctele A, B, C, M, N, P ?

R. 3 paralelograme.

119. Se prelungesc medianele BM și CN ale unui triunghi ABC cu segmentele $[MP]\equiv[MB]$ și $[NQ]\equiv[NC]$. Să se arate că punctele A,P,Q sînt coliniare.

Indicație. Se arată că AP și AQ sînt paralele cu BC.

120. Se prelungesc diagonalele unui paralelogram $ABCD$ cu segmentele $[AM]\equiv[CN]$ și $[BK]\equiv[DT]$ (în sensuri opuse). Să se arate că $MKNT$ este paralelogram.

Indicație. In patrulaterul format, diagonalele se înjumătățesc.

121. Fie triunghiul ABC isoscel, $[AB]\equiv[AC]$ și $D\in AC$. Se prelungește latura AB cu $[BE]=[CD]$. $DE\cap BC=\{F\}$. Se se arate că F este mijlocul lui DE.

Indicație. Din D se duce o paralelă la AB care taie pe BC în H. Se studiază ΔDHC și patrulaterul în care DE este diagonală .

122. In triunghiul ABC se duce bisectoarea AA', iar prin piciorul A' se duc $A'M$ și $A'N$ paralele la laturile AB si AC ale triungiului; $M\in AB$ și $N\in AC$. Să se arate că $AMA'N$ este romb.

Indicație. Se observă că triunghiul AMA' este isoscel.

123. Dreptele paralele (d_1) şi (d_2) sînt tăiate de secanta AB. Bisectoarele unghiurilor A şi B interne de aceeaşi parte a secantei, întîlnesc cele două paralele în punctele C şi D. Să se arate că $ABCD$ este romb.

124. Se dă trapezul $ABCD$ în care baza mare AB este dublul bazei mici CD. a) Să se împartă trapezul în trei triunghiuri echivalente. b) Ce fel de triunghiuri sînt ?

Indicaţie. Se consideră M mijlocul lui $AB(M \in AB)$.

125. Se dau două unghiuri adiacente suplementare $\sphericalangle AOB$ şi $\sphericalangle AOC$. Dintr–un punct A' de pe latura comună OA se duc perpendicularele $A'D$ şi $A'E$ pe bisectoarele celor două unghiuri. Să se arate că $ODA'E$ este un dreptunghi şi $DE \| BC$.

126. Se dă un dreptunghi $ABCD(AB > BC)$ în care diagonalele fac un unghi de 60°. Fie P piciorul perpendicularei duse din vîrful D pe diagonala AC. a) Să se arate că $\frac{AP}{AC} = \frac{1}{4}$. b) Să se arate că $APEB$ (E fiind piciorul perpendicularei duse din C pe BD) este trapez isoscel.

127. Unind consecutiv mijloacele laturilor unui romb se obţine un patrulater al cărui perimetru este de 198 cm. Latura cea mai mare a acestui patrulater este de două ori mai mare, decît latura cea mai mică. Să se calculeze laturile patrulaterului format.

R. 33 cm; 66 cm.

128. Pe laturile consecutive AB şi BC ale unui pătrat se construiesc două triunghiuri echilaterale ABE şi BCF, primul cu vîrful în interior şi al doilea cu vîrful în exteriorul pătratului. Să se arate că punctele D, E, F sînt coliniare.

Indicaţie. Se vor studia triunghiurile BEF, ECD şi AED şi se va găsi că unghiurile cu vîrfurile în E au 45° şi 60°, 75°.

129. Fie un pătrat $ABCD$. Să se găsească pe laturile acestui pătrat patru puncte care să determine un alt pătrat a cărui arie să fie egală cu jumătate din aria primului.

130. Intr–un trapez isoscel $ABCD$, (BC baza mare şi AD baza mică) latura neparalelă AB este egală cu baza mică şi cu jumătate din baza mare. Se cer: 1) unghiurile trapezului; 2) ce fel de triunghi este ABC.

Indicaţie. Se duce din D o paralelă la AB ce taie pe BC în M, $M \in BC$. Se cercetează $ABMD$ care este un romb.

II.15. PROBLEME RECAPITULATIVE

131. Se dă triunghiul ABC cu înălţimea AD, $D \in BC$. Să se arate că dacă $AD = \frac{BC}{2}$ atunci unghiul A este ascuţit sau drept.

132. Fie dreapta (Δ) şi două puncte A şi B de aceeaşi parte a dreptei (Δ). Să se găsească un punct $M \in (\Delta)$ astfel ca $AM+MB$ să fie cea mai mică.

Indicaţie. Se consideră simetricul punctului A faţă de (Δ).

133. Fie *a, b, c,* laturile unui triunghi şi h_1, h_2 şi h_3 înălţimile lui. Să se arate că există relaţia $a+b+c>h_1+h_2+h_3$.

134. *O* fiind un punct în interiorul unui triunghi *ABC*, să se arate că $OB+OC<AB+AC$.

Indicaţie. $OB \cap AC=\{B'\}$ şi $OC \cap AB=\{C'\}$.

135. Suma medianelor unui triunghi este mai mică decît suma laturilor triunghiului.

Indicaţie. Fie *AM* mediană. Prelungim *AM* cu $[MA']\equiv[MA]$

136. Să se demonstreze că distanţele a două din vîrfurile unui triunghi la mediana ce corespunde vîrfului al treilea sînt congruente.

137. Fiind dat un triunghi echilateral şi un punct în interiorul triunghiului să se arate că suma distanţelor acestui punct la laturi este constantă

138. Fie paralelogramul *ABCD* în care diagonala $[BD]\equiv[AD]$. Fie *M* mijlocul laturii *DC*. Să se arate că $BM\perp DC$.

139. In triunghiul isoscel *ABC*, $[AB]\equiv[AC]$, pe latura *AC* se ia un punct *D* şi se prelungeşte latura *AB* cu o lungime $BE=DC$. ($ED\cap BC=F$); se duce $DH \parallel AB$ ($H\in BC$). Să se arate că: a) $\frac{DH}{BE}=1$; b) $[EF]\equiv[FD]$.

Indicaţie. Se studiază triunghiurile *BEF* şi *FDH*.

140. Se dau două unghiuri adiacente suplementare *xOy* şi *yOC*. Dintr–un punct *A* de pe latura comună *yO* se duc perpendiculare *AD* şi *AE* pe bisectoarele acestor unghiuri. Să se arate că $DE \parallel xC$.

Indicaţie. Se studiază patrulaterul *ADOE*.

141. Măsura unghiului format prin intersecţia diagonalelor *AC* şi *BD* ale unui dreptunghi *ABCD* este de 60°. Perpendicularele duse din *D* şi *B* intersectează diagonala *AC* în *M* şi *N*; $AC\cap BD=\{O\}$. Să se arate că: a) $\frac{OM}{AC}=\frac{1}{4}$; b) *MBND* paralelogram.

142. Se prelungesc laturile unui pătrat în acelaşi sens cu segmente de lungimi egale şi se unesc punctele obţinute; apoi se construiesc pe laturile patrulaterului triunghiuri echilaterale. Să se arate că unind vîrfurile triunghiurilor echilaterale se obţine un nou pătrat.

143. Fie *xOy* un unghi drept. Să presupunem că *Ox* este bisectoarea unui unghi *AOB*, iar *Oy* este bisectoarea altui unghi *COD*. Să se arate că unghiurile *AOC* şi *BOD* sînt suplementare. Ce se întîmplă dacă *OA* şi *OC* se confundă ?

R. $m(\sphericalangle AOC)+m(\sphericalangle BOD)=2\cdot 90^\circ=180^\circ$; dacă *OA* şi *OC* se confundă, atunci *OB* şi *OD* sînt în prelungire.

144. Dacă se duce bisectoarea unui unghi înscris într–un cerc şi prin punctul ei de intersecţie cu cercul se duce o coardă paralelă cu una din laturile unghiului, să se arate că această coardă este congruentă cu cealaltă latură a unghiului.

145. Dacă se unesc picioarele înălțimilor unui triunghi, se obține un al doilea triunghi, ale cărui bisectoare sînt înălțimile celui dintîi.

146. Trei orașe pe care le însemnăm cu A, B, C formează pe hartă un triunghi dreptunghic isoscel, cu vîrful unghiului drept în B. Ele sînt legate cu o singură cale ferată, lungă de 400 km, care merge de la A la B în linie dreaptă, și de la B la C iarăși în linie dreaptă. Dacă s–ar face o cale ferată directă, adică în linie dreaptă de la A la C, cu cît s–ar scurta drumul, cu trenul, între aceste două orașe ?

R. Cu aproape 118 km.

147. In triunghiul ABC, latura $AC=12{,}5$ cm, iar înălțimea $AD=10$ cm. Pe latura AB se ia un punct M astfel încît să avem $BM:MA=\frac{1}{4}$. Prin M se duc paralela la AC și perpendiculara pe BC, care determină pe BC, respectiv, punctele N și P. Fie P' simetricul lui P față de N. Paralela la MP' dusă prin P taie dreapta MN în Q. a) Să se arate că patrulaterul $MPQP'$ este paralelogram. b) Să se calculeze lungimile laturilor și diagonalelor paralelogramului $MPQP'$. c) Prelungirea dreptei MN întîlnește tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC, în punctul T. Să se arate că triunghiurile ATM și ABC sînt asemenea.

R. $MP=QP'=2; PQ=P'M=\sqrt{13}; PP'=3; MQ=5$.

148. Din centrul O al unui cerc se duc razele OA și OB. In punctele A și B se duc tangentele la cerc care se intersectează în punctul Q. Prelungirile razelor întîlnesc aceste tangente în P și S. Să se arate că: a) Triunghiul OSP este isoscel. b) Diagonalele patrulaterului $OBQA$ sînt perpendiculare.

149. Se dă un patrulater $ABCD$ în care $m(\sphericalangle A)=m(\sphericalangle C)$. Bisectoarea unghiului B intersectează pe DC și AD în punctele E și F. Să se demonstreze că triunghiul DEF este isoscel.

Indicație. Se va folosi suma măsurilor unghiurilor dintr–un triunghi.

150. Laturile CB și DA ale patrulaterului $ABCD$ se intersectează în M, iar laturile BA și CD în N. Să se demonstreze că: $m(\sphericalangle BMA)-m(\sphericalangle AND)=m(\sphericalangle ABC)-m(\sphericalangle ADC)$.

151. Fie D un punct oarecare pe baza BC a unui triunghi isoscel ABC. Să se arate că AD formează cu baza două unghiuri care au diferența măsurilor egală cu diferența măsurilor unghiurilor formate de AD cu laturile congruente ale triunghiului.

Indicație. Se va folosi măsura unghiului exterior unui triunghi.

152. Pe laturile AB și AC ale unui triunghi echilateral ABC se consideră respectiv punctele D și E, astfel că $[AD]\equiv[CE]$. Notăm cu M punctul de intersecție al dreptelor BE și CD. Să se arate că $m(\sphericalangle BMC)=120^\circ$.

153. Fie H punctul de intersecție al înălțimilor duse pe laturile AC și AB ale triunghiului ABC și M și N intersecțiile bisectoarei unghiului A cu aceste înălțimi. Să se arate că triunghiul HMN este isoscel.

Indicație. $m(\sphericalangle HMN)=m(\sphericalangle MNH)=90^\circ-\frac{m(\sphericalangle A)}{2}$.

154. Intr–un triunghi ABC, bisectoarea unghiului A intersectează pe BC în D; dreapta dusă prin D, paralelă cu CA intersectează pe AB în E; dreapta dusă din E, paralelă cu BC intersectează pe AC în F. Să se demonstreze că $[EA]\equiv[FC]$.

155. Segmentul de dreaptă care uneşte un punct oarecare al bazei mari a unui trapez cu un punct oarecare al bazei mici este împărţit de linia mijlocie a trapezului în două părţi de lungimi egale.

156. Intr–un triunghi se duce o dreaptă paralelă la bază, prin punctul de intersecţie al bisectoarelor unghiurilor alăturate bazei. Să se demonstreze că segmentul de dreaptă, cuprins între două laturi ale triunghiului este egal cu suma părţilor acestor laturi alăturate bazei.

157. Prin vîrfurile unui triunghi se duc drepte paralele la laturile opuse. Să se demonstreze că triunghiul format de aceste drepte este alcătuit din patru triunghiuri congruente cu cel dat şi că fiecare dintre laturile lui este de două ori mai mare decît latura corespunzătoare a triunghiului dat.

158. Intr–un triunghi isoscel, suma distanţelor unui punct al bazei la cele două laturi congruente rămîne constantă cînd punctul se mişcă pe bază, şi anume este egală cu înălţimea coborîtă pe una din laturile egale. Cum se schimbă această teoremă, dacă se ia punctul pe prelungirea bazei ?

159. Intr–un triunghi echilateral, suma distanţelor unui punct luat în interiorul acestui triunghi la laturile lui este o mărime constantă (egală cu înălţimea triunghiului).

160. Se dă trapezul $ABCD$ cu diagonala AC perpendiculară pe bazele trapezului $AB=2a$ şi $CD=a$, $m(\sphericalangle ADC)=45^{o}$. Din punctul M aflat pe mijlocul lui AB se ridică perpendiculara MN ($N\in BC$). Să se arate că: 1) AD este diagonala unui pătrat cu latura a. 2) $AMCD$ este paralelogram. 3) Aria patrulaterului $AMNC$ este 1/2 din aria trapezului.

161. In triunghiul ABC bisectoarea unghiului B intersectează pe AC în E. Fie $ED||BC$ şi $EF||AB$ ($D\in AB$; $F\in BC$). Se stie că $2DE=BC=m$. Să se arate că: triunghiul DBE este isoscel, EF este mediană în triunghiul BEC. Să se afle raportul ariilor patrulaterului $DBEF$ şi a triunghiului ABC.

R. $\frac{1}{2}$.

162. Dintr–un punct D al ipotenuzei unui triunghi dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A)=90^{o}$, se duc perpendicularele DE şi DF pe catetele triunghiului dreptunghic. Pentru ce poziţie a punctului D distanţa EF este minimă ?

Indicaţie. Se studiază diagonalele dreptunghiului $AEDF$ în care AD este diagonala dreptunghiului.

163. Se dă triunghiul ABC şi un punct M în interiorul lui. Fie A', B', C' simetricele lui M faţă de BC, AC, AB. Să se arate că triunghiurile $C'AB'$, $B'CA'$ şi $A'BC'$ sînt isoscele.

Indicaţie. Se observă triunghiurile congruente formate.

164. Fie paralelogramul $ABCD$ în care diagonala $[BD]\equiv[AD]$. Fie M mijlocul laturii DC. Să se arate că $BM \perp DC$.

165. In triunghiul isoscel ABC, $[AB]\equiv[AC]$, pe latura AC se ia un punct D şi se prelungeşte latura AB cu o lungime $BE=DC$. $ED\cap BC=\{F\}$. Se duce $DH||AB$ $(H\in BC)$. Să se arate că: a) $\frac{DH}{BE}=1$; b) $[FD]\equiv[EF]$.

Indicaţie. Se studiază triunghiurile BEF şi DEA.

166. Se dau două unghiuri adiacente suplementare xOy şi yOc. Dintr–un punct A de pe latura comună yO se duc perpendicularele AD şi AE pe bisectoarele acestor unghiuri. Să se arate că $DE||xC$.

Indicaţie. Se observă patrulaterul $ADOE$.

167. Măsura unghiului format prin intersecţia diagonalelor AC şi BD ale unui dreptunghi $ABCD$ este de 60^o. Perpendicularele duse din D şi din B intersectează diagonala AC în M şi N. $AC\cap BD=\{O\}$. Să se arate că: a) $\frac{OM}{AC}=\frac{1}{4}$; b) $MBND$ este paralelogram.

168. Se prelungesc laturile unui pătrat în acelaşi sens cu segmente congruente şi se unesc punctele obţinute; apoi se construiesc pe laturile patrulaterului format triunghiuri echilaterale. Să se arate că unind vîrfurile triunghiurilor echilaterale se obţine un nou pătrat.

169. Fie trapezul $ABCD$. Din D se duce o perpendiculară pe diagonala AC care intersectează pe AB în F, iar din B o paralelă la DF care intersecteaza pe AC în punctul E. Să se arate că $m(\sphericalangle ACD)+m(\sphericalangle FDC)=m(\sphericalangle CBE)+m(\sphericalangle ECB)$.

Indicaţie. Se observă unghiurile complementare.

170. Se dă triunghiul ABC. Perpendicularele duse în vîrfurile B şi C pe laturile AB respectiv AC se intersectează în D. Să se arate că bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BAC$ şi $\sphericalangle BDC$ sînt paralele.

Indicaţie. $m(\sphericalangle A)+m(\sphericalangle D)=180^o$. Se observă unghiurile complementare.

171. Fie ΔABC dreptunghic $m(\sphericalangle A)=90^o$ şi O mijlocul laturii BC. Perpendiculara din A pe AO intersectează pe BC în D. Se prelungeşte BD cu segmentul $[DE]\equiv[AD]$. Să se arate: a) $m(\sphericalangle DAB)=m(\sphericalangle OAC)$; b) $m(\sphericalangle ADE)+m(\sphericalangle ACO)=45^o$.

172. Lichidul turnat într–un vas are masa de 153 kg. Vasul plin are masa de 5 ori masa vasului gol. Ştiind că vasul are capacitatea de 1,7 hℓ, să se afle masa vasului plin şi densitatea lichidului.

Indicaţie. Masa vasului plin este: $\left(153+\frac{153}{4}\right)$ kg.

R. 191,25 kg; $\rho=900$ kg/m^3.

173. O sumă de bani este împărţită la 7 elevi astfel: primul primeşte jumatate din sumă şi încă 50 de bani, al doilea primeşte jumătate din suma rămasă si încă 50 de

bani, al treilea primeşte jumatate din noul rest şi încă 50 de bani şi aşa mai departe pînă ce ultimul primeşte jumătate din ultimul rest şi încă 50 de bani. Intreaga sumă fiind astfel distribuită să se afle cît a primit fiecare din cei 7 elevi.

Indicație. **Se foloseşte metoda mersului invers. Ultimul rest este 1 leu.**

R. Suma totală 127 lei; 64,32,16,8,4,2,1.

174. Spațiul parcurs în alunecarea unui corp pe un plan înclinat este proporțional cu pătratul timpului necesar alunecării. Un corp alunecă în cinci secunde 50 metri. Să se afle ce spațiu a parcurs acel corp dacă a alunecat timp de 8 secunde.

Indicație. **Se va scrie legea din enunț:** $\frac{s_1}{t_1^2}=\frac{s_2}{t_2^2}$.

R. 128 m

175. Intr–un triunghi dreptunghic *ABC* ipotenuza *BC* este dublul catetei *AB*. Se duce bisectoarea *BD* şi bisectoarea *DE* a triunghiului *BDC*. a) Să se arate că triunghiurile *ABD*, *DBE* şi *ECD* sînt congruente între ele. b) Să se arate că triunghiul *ABE* este echilateral. c) Să se arate că se poate împărți triunghiul dat *ABC* în 9 triunghiuri congruente între ele.

Indicație. **Ne folosim de proprietatea punctelor situate pe bisectoarea unui unghi şi de teorema: dacă într–un triunghi dreptunghic o catetă este jumătate dintr–o ipotenuză, atunci măsura unghiului opus acelei catete este de** 30°

176. Două corpuri se mişcă uniform pe cerc. Ele pleacă în acelaşi timp dintr–un punct *A* de pe cerc în sensuri contrare. După ce s–au întîlnit într–un punct *B*, primului corp i–au mai trebuit 4 secunde ca să ajungă în *A*, iar cel de–al doilea continuînd mersul său i–a mai trebuit 9 secunde ca să ajungă şi el în *A*. De cîte ori ar parcurge cercul într–un minut fiecare din cele două corpuri ?

Indicații. **Dacă ținem seama că timpul este acelaşi (*t*) pentru ambele corpuri (care se mişcă cu viteze diferite** v_1 **şi** v_2**) pînă la întîlnirea în *B*, iar distanța parcursă de primul pînă la întîlnire este aceeaşi cu distanța parcursă de cel de–al doilea pînă la înapoierea în *A*, se obțin relațiile:** $\frac{v_1}{v_2}=\frac{9}{t}$; $\frac{v_1}{v_2}=\frac{t}{4}$ **apoi** $t=6$ **secunde.**

R. 6 ori; 4 ori.

177. In triunghiul *ABC* se duc bisectoarele *BB'* şi *CC'* $(B'\in AC, C'\in AB)$ **şi** $BB'\cap CC'=\{I\}$**. Se duce prin *I* o paralelă *MN* la *BC*;** $(M\in AB$ **şi** $N\in AC)$**. Să se arate că** $MN=BM+NC$.

178. In Δ *ABC* se duc înălțimea *AH* şi bisectoarea *AD*. Să se calculeze măsura unghiului *DAH*.

179. Intr–un patrulater convex bisectoarele a două unghiuri consecutive formează un unghi avînd măsura egală cu semisuma măsurilor celorlalte unghiuri.

180. Se dă triunghiul isoscel *ABC*, $[AC]\equiv[BC]$**, fie** $DE\parallel AB$ **şi** $BD\cap AE=\{F\}$**. a) Să se arate că triunghiul *DEF* este isoscel. b) Să se arate că bisectoarea unghiului *BFA* este şi bisectoarea unghiului *EFD*.**

181. Fie patrulaterul *ABCD* în care $[AB]\equiv[AD]$ **şi** $m(\sphericalangle ABC)=m(\sphericalangle ADC)$**. Să se arate că *AC* este perpendiculară pe mijlocul lui *BD*.**

182. Pe o coardă *AB* a unui cerc se iau două puncte *D* şi *E* la o distanţă egală de mijlocul *C* al acestei coarde şi prin aceste puncte se ridică pe *AB* perpendicularele *DF* şi *EG*, în acelaşi sens, pînă la intersecţia lor cu cercul. Să se demonstreze că aceste perpendiculare sînt congruente.

183. Intr–un cerc se duc două coarde *CC'* şi *DD'* paralele cu diametrul *AB*. Să se demonstreze că *MM'* care uneşte mijloacele coardelor *CD* şi *C'D'* este paralelă cu *AB*.

184. Intr–un cerc cu centrul *O* se duce coarda *AB* şi se prelungeşte cu distanţa *BC*, egală cu raza. Prin punctul *C* şi centrul *O* se duce secanta *CD* (*D* este al doilea punct de intersecţie cu cercul). Să se demonstreze că m(∢*AOD*)=3m(∢*ACD*).

185. Intr–un triunghi *ABC* prelungim latura *AB* dincolo de *A* cu un segment *AD* congruent cu *AC*. Apoi prelungim latura *AC* dincolo de *A* cu un segment *AE* congruent cu *AB*. Să se demonstreze că [*DE*]≡[*BC*].

186. In figura II.2, *AOB* este un unghi oarecare. Să se compare *BC* cu *AD*.

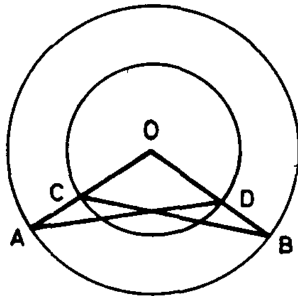


Fig.II.2

187. Fie *AB* şi *CD* două diametre ale unui cerc. Să se compare; a) segmentul *AC* cu *DB*; b) segmentul *AD* cu *BC*.

188. Fie *OA* şi *OB* două raze ale unui cerc, *Ox* bisectoarea unghiului *AOB* şi *M* un punct al ei. Să se compare segmentul *MA* cu *MB*.

189. Fie *AB* un segment şi *C* mijlocul lui. In *C* se ridică perpendiculara pe *AB*; fie *M* un punct oarecare al ei. Să se compare *MA* cu *MB*.

190. Notînd cu *O* centrul unui cerc, cu *A* şi *B* două puncte oarecare ale cercului şi cu *OC* bisectoarea unghiului *AOB*, să se compare segmentele *CA* şi *CB*.

191. Fie *ABC* un triunghi oarecare şi *AD* una dintre bisectoarele lui *D*∊*BC*. Pe semidreapta *AC* se poartă un segment *AE* congruent cu *AB*. Să se demonstreze că [*DE*]≡≡[*BD*] (Se va face o figură în care *AC*<*AB* şi o altă figură în care *AC*>*AB*.)

192. In figura II.3, ∢1≡∢3 şi ∢2≡∢4. Să se găsească toate elementele congruente din figură.

193. In figura II.4, ∢1≡∢3 şi ∢2≡∢4. Să se demonstreze că [*AB*]≡[*DC*].

194. In figura II.5, *MN*||*AB*, *NP*||*BC*, *PM*||*AC*. Care sînt unghiurile congruente cu unghiul 1 ? Cele 12 unghiuri din figură se pot grupa în 3 grupe de cîte 4 unghiuri congruente. Să se formeze aceste grupe.

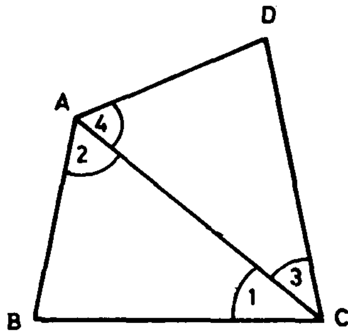


Fig.II.3

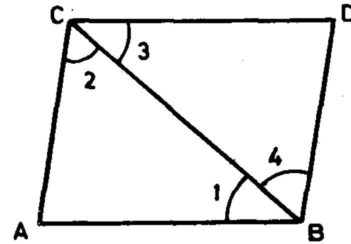


Fig.II.4

195. a) In figura II.6, s–au dus printr–un punct paralelele la laturile patrulaterului *ABCD*. Să se compare unghiurile 1, 2, 3 şi 4 cu unghiurile patrulaterului. Să se deducă de aici cîte grade are suma $\sphericalangle A+\sphericalangle B+\sphericalangle C+\sphericalangle D$. b) Se poate afla pe aceeaşi cale suma unghiurilor unui pentagon ?

196. Se consideră două drepte paralele tăiate de o secantă. a) Ce poziţie au una faţă de cealaltă, bisectoarele a două unghiuri alterne interne ? b) Să se găsească alte perechi de unghiuri ale căror bisectoare sînt paralele.

197. Două drepte paralele *d* şi *e* sînt tăiate de o secantă AB, $A\in d$, $B\in e$. Pe dreapta *d* se poartă un segment *AC* congruent cu *AB*. Să se demonstreze că *BC* este bisectoarea unghiului *B*. Se vor considera două cazuri: punctul *C* este de o parte sau de cealaltă a punctului *A*.

198. Fie *xOy* un unghi şi *M* un punct al bisectoarei sale. Prin *M* se duce paralela la *Ox* şi se notează cu *N* intersecţia ei cu *Oy*. Să se compare segmentul *NM* cu *NO*.

199. In figura II.7, *BI* şi *CI* sînt bisectoare, $MN \| BC$. Să se demonstreze că $MN=MB+NC$.

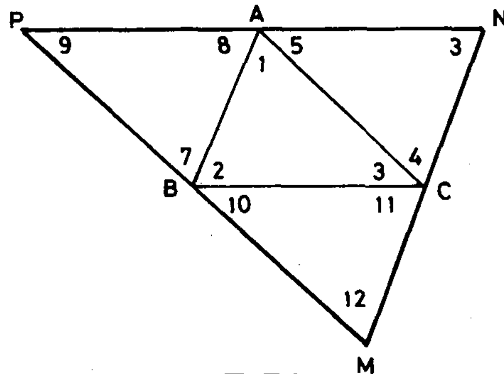


Fig.II.5

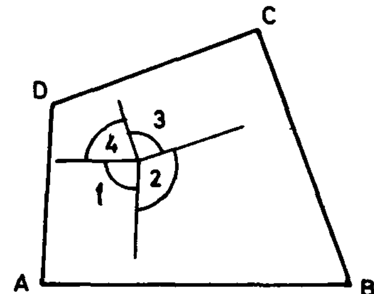


Fig.II.6

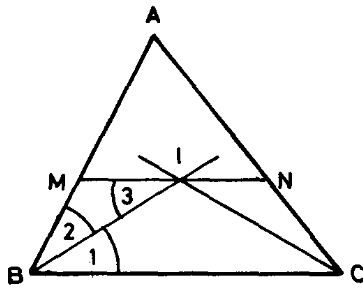


Fig.II.7

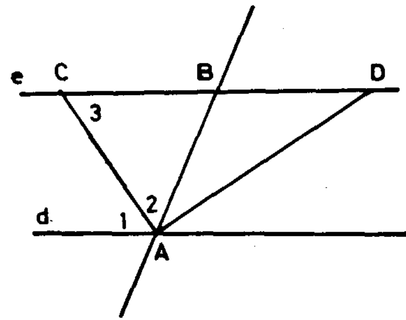


Fig.II.8

200. In figura II.8, $d \| e$, AB este o secantă oarecare, iar AC şi AD sînt bisectoare. Să se demonstreze că: a) triunghiurile ABC şi ABD sînt isoscele; b) AB este o mediană a triunghiului ACD.

201. Fie xOy un unghi şi A un punct al laturii Ox. Să se ducă prin A o dreaptă astfel încît, B fiind intersecţia ei cu Oy, unghiul OAB să fie congruent cu unghiul OBA.

202. In figura II.9, $[AB]\equiv[AC]$, $[BD]\equiv[CE]$, $DF\perp BC$ şi $EG\perp BC$. Să se compare segmentele DF şi EG.

203. a) In figura II.10, triunghiurile ABC şi ACD sînt isoscele şi congruente. a) Să se compare unghiurile ABD şi ADB. b) Să se demonstreze că $AC\perp DB$. c) Se construieşte la dreapta triunghiului ACD încă un triunghi isoscel ADE, $[AE]\equiv[AD]$. Să se compare unghiurile ABE şi AEB.

204. Intr-un triunghi isoscel ABD, $[AB]\equiv[AC]$, se duc medianele BD şi $CE (D\in AC$, $E\in AB)$ şi se notează cu F intersecţia lor. Să se demonstreze că: a) $[BD]\equiv[CE]$;
b) $\sphericalangle DBC\equiv\sphericalangle ECB$; c) $[FB]\equiv[FC]$; d) $[FD]\equiv[FE]$; e) $\sphericalangle FED\equiv\sphericalangle FDE$; f) Aceeaşi problemă dacă BD şi CE sînt înălţimi.

205. Să se demonstreze că: a) un triunghi isoscel are două înălţimi congruente;
b) reciproc, un triunghi care are două înălţimi congruente este isoscel. Se vor considera două cazuri, cînd unghiul de la vîrful triunghiului este ascuţit şi cînd este obtuz.
c) Ce se poate deduce de aici cu privire la înălţimile unui triunghi echilateral ?

206. Să se demonstreze că un triunghi este isoscel dacă: a) o bisectoare este şi înălţime; b) o mediană este şi înălţime; c) o mediană este şi bisectoare.

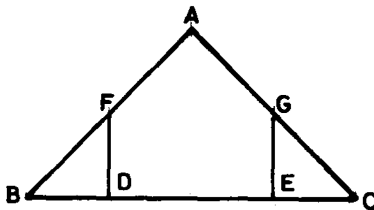


Fig.II.9

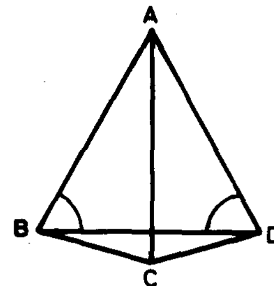


Fig.II.10

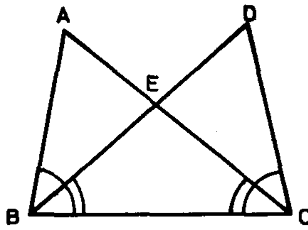


Fig.II.11

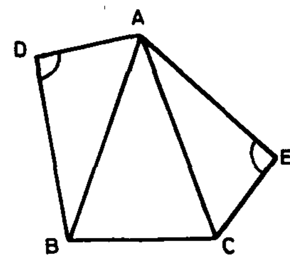


Fig.II.12

207. Fie ABC un triunghi isoscel, $[AB]\equiv[AC]$, şi D intersecţia bisectoarelor unghiurilor de la bază. Să se demonstreze că: a) $[DB]\equiv[DC]$; b) AD este bisectoarea unghiului A.

208. a) Fie ABC un triunghi isoscel, $[AB]\equiv[AC]$. Pe latura AB se ia un punct M şi pe AC un punct N, unde $[BM]\equiv[CN]$; fie $BN\cap CM=P$. Să se demonstreze că: a) $[BN]\equiv[CM]$ b) $[PB]\equiv[PC]$; c) AP este bisectoarea unghiului A. d) Să se deducă de aici că medianele unui triunghi isoscel sînt concurente; e) de asemenea şi înălţimile.

209. Fie xOy un unghi şi M un punct din interiorul lui. O dreaptă care trece prin punctul M taie laturile unghiului în două puncte A şi B. Să se ducă această dreaptă astfel încît triunghiul OAB să fie isoscel.

210. In figura II.11, $\sphericalangle ABC\equiv\sphericalangle DCB$ şi $\sphericalangle ACB\equiv\sphericalangle DBC$. Să se compare laturile triunghiului ABC cu cele ale triunghiului DCB.

211. Fie xOy un unghi şi Oz bisectoarea lui. Printr–un punct A al bisectoarei se duce perpendiculara pe ea şi se notează cu B şi C intersecţiile ei cu laturile unghiului. Să se compare OB cu OC.

212. In figura II.12, triunghiul ABC este isoscel, $[CE]\equiv[AD]$ şi $[AE]\equiv[BD]$. Să se demonstreze că $\sphericalangle D\equiv\sphericalangle E$.

213. In figura II.13, O şi P sînt centrele celor două cercuri. Să se compare unghiurile triunghiului OBP.

214. In figura II.14, O este centrul comun al celor două cercuri. Să se demonstreze că: a) dacă $\sphericalangle 1\equiv\sphericalangle 2$, atunci $[AB]\equiv[CD]$; b) dacă $[AB]\equiv[CD]$, $\sphericalangle 1\equiv\sphericalangle 2$.

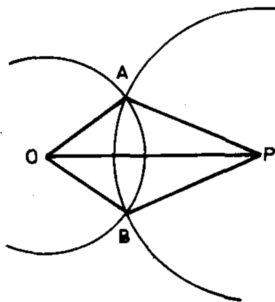


Fig.II.13

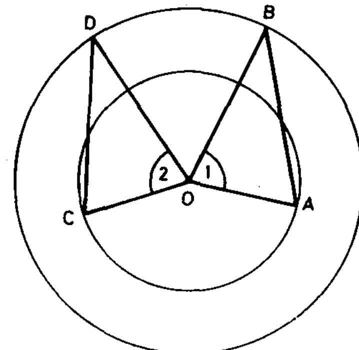


Fig.II.14

215. Intr–un triunghi ABC prelungim mediana AD cu un segment DE congruent cu AD. Să se compare triunghiul ABD cu triunghiul CDE. Ce elemente congruente apar?

216. Să se demonstreze că, într–un triunghi oarecare, două vîrfuri sînt egal depărtate de mediana care pleacă din vîrful al treilea.

III. C L A S A a VII-a

III.1.PROBLEME DE ARITMETICĂ

1. Să se afle două numere, cunoscînd că suma lor este 85 şi diferenţa lor este 15.

R. 50; 35.

2. Diferenţa a două numere este 8, raportul lor este 3:2. Să se afle aceste numere.

R. 24; 16.

3. Să se împartă numărul 46 în două părţi, în aşa fel ca o treime a părţii întîi să întreacă cu doi o şeptime a părţii a doua.

R. 18; 28.

4. Suma a două numere este 64. Impărţind numărul cel mai mare la cel mai mic, obţinem cîtul 3 şi restul 4. Să se găsească cele două numere.

R. 49; 15.

5. Diferenţa a două numere este 35. Impărţind numărul cel mare la cel mic obţinem cîtul 4 şi restul 2. Să se găsească cele două numere.

R. 46; 11.

6. Avem două rezervoare, dintre care unul conţine de două ori mai multă apă decît celălalt. Dacă turnăm din primul rezervor în al doilea 16 hℓ, ambele rezervoare conţin aceeaşi cantitate de apă. Cîtă apă a fost în fiecare rezervor ?

R. 64hℓ; 32hℓ.

7. In clasele I *A* şi I *B* ale unei şcoli au fost înscrişi la începutul anului 90 de elevi, clasa I *A* avînd un număr mai mic de elevi. După un trimestru, doi elevi din clasa I *A* au fost mutaţi în clasa I *B*. Acum raportul dintre numărul elevilor din clasa I *A* şi numărul elevilor din clasa I *B* este 7/8. Cîţi elevi au fost în fiecare clasă la începutul anului şcolar ?

R. 44; 46.

8. In trei coşuri se află 47 de mere. In primele două, numărul merelor este acelaşi, iar în al treilea coş sînt cu două mere mai mult decît în fiecare din celelalte. Cîte mere sînt în fiecare coş ?

R. 15; 15; 17.

9. Pe trei rafturi se află 63 de cărţi; pe primul raft, de trei ori mai multe decît pe al doilea şi pe al doilea de două ori mai multe decît pe al treilea. Cîte cărţi sînt pe fiecare raft ?

R. 42; 14; 7.

10. Din două metale cu densitatea de 7 200 kg/m^3 şi 8 400 kg/m^3 s-au fabricat 19 kg de aliaj cu densitatea 7 600 kg/m^3. Cît s-a luat din fiecare metal ?

R. $12\frac{2}{3}$ kg; $6\frac{1}{3}$ kg.

11. Un număr e format din două cifre. Dacă scădem din el 18, obţinem numărul răsturnat. Să se afle numărul ştiind că suma cifrelor sale este 12.

R. 75.

12. O traversă de fier trebuie tăiată în două părţi ale căror lungimi să fie în raportul 5:3, iar prima parte trebuie să fie cu 5 dm mai lungă decît $\frac{5}{9}$ din toată traversa. Să se afle lungimile celor două părţi.

R. 45 dm; 27 dm.

13. Dintr-un rezervor s-a scos la început jumătate din apa care se afla în el plus $\frac{1}{2}$ hℓ, pe urmă jumătate din acest rest plus $\frac{1}{2}$ hℓ; în sfîrşit, încă o jumătate din rest plus $\frac{1}{2}$ hℓ. După aceste operaţii, rezervorul mai conţine 6 hℓ de apă. Cîtă apă a fost la început în rezervor ?

R. 55 hℓ.

14. In trei lăzi sînt 300 de mere. Numărul merelor din lada a doua este egal cu $\frac{2}{3}$ din numărul merelor din prima ladă, iar numărul merelor din lada a treia este cît 0,5 din a doua. Cîte mere sînt în fiecare ladă ?

R. 150 de mere; 100 de mere; 50 de mere.

15. Un metrou are patru scări rulante. Cea mai mică scară rulantă are o lungime de 60 m; această lungime reprezintă $\frac{15}{16}$ din lungimea celei de-a doua scări, $\frac{5}{6}$ din lungimea celei de-a treia şi $\frac{5}{7}$ din lungimea celei de-a patra. Să se afle lungimea fiecărei scări rulante.

R. 64 m; 72 m şi 84 m.

16. Distanţa dintre două sate poate fi parcursă într-un timp cunoscut. De cîte ori mai mult sau mai puţin timp va fi necesar ca să se parcurgă o distanţa egală cu $\frac{11}{12}$ din prima, dacă se fac $1\frac{1}{3}$ ori mai mulţi paşi pe minut decît mai înainte şi dacă mărimea pasului va fi de două ori mai mică decît cea precedentă ?

R. Timpul al doilea este $\frac{11}{8}$ din primul.

17. Un teren a cărui suprafată are aria de 2 413 ari a fost repartizat la trei asociaţii. Să se afle ariile suprafeţelor repartizate fiecărei asociaţii, dacă $\frac{3}{4}$ din terenul

repartizat primei asociaţii reprezintă 0,3 din cel al celei de-a doua asociaţii şi $\frac{1}{8}$ din al asociaţiei a 3-a.

Indicaţie. Terenul I reprezintă $\frac{3}{10}:\frac{3}{4}=\frac{2}{5}$ din terenul II, iar terenul III reprezintă $\frac{3}{10}:\frac{1}{8}=\frac{12}{5}$ din terenul II. Toate terenurile la un loc reprezintă: $\frac{2}{5}+\frac{12}{5}+1=\frac{19}{5}$ din suprafaţa terenului II.

R. Terenul II este de 635 ari; terenul I este de 254 ari; terenul III=1 524 ari.

18. O cooperativă agricolă de stat şi-a depozitat ovăzul în trei hambare. In primul era $\frac{3}{8}$ din întreaga cantitate de ovăz, în al doilea de $1\frac{2}{3}$ ori mai puţin decît în primul, iar în al treilea restul ovăzului. Cînd s-au luat $1\frac{1}{2}$ hℓ din cel de-al doilea hambar şi 33 hℓ din al treilea, în fiecare hambar a rămas aceeaşi cantitate de ovăz. Cît ovăz a fost în fiecare hambar ?

R. I. 67,5 hℓ; II. 40,5 hℓ; III. 72 hℓ.

19. Intr-un atelier al unei cooperative se află două bucăţi de mătase de calităţi diferite. Prima bucată, cu preţul de $93\frac{3}{4}$ lei metrul, costă cu $187\frac{1}{2}$ lei mai puţin decît a doua, cu toate că este cu $1\frac{1}{2}$ m mai lungă decît bucata a doua, al cărei preţ este de $112\frac{1}{2}$ lei metrul. Să se afle lungimea fiecărei bucăţi.

R. 19 m; 17,50 m.

20. Cinci ţărani cooperatori au primit pentru o parte din normele de muncă efectuate 8 591 de lei. Să se afle partea ce s-a cuvenit fiecăruia, ştiind că al doilea a primit $\frac{3}{4}$ din ceea ce a primit primul, al treilea $\frac{3}{4}$ din ceea ce a primit al doilea, al patrulea $\frac{3}{4}$ din ceea ce a primit al treilea, iar al cincilea $\frac{3}{4}$ din ceea ce a primit al patrulea.

R. I. 2 816; II. 2 112; III. 1 584; IV. 1 188; V. 891 lei.

21. Intr-o ladă se află 0,208 t de mălai,iar în alta 0,01t. De cîte ori trebuie să se adauge în fiecare ladă cîte 7 kg pentru ca în prima ladă să fie o cantitate de mălai de patru ori mai mare decît în a doua ?

R. De 8 ori.

22. Intr-un hambar sînt de două ori mai multe cereale decît în altul. Dacă se scot din primul hambar 750 t şi se aduc în hambarul al doilea 350 t, amîndouă hambarele conţin aceeaşi cantitate de cereale. Cîte tone de cereale au fost la început în fiecare hambar ?

R. 2 200 t; 1 100 t.

23. Un atelier prelucrează trei bucăți de metal: primele două bucăți au aceeași masă, iar a treia cît primele două la un loc. Cîte kilograme are fiecare bucată, dacă prima și a treia au împreună 15 kg ?

R. 5 kg; 5 kg; 10 kg.

24. Un copil avea un număr de bile în două cutii, *A* și *B*. Dacă la bilele din cutia *A* s-ar adăuga încă 4, atunci în cutia *B* ar fi de patru ori mai multe decît în *A*; dacă însă la cutia *B* s-ar adăuga 2 bile, atunci în această cutie ar fi de șase ori mai multe bile decît în *A*. Cîte bile au fost în fiecare cutie ?

R. 9 și 52.

25. La un centru de pîine, aproape de închidere, vin 5 cumpărători. S-a vîndut primului cumpărător jumătate din cantitatea de pîine pe care o mai avea înainte de închidere și încă o jumătate de pîine; cumpărătorului al doilea i s-a vîndut jumătate din pîinile rămase și încă jumătate de pîine. In același fel s-au vîndut pîinile la încă doi cumpărători. Cînd s-a apropiat al cincilea cumpărător, mai rămăsese o singură pîine. Cîte pîini mai avea de vînzare centrul de pîine înainte de închidere ?

R. 31 pîini.

26. La o cooperativă agricolă de stat sau arat într-o zi cu 20 ha mai mult decît $\frac{2}{5}$ dintr-un lot al cooperativei. Din cauza timpului nefavorabil, în ziua a doua s-a arat cu 10 ha mai puțin decît $\frac{5}{13}$ din ceea ce a rămas, iar în a treia zi $\frac{1}{3}$ din noul rest. Știind că au mai rămas de arat pentru ziua a patra 60 ha, să se afle cîte hectare are lotul.

R. 250 ha.

27. Un elev a dat din suma care a scos-o de la CEC, pentru 4 caiete cu un leu mai puțin decît $\frac{1}{2}$ din sumă. Din banii rămași a dat $\frac{5}{7}$ și încă 3 lei pentru abonament pe 6 luni la "Gazeta matematică" și astfel i-au rămas 3 lei. Ce sumă a scos elevul de la CEC ?

R. 40 lei.

28. Un elev a cheltuit o sumă de bani astfel: prima dată jumătate din banii săi și încă un leu, a doua oară jumătate din rest și încă 1 leu, a treia oară $\frac{1}{2}$ din rest și încă 3 lei, cheltuind asfel întreaga sumă. Cîți lei a cheltuit ?

R. 30 de lei.

29. O cantitate de pește a fost împărțită la trei magazine astfel: primul a primit $\frac{2}{3}$ din întreaga cantitate de pește prins, al doilea a primit 0,3 din ceea ce a rămas, iar al treilea restul; primul magazin a primit cu 143 kg mai mult pește decît al treilea. Cîte kilograme de pește a primit fiecare magazin ?

R. I. 220 kg; II. 33kg; III. 73 kg.

30. Intr-o zi s-a scos $\frac{1}{5}$ din grîul ce se află într-un hambar, în ziua a doua $\frac{1}{3}$ din rest, în a treia zi s-a scos de 3 ori mai mult grîu decît în a patra zi, iar în ziua a patra a fost scoasă toată cantitatea de grîu rămasă, adică cu 16 t şi 5 q mai puţin decît în prima zi. Cîte tone de grîu au fost în hambar ?

Indicaţie. In ziua I şi a II-a s-a scos din hambar $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{1}{5}+\frac{4}{15}=\frac{7}{15}$ deci pentru a III-a şi a IV-a zi au mai rămas $\frac{8}{15}$ din cantitatea iniţială. Ştiind că în ziua a treia s-a scos de 3 ori mai mult decît în a patra zi, rezultă că din cele $\frac{8}{15}$ rămase, s-au scos $\frac{6}{15}$ în ziua a III-a şi $\frac{2}{15}$ în ziua a IV-a. Conform enunţului, se deduce că $\frac{1}{15}$ din cantitatea totală reprezintă 16,5 t.

R. 247,5 t.

31. Un lot agricol a fost semănat astfel: 0,24 din el cu grîu, 0,25 din rest cu ovăz, 0,5 din rest cu cartofi, iar pe lotul rămas s-a pus floarea soarelui. Cîte hectare avea acel teren, dacă diferenţa dintre partea semănată cu floarea soarelui şi cea semănată cu ovăz a fost de 50,312 ha ?

R. 529,6 ha.

32. Doi taxatori de tramvai, funcţionînd unul la cl.I şi celălalt la cl. a II-a, aveau bilete de valori diferite. $\frac{2}{5}$ din toate biletele erau de 0,25 lei, $\frac{4}{10}$ din numărul rămas de bilete erau de cîte 0,35 lei, iar restul erau bilete de cîte 0,40 lei şi valoarea acestora din urmă era de 144 lei. Cîte bilete au avut cei doi taxatori şi care este valoarea lor în lei ?

R. 1 000 de bilete în valoare de 328 lei.

33. Un tractorist trebuia să are 18 ha şi a depăşit norma cu un anumit procent. Un al doilea tractorist trebuia să are 24 ha şi a depăşit norma, procentul de depăşire fiind cu 3 unităţi mai mare decît la primul. Amîndoi tractoriştii au arat împreună 44,82 ha. Cu cît la sută a depăşit norma primul tractorist ?

R. 5% .

34. Trei strungari lucrează într-un atelier, la 3 strunguri cu turaţii diferite. Primul strung face 360 de rotaţii pe minut, al doilea 270 de rotaţii pe minut şi al treilea 240 de rotaţii pe minut. a) După cît timp toţi strungarii vor termina piesa în acelaşi moment ? b) Cîte piese produce atelierul în medie pe oră, dacă se ştie că pentru o piesă fiecare strung trebuie să facă 900 de turaţii iar, strungarii lucrează cu acelaşi ritm ? c) Fie P mulţimea ale cărei elemente sînt numărul de piese făcute de cele trei strunguri pe oră şi M mulţimea ale cărei elemente sînt trei numere proporţionale cu cele trei elemente ale mulţimii P în aşa fel ca aceste numere sa fie mai mici ca numerele ce sînt elementele mulţimii P şi să aparţină mulţimii numerelor naturale. Scrieţi aceste mulţimi. d) Determinaţi $P \cap M$.

R. a) In 30 de minute vor face toţi un număr întreg de piese şi anume 12; 9; 8; b) $19\frac{1}{3}$ piese; c) $P=\{24;18;16\}$; $M=\{12;9;8\}$; d) $\emptyset$.

35. Două brigăzi, avînd împreună 25 de tractorişti, ară în 12 zile 2 040 ha. Un tractorist din prima brigadă ară 6 ha pe zi şi unul din a doua, 8 ha pe zi. a) Cîţi tractorişti sînt în fiecare brigadă ? b) Ce economie au realizat cele două brigăzi, dacă prima economiseşte 2 ℓ de combustibil la ha şi a doua, 1,5 ℓ la ha şi dacă litrul de combustibil costă 2,20 lei ? c) Să se scrie mulţimea M ale cărei elemente sînt cifrele ce reprezintă numărul de tractorişti din prima şi a doua brigadă. d) Fie N mulţimea factorilor primi ai c.m.m.m.c. al numerelor de tractorişti din cele două brigăzi. Să se scrie relaţiile: $M \cup N$ şi $M \cap N$. e) Ce relaţii mai puteţi pune în evidenţă între elementele celor două mulţimi ?

Indicaţie. Dacă toţi tractoriştii ar fi arat cîte 6 ha pe zi, atunci 25 de tractorişti ar fi arat 150 ha pe zi, iar în 12 zile 1 800 ha. In realitate, ei au lucrat cu 2 040–1 800=240 ha mai mult, ceea ce provine din faptul că tractoriştii din a doua brigadă au arat cu 8–6=2 ha mai mult pe zi, prin urmare în 12 zile, cei din a doua brigadă au arat în plus 24 ha.

Observaţie: Problema se putea rezolva presupunînd că toţi tractoriştii ar fi arat cîte 8 ha pe zi.

R. a) 15; 10. b) 7 920 lei. c) $M=\{0; 1; 5\}$.

36. Un lucrător face cîte a piese pe zi, iar un altul cu b piese mai mult pe zi, dar a lucrat cu c zile mai puţin decît primul. a) Să se afle cîte zile a muncit fiecare, ştiind că ei au lucrat acelaşi număr de piese. b) Caz numeric: $2<a<25, a \in N$ ai cărui divizori scrişi în ordinea crescătoare fără extreme, alcătuiesc mulţimea $M=\{3; 4; 6; 12\}$, $b=4$ şi $c=3$.

Indicaţie. a) Pentru primul muncitor $\frac{c(a+b)}{b}$ zile. Numărul de zile lucrate pentru al doilea muncitor $\frac{ac}{b}$. b) Primul muncitor, lucrînd cîte 24 de piese zilnic, în cele trei zile lucrate în plus a făcut 72 piese. Numărul pieselor lucrate de fiecare dintre cei doi lucrători fiind acelaşi, cel de-al doilea lucrător a făcut acest număr de 72 de piese lucrînd mai multe piese în fiecare zi. Ştim că a lucrat cu 4 piese pe zi mai multe decît primul; a realizat deci cele 72 de piese în 18 zile.

R. b) 21 zile; 18 zile.

37. O brigadă a unei cooperative agricole de producţie trebuia sa semene un ogor în 14 zile. Depăşind norma cu 2 ha pe zi, a terminat semănatul în 10 zile. Cîte hectare trebuia să semene brigada pe zi şi cîte hectare au fost semănate în total ?

Indicaţie. Brigada a lucrat cu 4 zile mai puţin, deoarece a semănat cîte 2 ha în plus pe zi, deci, în 10 zile a semănat 20 ha în plus faţă de normă. Pentru cele 20 ha ar mai fi trebuit 4 zile.

R. 70 ha în total.

38. In două depozite s-au adus 4 365 kg de orez. Ştiind că 3/5 din cantitatea de orez adus la depozit împreună cu 11/15 din cantitatea de orez adus la al doilea depozit reprezintă 2 821 $\frac{2}{5}$ kg. Să se afle cît orez s-a adus la fiecare depozit?

Indicaţie. Ştim că $\frac{9}{15}$ din prima categorie şi cu $\frac{11}{15}$ din a doua fac 2 821,40 kg. Aşezăm cercurile ce reprezintă grămezile unul sub altul, ca în figura III.1 şi apoi grupăm un cerc plin • cu un cerc ◦, aşa cum se vede în schemă. Fiecare grupare ca aceasta reprezintă o cantitate ce cîntăreşte, 4 365:15=291 kg. Insă sînt 9 grupări de acest fel. Ele vor reprezenta 291 9=2 619 kg. Dacă din 2 821,40 kg scădem 2 619 kg, rămîn 202,40 kg care reprezintă cît cîntăresc cele două grămezi rămase, notate cu 2

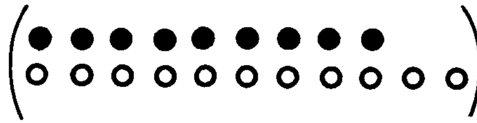


Fig.III.1

cercuri goale. Rezultă că o grămadă reprezentată printr-un cerc gol cîntărește 101,20 kg.

R.2 847 kg; 1 518 kg.

39. Să se găsească numerele A și B, știind că admit pe 40 ca cel mai mare divizor comun și pe 3 600 ca cel mai mic multiplu comun.

R. O soluție este $A=D=40$; $B=M=3\,600$; putem lua pentru A și B și alte valori, studiind descompunerea în factori a numerelor 40 și 3 600.

40. Doi concurenți, participînd la un concurs, au răspuns corect -primul la 8 întrebări, al doilea la 6 întrebări. Suma primită de fiecare drept premiu este proporțională cu numărul de întrebări la care a răspuns corect. Ce sumă a primit fiecare, dacă $\frac{1}{6}$ din suma primită de al doilea concurent, mărită cu 25% din suma primită de primul, este cu 1 100 de lei mai mică decît sumele primite de ei împreună.

Indicație. Primul a primit 8 părți, iar al doilea, 6 părți. In total 14 părți. O parte este $\frac{1}{14}$ din întreg. Dacă din tot întregul scădem a 4-a parte din cît a luat primul, adică două părți, și $\frac{1}{6}$ din cît a luat al doilea, adică o parte, în total 3 părți, obținem 1 100 de lei→11 părți fac 1 100 lei.

R. 800 lei; 600 lei.

41. Trei tineri A,B și C au primit 1 520 de lei. Suma primită de cel de-al doilea reprezintă $\frac{4}{5}$ din suma primită de primul tînăr, iar suma primită de cel de-al doilea se raportează la suma primită de cel de-al treilea ca numerele $6\frac{1}{2}:9\frac{1}{8}$. Să se afle cîți lei a primit fiecare tînăr.

Indicație. Presupunem că A a primit 65 lei, atunci B primește $65\cdot\frac{4}{5}=52$ de lei, iar C primește $65\cdot\frac{73}{65}=73$ lei. 1 520:190=8 ori mai mică decît cea din enunț. Rezultă că sumele primite de cei trei tineri vor fi de 8 ori mai mari decît cele presupuse de noi.

R. 520 lei; 416 lei; 584 lei.

42. O coloană de soldați mergea pe o șosea cu viteza de 3 km/ oră. Unui biciclist care mergea în același sens, cu viteza de 15 km/ oră, i-au trebuit 2 minute pentru a merge de la un capăt la celălalt al coloanei. Să se afle lungimea coloanei de soldați.

Indicație. In fiecare oră biciclistul va înainta cu 15-3=12 km mai mult decît coloana. Intr-un minut va înainta cu 12:60=0,2 km mai mult decît coloana, iar în două minute cu 0,2·2=0,4 km mai mult. Astfel el ajunge la capătul celălalt al coloanei, care are deci 0,4 km lungime.

R. 0,4 km.

43. Doi drumeți au pornit în același timp pe jos de la sat la oraș. Primul drumeț a sosit la oraș cu 2 ore mai tîrziu decît al doilea. Viteza primului drumeț este de

4 km/ oră, iar viteza celui de-al doilea, de 6 km/ oră. Să se determine distanța între sat și oraș.

Indicație. Fie s distanța între sat și oraș (în kilometri). Primul drumeț o parcurge într-un timp t_1: $t_1=\frac{s}{v_1}=\frac{s}{4}$ ore, iar cel de-al doilea în timpul $t_2=\frac{s}{v_2}=\frac{s}{6}$.

R. 24 km.

44. Un călător care mergea într-un tren de persoane, ce avea viteza de 40 km/ oră, a observat că un tren accelerat care mergea în sens contrar a trecut pe lîngă el în 3 secunde. Cunoscînd că lungimea acceleratului este de 75 m, să se afle viteza acceleratului.

Indicație. Viteza personalului (în care se afla călătorul) $v_1=40$ km/ oră Viteza aparentă a acceleratului: $v_2=\frac{s}{t}=\frac{75}{3}=25$ m/s $=\frac{25\cdot 3\ 600}{1\ 000}=90$ km/ oră. Viteza acceleratului: $v_a=v_2-v_1=90-40=50$ km/ oră.

Deci acceleratul avea viteza de 50 km/ oră.

R. 50 km/ oră.

45. O barcă cu vîsle parcurge o distanță în sensul cursului apei în $4\frac{1}{2}$ ore, iar împotriva curentului apei parcurge aceeași distanță în 6 ore. In cîte ore parcurge aceeași distanță o plută mînată numai de viteza apei ?

Indicație. Considerînd distanța parcursă ca un întreg, drumul parcurs în josul apei, într-o oră, va fi $\frac{1}{4,5}$, iar în susul ei, $\frac{1}{6}$.

R. 36 ore.

46. Dacă înaintea unui număr de o cifră scriem cifra 8, numărul obținut este de $4\frac{1}{2}$ ori mai mare decît acela pe care îl vom obține dacă scriem cifra 8 la sfîrșitul lui. Care este acel număr?

Indicație. Fie a cifra căutată. Dacă așezăm cifra 8 înaintea sa, înseamnă că numărul obținut se va scrie algebric $80+a$, (8 fiind cifra zecilor și a fiind cifra unităților). Dacă scriem acum cifra 8 la dreapta sa, adică numărul scris aritmetic este $\overline{a8}$, înseamnă că cifra zecilor devine a și a unităților simple 8, deci el se scrie algebric $10a+8$. Enunțul problemei conduce la ecuația: $a+80=\frac{9}{2}(10a+8)$, cu soluția $a=1\rightarrow$ numărul căutat este 1.

R. 1.

47. O lucrare trebuia terminată de 18 muncitori în 25 de zile. In cît timp a fost terminată lucrarea, dacă doi muncitori au depășit norma cu 25%, iar alți doi muncitori cu 12,5% ?

Indicație. Dacă doi muncitori au depășit norma cu 25% înseamnă că ei au produs în plus, la un loc cît jumătate din norma unui muncitor; de asemenea, dacă doi muncitori au depășit norma cu 12,5% ei au produs în plus cîte un sfert din norma unui muncitor. Situația este ca și cum s-ar fi efectuat: $18+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=18\frac{3}{4}$ norme. Acum problema se reduce la o regulă de trei simplă.

R. 24 zile.

48. Locatarii unei case trebuie sa plătească încălzitul pe o zi. Dacă fiecare dintre ei ar plăti cîte 10 lei, ar mai lipsi 88 de lei, iar dacă fiecare ar da cîte 10,80 lei, s-ar strînge cu 2,5% mai mult decît trebuie. Cît costă încălzitul casei şi cîţi locatari sînt în casă ?

R. 164 locatari; 1 728 lei.

49. Alama este un aliaj de aramă şi zinc. O bucată de alamă cu o masă de 124 g, fiind cufundată în apă, "pierde" din masa sa 15 g. Cîtă aramă şi cît zinc conţine bucata de alamă, ştiind că 89g de aramă "pierd" în apă 10 g, iar 7 g de zinc "pierd" 1 g ?

Indicaţie. Dacă cele 89 g de aramă "pierd" din masă 10 g sub apă, conform principiului lui Arhimede, atunci 1 g "pierde" $\frac{10}{89}$ g, cele x grame de aramă "pierd" sub apă $\frac{10x}{89}$ g. Dacă cele 7 g de zinc "pierd" 1 g sub apă atunci: 1 g "pierde" $\frac{1}{7}$ g.

R. 80 g aramă; 35 g zinc.

50. Un aliaj de aur şi aramă are titlul de 0,650 şi are masa de 10 g. Cît aur curat trebuie să-i adăugăm pentru a avea un aliaj cu titlul de 0,950 ?

Indicaţie. T=Titlul unui aliaj este raportul dintre masa metalului preţios (m) pe care îl conţine şi masa totală a aliajului (M), adică $T=\frac{m}{M}$. Calculăm mai întîi masa aurului corespunzătoare la 10 g aliaj cu titlul de 0,650; se obţin 6,5 g.

R. 60 (grame aur).

51. Un aliaj este format din 10 g aur şi 20 g argint. Cît aur trebuie să-i adăugăm pentru a obţine un aliaj cu titlul de 0,800 ?

R. 70 g aur.

52. Un aliaj de 4 kg cu titlul de 0,900 este făcut dintr-o bucată de aur cu titlul de 0,700 şi o alta cu titlul de 0,950. Ce cantitate din fiecare fel de aur a intrat în aliaj ?

Rezolvare. $\left.\begin{matrix}0{,}950\\0{,}700\end{matrix}\right\rangle 0{,}900 \left\langle\begin{matrix}0{,}200\\0{,}050\end{matrix}\right\} \frac{0{,}200}{0{,}050}=\frac{20}{5}$; 20+5=25 părţi. Acum calculăm cantitatea luată din fiecare bucată de aur: $\frac{4\cdot 20}{25}=3{,}2$ kg; $\frac{4\cdot 5}{25}=0{,}8$ kg.

R. 3,2 kg; 0,8 kg.

53. Secţia de strungărie a unei întreprinderi trebuie să confecţioneze, 75 000 de piese. Acest număr de piese este repartizat celor trei brigăzi de strungari, compuse din 7, 8 şi 10 muncitori, proporţional cu numărul lor. Incă din prima lună a anului, cele trei brigăzi au depăşit norma lunară respectiv cu 12%, 12,5%, 13%. Să se afle numărul de piese confecţionate în această lună de către fiecare brigadă, precum şi procentul de depăşire lunară pentru întreaga secţie.

R. 21 000 piese; 24 000 piese;
30 000 piese≈12,5% depăşire.

54. Un muncitor poate să efectueze o lucrare în 12 zile. Alt muncitor ar executa aceeaşi lucrare în 15 zile. Ei au început să lucreze în acelaşi timp şi au lucrat împreună un anumit număr de zile, după care primul muncitor a fost mutat la altă lucrare, iar muncitorul al doilea a terminat partea rămasă în 6 zile. Cîte zile a lucrat primul muncitor ?

R. 4 zile.

55. Două tractoare lucrînd împreună, au arat în 15 ore a 6-a parte dintr-un teren. Dacă primul tractor ar ara singur 12 ore şi pe urmă ar lucra tractorul al doilea 20 de ore, ele ar ara 20% din tot terenul. In cît timp poate ara terenul fiecare tractor lucrînd singur ?

Indicaţie. Cele două tractoare lucrînd împreună ară într-o singură oră $\frac{1}{6}:15=\frac{1}{90}$ din întregul teren. In 12 ore, lucrînd împreună, ele ară $\frac{12}{90}=\frac{2}{15}$ din teren. Tractorul al doilea ară cu 8 ore mai mult. In acest timp el ară: $\frac{20}{100}-\frac{2}{15}=\frac{1}{15}$ din teren. Rezultă că tractorul al doilea ară întreg terenul în 120 de ore. Primul tractor ară în 15 ore $\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24}$ din teren, iar întregul teren în 360 de ore.

R. 360 ore; 120 ore.

56. Cîţiva excursionişti au angajat o barcă pentru 3 ore şi au pornit în sensul curentului apei. Cu cîţi km pot să se depărteze ei de la debarcader ca să ajungă înapoi în 3 ore, dacă viteza bărcii în apă stătătoare este de 7,5 km/ oră, iar viteza apei este de 2,5 km/ oră ?

Indicaţie. Să notăm cu s spaţiul parcurs, socotit în kilometri; 7,5+2,5=10 km/ oră =viteza la dus. Timpul necesar va fi: $\frac{s}{10}$ ore. Viteza la întoarcere este de 7,5–2,5=5 km/ oră, iar timpul $\frac{s}{5}$. Timpul dus-întors este de 3 ore, adică: $\frac{s}{10}+\frac{s}{5}=3$, deci $s=10$ km.

R. 10 km.

57. Lungimea circumferinţei roţii dinapoi a unei căruţe este de 2 ori mai mare decît lungimea circumferinţei roţii dinainte. Pe distanţa de 300 m roata dinainte a făcut cu 100 de învîrtituri mai multe decît cea dinapoi. Să se afle lungimea circumferinţei fiecărei roţi.

Indicaţie. Deoarece lungimea circumferinţei roţii din faţă este de 2 ori mai mică, înseamnă că a făcut de 2 ori mai multe învîrtituri decît roata din spate. Deci, diferenţa dintre numărul de învîrtituri făcute de cele două roţi este egală cu numărul de învîrtituri făcute de roata din spate. Roata din spate a făcut 100 de învîrtituri deci, circumferinţa roţii din spate este de 3 m. Circumferinţa roţii din faţă este: 3:2=1,5 m.

R. 3 m; 1,5 m.

58. Un grup de elevi pleacă cu bicicletele în excursie de la Bucureşti spre o pădure situată la o distanţă de 40 km de locul de plecare. O dată cu ei, pleacă şi un motociclist. Bicicliştii merg cu 12 km/ oră, iar motociclistul cu 36 km/ oră. Motociclistul ajunge la pădure, unde se odihneşte o oră, apoi se întoarce în întîmpinarea bicicliştilor. După cît timp de la plecarea din Bucureşti îi întîlneşte pe elevi şi la ce distanţă de Bucureşti ?

Indicaţie. Motociclistul, mergînd cu 36 km/ oră, a parcurs 40 km în $1\frac{1}{9}$ ore şi a mai stat o oră în pădure;deci, în total, s–au scurs de la plecarea lui din Bucureşti $2\frac{1}{9}$ ore. In acest răstimp, bicicliştii au parcurs $\left(2\frac{1}{9}\right)\cdot(12)$km, adică $25\frac{1}{3}$ km şi au ajuns în punctul A (v.fig.III.2).

Urmează că de la A la pădure sînt: $40-25\frac{1}{3}=14\frac{2}{3}$ km. Această sdistanţă o parcurg bicicliştii, de la A către pădure, cu 12 km/ oră, iar motociclistul de la P la A, cu o viteză de 36 km/ oră, adică de trei ori mai mare, deci în timp ce bicicliştii fac un sfert din distanţa AP, motociclistul face trei sferturi. Găsim distanţa de

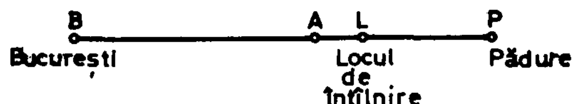


Fig.III.2

la *A* pînă la locul de întîlnire *L*, apoi timpul respectiv.

R. $\frac{29}{12}$ ore; 29 km.

59. Tatăl a chemat pe feciorul său cel mare şi i–a spus: în sertarul bibliotecii vei găsi o casetă cu o sumă de bani, ce nu depaşeşte 50 lei; să-ţi iei partea ta şi să laşi acolo restul pentru ceilalţi doi fraţi ai tăi, ţinînd seama că toţi trebuie să primiţi sume egale. Copilul a putut face acest lucru corect după ce i–a dat 1 leu mamei sale. A chemat apoi pe fiul mijlociu căruia i–a spus acelaşi lucru. Acesta crezînd că este primul care împarte suma, a putut face aceasta după ce i–a dat mai întîi şi el 1 leu mamei sale. Al treilea fecior crezînd şi el că este primul ce împarte suma a făcut şi el acelaşi lucru ca şi fraţii săi. Ce sumă a fost în sertar iniţial şi ce sumă a găsit fiecare în sertar ?

60. Se dau trei săculeţe cu nuci; în fiecare din ele se află un acelaşi număr de nuci. Dacă se iau cîte 8 nuci din fiecare săculeţ, rămîn în toate cele trei săculeţe tot atîtea nuci cîte au fost la început în fiecare săculeţ. Cîte nuci sînt în fiecare săculeţ ?

Indicaţie. Schiţa pentru soluţia aritmetică este dată în figura III.3.

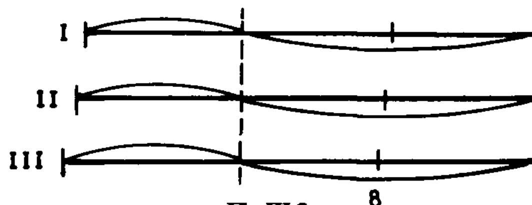


Fig.III.3

R. 12 nuci.

61. Intr–o curte sînt găini, gîşte, raţe şi curci. Numărul găinilor reprezintă 1/2 din numărul celorlalte păsări; numărul gîştelor reprezintă 1/3 din numărul celorlalte păsări; numărul raţelor reprezintă 1/4 din numărul celorlalte păsări. Ştiind că numărul curcilor este de 260, să se afle numărul total al păsărilor din curte.

Indicaţie. Schiţa pentru soluţia aritmetică este dată în figura III.4.

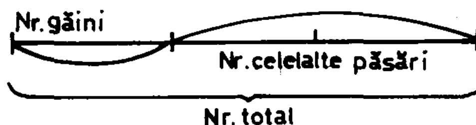


Fig.III.4

De fiecare dată se va considera mulţimea formată de celelalte pasări ca un întreg.

R. 1 200 păsări.

62. Mama este mai în vîrstă decît fiica sa de $2\frac{1}{2}$ ori. Cu 6 ani în urmă, mama era de 4 ori mai în vîrstă decît fiica. Care este vîrsta actuală a celor doua persoane ?

Indicaţie. Schiţa pentru soluţuia aritmetică este dată în figura III.5.

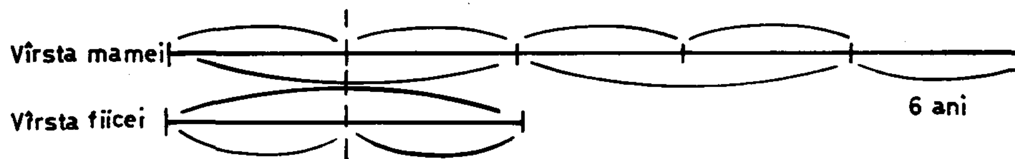


Fig.III.5

R. 30 ani, 12 ani.

63. Vîrsta tatălui reprezintă $1\frac{5}{6}$ din vîrsta fiului său. Acum 10 ani vîrsta fiului era 44,(4)% din vîrsta tatălui. Cîţi ani are tatăl ? Dar fiul ?

Indicaţie. Schiţa pentru rezolvarea aritmetică este dată în figura III.6.

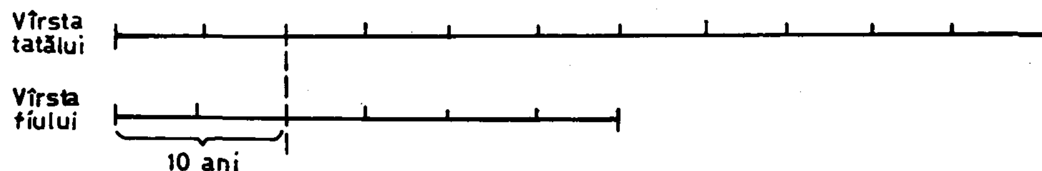


Fig.III.6

R. 55 ani; 30 ani.

64. O studentă are azi de 5 ori vîrsta pe care o avea ea, cînd fratele ei avea vîrsta ei actuală. Cînd ea avea etatea de azi a fratelui ei, suma vîrstelor va fi 88 ani. Ce etate are fiecare acum ?

Indicaţie. Schiţa pentru soluţia aritmetică.

	trecut	prezent	viitor
pentru vîrsta studentei	(1)0	(5)00000	(9)000000000
pentru vîrsta fratelui ei	(5)0	(9)00000	(13)000000000
	0000	0000	0000
			9+13=22 părţi egale corespund la 88 ani.

R. 20 ani; 36 ani.

65. Să se afle trei numere ştiind că 2/3 din primul este cît 5/8 din al doilea, iar 5/12 din al doilea valorează cît 7/18 din al treilea. Suma numerelor este 33,7.

Indicaţie. Se presupune că primul număr ar fi 21; atunci, conform enunţului, se găseşte că al doilea ar fi 22,4, iar al treilea 24. Suma celor trei numere ar fi atunci 67,4 adică dublul celei din enunţ; prin urmare, toate numerele trebuie micşorate de două ori.

R. 10,5; 11,2; 12.

70. Un copil nu are 100 de nuci, ci îi lipsesc atîtea nuci cîte ar avea peste 100,dacă ar avea de 9 ori cîte are acum. Cîte nuci are acel copil?

Indicaţie. Schiţa pentru soluţie este dată în fig.III.7.

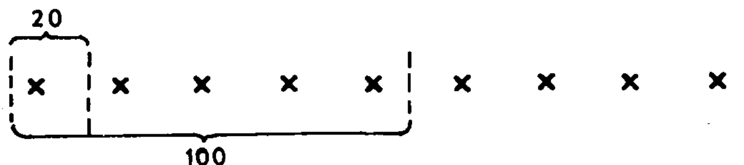


Fig.III.7

R. 20 nuci.

71. Se repartizează 22 000 volume pentru bibliotecile de la 3 licee, 2 şcoli generale şi o şcoală profesională. Fiecare liceu primeşte de 3 ori mai multe cărţi decît şcoala profesională, iar şcoala profesională primeşte de două ori mai multe cărţi decît fiecare şcoală generală. Cîte cărţi primeşte fiecare şcoală din cele trei categorii ?

Indicaţie. Schiţa pentru soluţie este dată în fig.III.8.

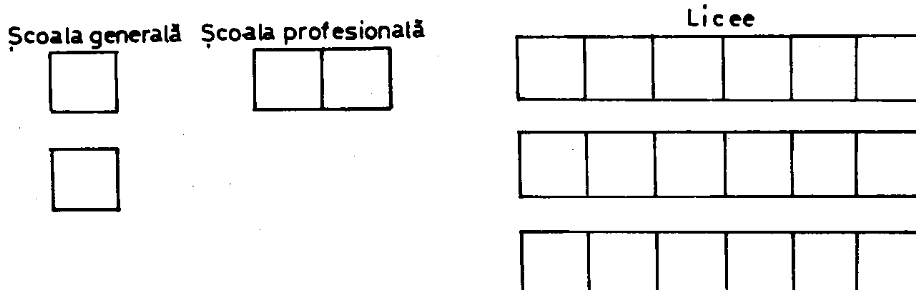


Fig.III.8

R. 6 000 vol; 1 000 vol; 2 000 vol.

72. Două ateliere care produc piese metalice au randamente diferite: dacă fiecare ar realiza 1 000 piese mai mult pe lună, atunci producţia primului atelier ar fi de trei ori mai mare decît producţia celui de–al doilea atelier, iar dacă fiecare ar lucra 1 000 piese mai puţin pe lună producţia primului atelier ar fi de 5 ori mai mare decît a celui de–al doilea atelier. Cîte piese produce lunar fiecare dintre cele două ateliere ?

Indicaţie. Schiţa pentru soluţie este dată în fig.III.9. Reprezentăm producţia celui de–al doilea atelier prin *AB*; după creşterea cu 1 000 piese, producţia devine *AC*, iar producţia primului atelier o reprezentăm prin *A'C'=3AC*. *(A'M=MN=NC'=AC)*. Notăm micşorarea de 1 000 piese cu *BP=B'P'*; rezultă *AP=NP'*. Dar *A'P'* trebuie să fie de 5 ori cît *AP*, deci *AP* se cuprinde în *A'N* de 4 ori şi în *AC* de 2 ori, adică *AP=PC* şi corespunde cu 2 000 piese, de unde rezultă că *AB* corespunde unei producţii de 3 000 piese. Producţiile sînt de 11 000 piese, respectiv 3 000 piese lunar.

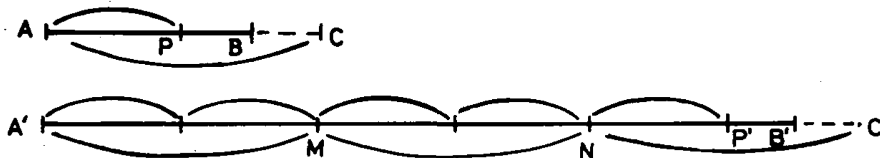


Fig.III.9

R. 11 000 piese; 3 000 piese.

73. Din producţia unei grădini de zarzavat s–a vîndut o dată 21/40 cu un cîştig de 30% faţă de cheltuieli, iar restul s–a vîndut cu suma de 2 270 lei. Ce sumă s–a încasat din această vînzare ?

Indicaţie pentru soluţia aritmetică.

Să presupunem că preţul de cost ar fi fost 100 lei. Se găseşte că pentru prima parte, vîndută cu un beneficiu de 30%, s–ar fi încasat 68,25 lei; dar cum întreaga cantitate s–a vîndut cu un beneficiu de 25%, adică s–ar fi încasat 125 lei, rezultă că pentru a doua parte a vînzării, s–ar fi încasat 125–68,25=56,75 lei. In realitate s–au încasat pentru partea a doua 2 270 lei, adică de 40 de ori mai mult (2 270:56,75=40)decît prin presupunerea noastră. Aceasta înseamnă că preţul de cost a fost 100·40=4 000 lei, iar suma încasată prin vînzare a fost 5 000 lei.

R. 5 000 de lei.

74. Să se împartă 232 în trei părţi, astfel că, dacă la prima parte se adaugă jumătate din suma celorlalte două, la a doua se adaugă a treia parte din suma celorlalte două, iar la a treia a patra parte din suma celorlalte două, rezultatele să fie egale între ele.

R. 40, 88 şi 104.

75. Intr–o pivniţă sînt trei butoaie. Dacă s–ar umple primul butoi cu apă şi s–ar turna din el în butoiul al doilea pînă ce acesta s–ar umple, în primul butoi ar rămîne $\frac{2}{7}$ din apa care era în el; dar dacă butoaiele al doilea şi al treilea, fiind pline, le–am deşerta în primul butoi, ar mai lipsi 10 litri ca acesta din urmă să se umple. Cîţi litri de apă conţine fiecare dintre aceste butoaie, dacă în toate trei încap 270 litri ?

R. 140 litri; 100 l; 30 l.

76. Perimetrul unui triunghi este de 36 m. Raportul dintre latura cea mică şi cea mare a acestui triunghi este $\frac{3}{5}$ iar diferenţa dintre latura cea mai mare şi cea mijlocie este 3 m. Să se afle laturile triunghiului.

R. 9 m; 12m; 15m.

77. Să se împartă numărul 49 în trei părţi, astfel încît dacă adăugăm primei părţi o treime din suma celorlalte două, celei de–a doua $\frac{1}{4}$ din suma celorlalte două şi celei de–a treia $\frac{1}{5}$ din suma celorlalte două, să obţinem numere egale.

R. 13; 17; 19.

78. O marfă se vinde cu un cîştig de 0,11 din preţul ei de cost; dar acest cîştig este mai mic cu 181,50 lei decît 0,11 din întreaga sumă încasată prin vînzarea mărfii. Care este preţul de cost al mărfii, dar preţul de vînzare ?

Indicaţie pentru soluţia aritmetică. Să presupunem că preţul de cost al mărfii ar fi fost 100 lei; atunci cîştigul ar fi fost, conform condiţiilor din enunţ, de 11 lei, deci suma încasată din vînzare ar fi fost 111 lei. Fracţia 0,11 din întreaga sumă încasată este atunci 0,11·111=12,21 lei, faţă de care cîştigul este mai mic cu 1,21 lei. Cum cîştigul real este mai mic cu 181,50 lei decît fracţia 0,11 din suma de vînzare, rezultă că adevăratul preţ de cost este mai mare decît cel presupus şi anume de atîtea ori mai mare de cîte cuprinderi de cîte 1,21 sînt în 181,50. Numărul acestor cuprinderi fiind 150 înseamnă că preţul real de cost este 100·150=15 000 lei.

R. 15 000 lei; 16 650 lei.

79. Dacă un kg de fructe s–ar vinde cu 2,80 lei s–ar pierde $6\frac{2}{3}\%$ din prețul său de cost; dacă aceleași fructe s–ar vinde cu prețul de 3,30 lei kg atunci s–ar cîștiga la întreaga cantitate vîndută 36 lei. Care este prețul de cost al întregii cantități de fructe?

R. 360 lei.

80. Trei asociații s–au înțeles să împartă cheltuielile pentru construcția unui pod, proporțional cu numărul de membri ai asociațiilor și invers proporțional cu distanța de la sediul asociațiilor pînă la pod. Podul costă 55 320 lei, asociațiile au respectiv, 84 membri, 156 membri, 56 membri, iar distanțele pînă la pod sînt, respectiv, de 3 km, 2,6 km și $1\frac{3}{4}$ km. Ce sumă va plăti fiecare asociație ?

R. 12 908 lei; 27 660 lei; 14 752 lei.

81. La un atelier de confecții s–au cumpărat 140 metri de mătase de trei feluri plătindu–se sumele de 9 000 lei, 6 600 lei și 4 000 lei, respectiv pentru cele trei calități. Cîți metri de mătase are fiecare bucată, dacă se știe că 1,1 m din prima calitate costă tot atît cît 1,8 m din calitatea a doua, iar $6\frac{2}{3}$ m din a doua costă tot atît cît $5\frac{1}{2}$ m din calitatea a treia.

Indicație. Judecăm astfel: dacă prima bucată de mătase ar avea 20 m, atunci 1 m ar costa 450 lei. Potrivit relațiilor date între prețuri ar rezulta că 1 m din bucata a doua costă 275 lei și deci această bucată ar avea 6 660:275=24m. Judecînd la fel pentru bucata a treia, se găsește că un metru costă $333\frac{1}{3}$ lei și ar fi 12 m. Numărul total de m ar fi astfel 20+24+12=56 m (față de 140 m dați în enunț). Cantitățile trebuie majorate de 2,5 ori (140:56=2,5).

R. 50 m; 60 m; 30 m.

82. Un biciclist mergînd dintr–un sat spre oraș, parcurge această distanță cu viteza de 8 km/h, la dus și cu viteza de 12 km/h la întors. El a mers în total 10 ore. Care este distanța de la sat la oraș ? Să se dea și soluția aritmetică.

Indicație pentru soluția aritmetică. Se va calcula timpul necesar parcurgerii unui km, atît la dus, cît și la întors, spre a putea deduce drumul străbătut în cele 10 ore de mers.

R. 48 km.

83. Un biciclist a parcurs distanța de la A la B astfel: în prima etapă a parcurs $\frac{1}{5}$ din distanța de la A la B plus 20 km. In altă etapă a parcurs $\frac{1}{6}$ din rest plus 50 km și astfel a parcurs toată distanța de la A la B. Cîți km sînt de la A la B?

R. 100 km.

84. O cooperativă agricolă a vîndut 3 000 q de cereale și anume: orz, secară și grîu, primind: pentru orz 140 000 de lei, pentru secară 120 000 de lei și pentru grîu 84 000 de lei. Știind că 6 q de orz costă cît 5 q de secară și că 7 q de secară costă cît 6 q de grîu să se afle cantitatea de chintale și costul unui chintal pentru fiecare fel de cereale.

Indicație. Să notăm cu x,y,z numerele ce reprezintă cantitățile în chintale de orz, secară și grîu vîndute de cooperativă $x+y+z=3\,000$. Scriem acum că 6 q de orz costă cît 5 q de secară:

$$\frac{6\cdot 140\,000}{x}=\frac{5\cdot 120\,000}{y}.$$

Apoi, scriem că 7 q de secară costă cît 6 q de grîu:

$\frac{7\cdot 120\ 000}{y}=\frac{6\cdot 84\ 000}{z}$. Rezultă $x=1\ 400, y=1\ 000, z=600$.

R. 100 lei; 120 lei; 140 lei.

85. Două robinete, curgînd împreună, pot umple un bazin în 8 ore. Cele două robinete au fost deschise timp de 2 ore, apoi s–a închis primul robinet şi bazinul s–a umplut în 18 ore de la închiderea primului robinet. a) In cît timp poate să umple bazinul fiecare robinet ? b) Se consideră cifrele, scrise în ordinea crescătoare a numerelor ce exprimă timpul în care cele două robinete umple bazinul, elementele mulţimilor A respectiv B. Să se determine $A–B$ şi $A\cap B$.

Indicaţie. Intr–o oră ele umplu $\frac{1}{8}$ din bazin. In două ore robinetele au umplut $2\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$. Cel de–al doilea robinet a umplut în 18 ore $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ din bazin şi, prin urmare, întregul bazin îl umple în $18:\frac{3}{4}=24$ ore.Deoarece al doilea robinet a umplut $\frac{1}{24}$ din bazin într–o oră primul va umple într–o oră $\frac{1}{8}-\frac{1}{24}=\frac{1}{12}$ din bazin şi prin urmare va umple tot bazinul în 12 ore.

R. 12 ore şi 24 ore.

86. O cadă este alimentată de două robinete: prin unul curge apă la 15°C prin celălalt la 60°C. Dacă robinetele sînt deschise amîndouă odată, apa din cadă este la temperatura de 30°C. Primul robinet umple singur cada într–o oră. In cît timp se umple cada, dacă ambele robinete sînt deschise ?

Indicaţie. La robinetul cu apă rece se cîştigă 15°C, iar la robinetul cu apă caldă se pierd 30°C. Pentru ca să se compenseze pierderea, primul robinet are un debit dublu. Tinînd seama de debitul pe oră rezultă relaţia:

$\frac{1}{60}+\frac{1}{120}=\frac{1}{40}$

R. 40 minute.

ALGEBRA

III.2. EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Să se determine mulţimea divizorilor, numere naturale, a numărului 16.

2. Să se determine mulţimea multiplilor numărului 3 cuprinşi între 8 şi 25 şi care sînt numere naturale.

3. Fie M mulţimea divizorilor, numere naturale, ai numărului 20 şi $N=\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$. Să se compare aceste mulţimi.

R. $M=N$.

4. Fie $A=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ şi $x \in A$. Să se determine x pentru fiecare din egalităţile următoare astfel încît următoarele propoziţii să fie adevărate:

$$x^2-4=0;\ x^2-1=0;\ 2x+2=0;\ 3x+1=7.$$

5. Să se determine numerele naturale x şi y astfel încît următoarele propoziţii să fie simultan adevărate: $5x+2y=19$, $2x+y=16$.

6. Fie $A=\{1; 8; 9; 10\}$. Să se determine x, y şi z astfel încît: $x-y+2z=4$, $2x+y+4z=32$; ($x\in A$; $y\in A$; $z\in A$) să fie simultan adevărate.

R. $x=10; y=8; z=1$.

7. Fie mulţimile $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $A\{x\in N|2x+3=9\}$ şi $B=\{x\in N|x^2=9\}$. $x\in M$?

8. Să se calculeze numărul x definit prin egalitatea $x=a-b-c$ ştiind că $a=-2$; $b=+4$; $c=-3$.

9. Să se calculeze numerele x şi y definite de formulele:

$x=abc; y=ab-bc-ac$ pentru $a=3$; $b=-5$; $c=-2$.

10. a) Din relaţia $X\cup A=Y\cup A$ rezultă $X=Y$?
b) Din relaţia $X\cap A=Y\cap A$ rezultă $X=Y$?

11. Să se scrie prescurtat cu ajutorul coeficienţilor următoarele expresii:

$x+x+y+y+y$; $\quad \frac{m+m}{n+n+n}$;

$a+a+b+a+b+a$; $\quad \frac{d+d+2d}{2c+c+3c+c}$;

$\frac{a}{3}+\frac{a}{3}+\frac{a}{3}$; $\quad \frac{x}{100}+\frac{3x}{100}+\frac{x}{100}-\frac{z}{10}-\frac{z}{10}-\frac{2z}{10}$.

12. Să se scrie prescurtat cu ajutorul coeficienţilor, următoarele expresii:

a) $ab+ab$; b) $abc+abc$; c) $\frac{ab+ab}{cd+cd+cd}$; d) $xy+xy+xy+xy+xy$;

e) $bcd+bcd+bcd$; f) $\frac{abc+abc+abc}{3}$; g) $\frac{k+k-mn-mn-mn}{k+k+k+mn+mn}$;

h) $(a+b)+(a+b)-(m-n)-(m-n)-(m-n)$.

13. Să se afle aria a şase loturi de grădină egale de formă dreptunghiulară cu laturile de m metri şi n metri.

14. O cameră are următoarele dimensiuni: lungimea a metri, lăţimea b metri şi înălţimea h metri. Să se exprime volumul a n camere de acelaşi fel. Să se calculeze volumul pentru: $a=5$; $b=4$ şi $h=2,5$.

15. Să se scrie sub formă generală numerele pare, numerele impare, multipli lui 5 şi multipli comuni ai numerelor 2 şi 3.

16. Să se restrîngă următoarele expresii folosind exponenţii:

$3.3.a.a.a.$; $b.b.b....b$ (de n ori);

$(a+b)(a+b)(x-y)(x-y)(x-y)$;

$(a+x)(a+x)(a+x)...(a+x)$ (de n ori).

17. Fie mulţimea M ale cărei elemente sînt numerele sub formă de produse de puteri de factori primi ai numerelor 128; 1 728; 1 000 şi mulţimea Q care are ca elemente numerele de produse de puteri de factori primi ai numerelor 384; 512; 640. Să se afle $(M \cup Q) \cap Q$.

18. Să se restrîngă următoarele expresii cu ajutorul unor coeficienţi şi exponenţi $a^3+a^3+a^3$; $y^3+y^3+y^3+y^3$; $x^2y+x^2y+x^2y$; $\frac{a \cdot a \cdot a+a \cdot a \cdot a+a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b+b \cdot b \cdot b+b \cdot b \cdot b}$.

Să se utilizeze metoda grafică la rezolvarea următoarelor trei probleme:

19. Dacă mărim de 3 ori un număr şi adăugăm la rezultat $\frac{1}{3}$ din el, obţinem numărul a. Să se afle numărul.

R. $\frac{3a}{10}$.

20. Dacă mărim de 4 ori un număr şi scădem din rezultat $\frac{1}{4}$ din el obţinem numărul b. Să se afle numărul.

R. $\frac{4b}{15}$.

21. Dacă micşorăm un număr de 2 ori şi scădem din rezultat $\frac{1}{5}$ din el obţinem a. Să se afle numărul necunoscut.

R. $\frac{10a}{3}$.

22. Dacă împărţim numărul a la numărul x şi adăugăm la rezultat b, obţinem numărul y. Să se determine x.

R. $x=\frac{a}{y-b}$.

23. Dacă împărţim numărul a la un număr x şi scădem din rezultat numărul y obţinem 0. Să se afle numărul necunoscut x.

R. $x=\frac{a}{y}$.

24. In doi saci sînt a kg de făină; în primul sac sînt cu b kg mai mult decît în al doilea. Să se exprime cîte kg de făină sînt în fiecare sac ?

R. $\frac{a-b}{2}$; $\frac{a-b}{2}+b$.

25. O mamă este mai în vîrstă decît fiul său cu x ani şi mai tînără decît tatăl cu y ani. Ştiind că toţi trei au împreună z ani să se exprime vîrsta fiecaruia.

R. fiul: $\frac{z-(2x+y)}{3}$; mama: $\frac{z-(2x+y)}{3}+x$; tatăl: $\frac{x+2y+z}{3}$.

26. Suma a două numere este a iar raportul lor este $\frac{c}{b}$. Să se determine aceste numere.

R. $\frac{ac}{c+b}$; $\frac{ab}{c+b}$.

27. Diferenţa a două numere este a iar raportul lor este $\frac{m}{n}$; $n>m$. Să se determine aceste numere.

R. $\frac{am}{n-m}$; $\frac{an}{n-m}$.

28. Să se împartă numărul m în părţi proporţionale cu numerele a, b, c.

R. $\frac{am}{a+b+c}$; $\frac{bm}{a+b+c}$; $\frac{cm}{a+b+c}$.

29. Laturile a, b, c, ale unui triunghi cu perimetrul de m cm sînt invers proporţionale cu numerele 2; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$. Să se determine laturile triunghiului în funcţie de m .

R. $a=\frac{3m}{20}$; $b=\frac{8m}{20}$; $c=\frac{9m}{20}$.

30. Cele trei dimensiuni L, l, i, ale unui paralelipiped dreptunghic, sînt proporţionale cu numerele 2; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2}$. Lungimea este mai mare decît lăţimea cu 18 cm. Să se calculeze volumul paralelipipedului în dm^3.

R. 1,156 dm^3.

III.3. VALOAREA NUMERICĂ A UNEI EXPRESII ALGEBRICE

Să se afle valorile numerice ale expresiilor algebrice:

1. $2a-3bc$ cînd $a=5, b=1, c=\frac{1}{2}$.

R. $8\frac{1}{2}$.

2. $5(x-y)$ cînd $x=14{,}2; y=6{,}8$.

R. 37.

3. $3(x^2+y^2)$, $3(x+y)^2$, $[3(x+y)]^2$ cînd $x=6, y=8$.

R. 300; 588; 1 764.

4. $2(x^2-y^2)$, $2(x-y)^2$ şi $[2(x-y)]^2$ cînd $x=10, y=7$.

R. 102; 18; 36.

5. $(a+b)(a-b)$ cînd $a=8, b=5$.

R. 39.

6. $(a+b)(c-d)$ cînd $a=10, b=4, c=1{,}1(6), d=\frac{3}{4}$.

R. $4\frac{1}{6}$.

7. $(a-b)c+d$ cînd $a=10, b=3, c=\frac{2}{7}, d=\frac{3}{5}$.

R. $2\frac{3}{5}$.

8. $a+b(c+d)$ cînd $a=10, b=14, c=\frac{2}{7}, d=\frac{3}{5}$.

R. $22\frac{2}{5}$.

9. $(2x+y)^2$ cînd $x=\frac{3}{4}, y=\frac{5}{8}$.

R. $4\frac{33}{64}$.

10. $2xy^2$ cînd $x=0{,}75$, $y=\frac{5}{8}$.

R. $\frac{75}{128}$.

11. $2a^3+3a^2-5a+6$ cînd $a=2$, $a=\frac{1}{2}$, $a=1\frac{2}{3}$.

R. 24; $4\frac{1}{2}$; $15\frac{7}{27}$.

12. $5+4x+3x^2+2x^3$ cînd $x=3, x=0,1\ x=\frac{1}{2}$. R. 98; 5,432; 8.

13. $\frac{1+a+a^2}{1+a-a^2}$ cînd $a=\frac{1}{2}$. R. $1\frac{2}{3}$.

14. $m(m-n)+2n$ cînd $m=5,4$; $n=3,9$. R. 15,9.

15. $a^2(2a+b)+3a$ cînd $a=1,5$; $b=4$. R. 20,25.

16. $\frac{a}{m}-\left(\frac{a^2}{m^2}-2\right)$ cînd $a=2\frac{1}{2}$, $m=1,4$. R. $\frac{117}{196}$.

17. $3(a^2-b^2)-4(a+b)$ cînd $a=-0,5$; $b=0,1$. R. 2,32.

18. Să se afle lungimea unei circumferințe (C) în care d este diametrul, iar $\pi=3,14$. Se va calcula cu aproximație de 0,1 prin lipsă.

d (centimetri)	15	20	18,5	10,5	0,36	1,05	3,25	2,75
$C=\pi d$								

19. Să se afle aria unui cerc A în care R este raza cercului și $\pi=3,14$. Se va calcula cu o aproximație de 0,1 prin adaos.

R (metri)	8,25	2,1	2,6	1,2
$A=\pi R^2$				

20. Să se afle volumul cilindrului V cu R raza bazei și H înălțimea.

R (metri)	2,4	1,01	0,01
H (metri)	5,2	1,5	1,1(6)
$V=\pi R^2 H$			

21. Să se arate că împărțind suma cuburilor numerelor a și b la cùbul numărului a obținem $1+\frac{b^3}{a^3}$.

22. a) Să se figureze, în raport cu un sistem de axe perpendiculare, punctele care au coordonatele $x=5, y=3$; $x=-3$, $y=-4$; $x=-4$, $y=6$; $x=5, y=-2$.

b) Să se figureze punctele care au următoarele coordonate $x=8\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$; $x=-6,5$,

$y=4{,}5$; c) Să se figureze punctele: $A\left(-3\frac{3}{4};\ 5\frac{1}{2}\right)$; $B(-0{,}8;\ -1{,}4)$.

23. a) Să se construiască triunghiul ale cărui vîrfuri A, B, C au coordonatele $A(4;\ 5)$, $B(8;\ 2)$, $C(-6;\ 3)$. b) Să se construiască patrulaterul ale cărui vîrfuri A, B, C, D au coordonatele: $A(-3;\ 8)$; $B(10;\ 6)$; $C(5;\ -5)$; $D(-7;\ -9)$.

24. Tabelul de mai jos indică temperaturile medii din luna noiembrie.

Data	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Temperatura	$+3^o$	$+5^o$	$+6^o$	$+5^o$	0^o	-3^o	-6^o	-7^o	8^o

a) Să se reprezinte sub formă de grafic variația temperaturii.
b) Cum se determină pe grafic temperatura cea mai mare şi cea mai mică a aerului din cele 9 zile ale lunii ?

25. Nivelul apei unui rîu a variat de la 1 pînă la 15 mai în comparație cu cel mijlociu în felul următor:

Data	*Nivelul apei în cm*	*Data*	*Nivelul apei în cm*	*Data*	*Nivelul apei în cm*
1	10	6	20	11	0
2	12	7	17	12	-3
3	15	8	14	13	-3
4	18	9	10	14	-5
5	22	10	5	15	-8

a) Să se facă graficul variației nivelului apei din rîu în acest interval de timp. b) Să se arate pe grafic nivelul cel mai ridicat şi cel mai scăzut al apei din acest timp.

26. Figura III.10 reprezintă graficul variației drumului S în funcție de durata mişcării t în cazul unui drumeț care are o mişcare uniformă. Să se afle, cu ajutorul graficului, drumul S parcurs în timp de: 2 ore; $2\frac{1}{2}$ ore; 3 ore; $3\frac{1}{2}$ ore; 4 ore; $4\frac{1}{2}$ ore.

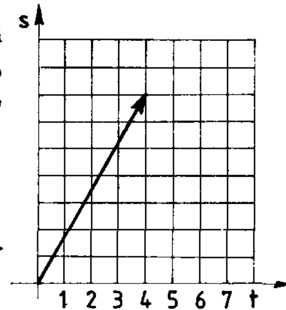


Fig.III.10

27. Pentru măsurat stofele se utiliza cotul, înainte de introducerea metrului. Ştiind că 1 cot=0,64m, să se construiască graficul pentru transformarea metrilor în coți şi invers. Să se transforme după grafic: a) în coți: 2 m, $2\frac{1}{2}$ m; $3\frac{1}{2}$ m. b) în metri: 2 coți; 3 coți; 4 coți.

28. Să se arate că produsul a două numere consecutive este divizibil cu 2 şi produsul a trei numere consecutive este divizibil cu 3.

29. Numărul x este mai mare decît numărul y cu 8. Să se scrie aceasta în trei feluri sub formă de egalităţi.

30. Să se afle mulţimea valorilor lui $x \in R$ pentru care expresia $2x-1 \leq 4$ şi $2x-1>4$.

R. $\left(-\infty;\ \frac{5}{2}\right]$; $\left(\frac{5}{2};\ +\infty\right)$.

31. Pentru ce valori ale lui a şi b avem: $a=5a$; $a=a^2$; $a^3<a^2$; $a^3=a^2$; $\frac{a}{b}=1$; $\frac{a}{b}<1$; $\frac{a}{b}>1$; $ab=a$; $ab<a$; $ab>a$?

32. Este expresia $2k$ totdeauna un număr cu soţ ? Să se scrie forma generală a multiplilor lui 7. Să se scrie forma generală a numerelor care împărţite la 3 dau restul 2.

33. Să se scrie sub formă de puteri ale numărului 10 următoarele: 10 000; 100 000; 1 000 000; 1 000 000 000.

34. Să se calculeze: $5 \cdot 10^4$; $8 \cdot 10^6$; $6 \cdot 10^{12}$. Să se scrie prescurtat folosind puterile lui 10 următoarele numere: 90 000; 500 000; 300 000; 2 000 000 000; 450 000 000 000.

35. In ce condiţii fracţia $\frac{a}{b}$ este un număr pozitiv; un număr negativ; egală cu zero; fără sens ?

36. In ce condiţii au loc relaţiile: $a+b=a-b$; $(a+b)^2=a+b$; $a+b=0$.

37. Pentru ce valori ale lui a sînt adevărate relaţiile: $a<2a$; $a=2a$; $a>2a$?

38. Să se arate în ce condiţii suma a doi termeni este: a) egală cu unul din termeni; b) mai mică decît unul din ei.

39. Pentru ce valori ale lui x următoarele propoziţii sînt adevărate:

$$\frac{x-1}{2}>0;\ \frac{x-1}{2}<0;\ \frac{x-1}{2}=0.$$

40. Care din următoarele expresii: $-a^2$ şi $(-a)^2$; $-a^5$ şi $(-a)^5$ sînt egale între ele ?

41. Pentru ce valori ale lui x, expresia $(x+2)^2$ este 0 ?

42. Pentru ce valori ale lui x expresiile: $\frac{5}{x-1}$; $\frac{7}{x-3}$; $\frac{2}{x+5}$; $\frac{1}{x+1}$ sînt pozitive, negative, fără sens?

43. Dacă $a \in N$ şi $b \in N$ se poate afirma că rădăcina ecuaţiei $x-a=b$ este întotdeauna un număr natural ?

44. Dacă $a \in N^*$ şi $b \in N^*$, care din ecuaţiile x: $a=b$; $ax=b$; $x+a=b$; $x-a=b$ nu au întotdeauna o soluţie în mulţimea numerelor naturale ?

45. Care este valoarea cea mai mică pe care poate să o aibă expresia $1+x^2$?

46. Poate expresia $\frac{1}{1+x^2}$ să fie mai mare ca unitatea ?

47. Intr-un vas se găseşte apă la temperatura de 0°. Vasul fiind pus pe foc temperatura apei se schimbă în funcţie de durata încălzirii astfel:

Timpul în minute	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temperatura apei în grade	y	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

a) Să se afle raportul a două valori oarecare ale lui x şi să se compare acest raport cu raportul valorilor, corespunzătoare ale lui y.

b) Să se formeze cîteva propoziţii cu valorile lui x şi y date în tabelul de mărimi.

c) Să se scrie forma care exprimă pe y în funcţie de x.

d) Să se calculeze temperatura apei din vas, cînd $x=15^{\circ}$ admiţînd că încălzirea se face uniform.

e) Pe baza datelor din tabel să se facă graficul variaţiei temperaturii apei din vas.

48. Din două oraşe care se găsesc la distanţe de m kilometri unul de altul, pornesc în acelaşi timp două trenuri, unul către altul. Viteza primului tren este de a km pe oră, iar viteza celui de-al doilea, de b km/ oră. Peste cîte ore se vor întîlni trenurile ?

R. $t=\frac{m}{a+b}$.

49. Dintr-un depozit de lemne s-au scos a m^3 de lemne, ceea ce reprezintă $p\%$ din toată rezerva de lemne. Să se afle care este rezerva de lemne?

R. $\frac{100a}{p}$m^3.

50. Pentru încălzirea unei clădiri s-au rezervat a tone de cărbuni. Din această rezervă s-au întrebuinţat b tone. Cîte kg de cărbuni trebuie să se ardă în medie, pe zi, aşa încît cărbunii rămaşi să ajungă t zile ?

R. $\frac{(a-b)1000}{t}$ kg.

51. Un teren de formă dreptunghiulară are lungimea de $3\frac{1}{2}$ ori mai mare decît lăţimea şi perimetrul de 360 dam. Terenul s-a amenajat pentru cultivat cartofi şi varză. Ariile suprafeţelor cultivate cu cartofi şi varză sînt invers proporţionale cu numerele $\frac{1}{6}$ şi $\frac{1}{4}$. Să se afle cîte hectare s-au cultivat cu cartofi şi cîte cu varză.

R. 33,6 ha; 22,4 ha.

52. Din două unghiuri adiacente suplementare unul este $\frac{4}{5}$ din celălalt. Să se afle unghiurile ?

53. Perimetrul unui triunghi isoscel este de 48 cm. Baza lui este cu 12 cm mai mică decît una din laturile egale. Să se afle laturile triunghiului.

R. 20 cm; 8 cm.

54. Una din laturile egale ale unui triunghi isoscel este de $3\frac{1}{3}$ ori mai mare decît baza lui. Perimetrul triunghiului este de 48 m. Să se afle laturile triunghiului.

R. 21 m, 6 m.

55. Intr-o ladă sînt a kg de zahăr, în alta b kg. Dacă mutăm din prima ladă în lada a doua c kg obţinem în amîndouă lăzile aceeaşi cantitate de zahăr. Să se scrie sub formă de egalitate, operaţiile efectuate.

R. $a-c=b+c$.

56. Viteza unui vapor în apă stătătoare este de v km pe oră, iar viteza apei este de n km pe oră. In cîte ore va parcurge vaporul distanţa de m km: a) mergînd în sensul curentului, b) împotriva curentului ?

R. a) $\frac{m}{v+n}$ ore, b) $\frac{m}{v-n}$ ore.

57. O bară în formă de paralelipiped are lungimea de a cm şi lăţimea de b cm iar înălţimea de c cm. Să se afle masa barei ştiind că densitatea barei este q.

R. $abcq$.

58. Un teren de n hectare este arat cu tractorul în a zile. Dacă aceeaşi suprafaţă ar fi arată cu plugul tras de vite, aratul s-ar efectua în b zile. Să se afle cu cît se ară mai repede într-o zi cu tractorul decît cu plugul tras de vite.

R. $\frac{n}{a}-\frac{n}{b}$.

59. Un bazin este umplut de un robinet în a ore şi de altul în b ore. A cîta parte a bazinului o va umple fiecare robinet într-o oră ?

R. $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{b}$.

III.4. OPERAŢII CU NUMERE REALE

1. $(-219)+(-7)+(319)+(-13)$.

2. $(10\,009)+(-3\;111)+(991)-(889)$.

3. $(-1\;009)+(981)+(-991)+(19)$.

4. $(3\,908)+(-2\;345)+(-1\;902)+(-635)$.

5. $\left(-2\frac{3}{5}\right)+(1{,}625)+\left(-8\frac{2}{5}\right)+\left(9\frac{3}{8}\right)$.

6. $\left(5\frac{3}{4}\right)+(-4{,}125)+(-5{,}75)+\left(-5\frac{7}{8}\right)$.

7. $[-2,(3)]+(5,375)+\left(-7\frac{2}{3}\right)+\left(4\frac{5}{8}\right)$.

8. $[(1,1(6)]+\left(-8\frac{2}{5}\right)+\left(-5\frac{1}{6}\right)+(4,2)$.

9. $(3,6)+(-8,25)+\left(-4\frac{1}{3}\right)+\left(-2\frac{3}{4}\right)$.

10. $(-261)-(-314)-(+139)-(-186)$.

11. $(235)-(+881)-(-675)-(119)$.

12. $\left(-3\frac{3}{4}\right)-(3,75)-\left(12\frac{3}{8}\right)+(-8,625)$.

13. $5,1(6)-[-8,2(2)]-\left(7\frac{3}{5}\right)+\left(-2\frac{3}{4}\right)$.

14. $\left(-1\frac{2}{5}\right)-\left(-3\frac{3}{4}\right)-\left(4\frac{3}{4}\right)-(-3,75)$.

15. $\left(-9\frac{5}{8}\right)-\left(-2\frac{2}{3}\right)-(-9,625)-\left(-7\frac{1}{3}\right)$.

16. $\left(-1\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-3\frac{3}{4}\right)+\left(-3\frac{2}{5}\right)\cdot\left(1\frac{1}{6}\right)-[(-3,3(3)]$.

17. $(8,75)\cdot\left(-3\frac{2}{5}\right)-\left(-3\frac{2}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{15}\right)+6,2(1)$.

18. $[\sqrt{8}-(-8\sqrt{2})]\cdot 3\sqrt{2}+(\sqrt{27}-2\sqrt{3})\cdot 4\sqrt{3}$. **R.** 72.

19. $[\sqrt{125}-(-3\sqrt{5})]\cdot(-4\sqrt{5})+160$. **R.** 0.

20. $\{[\sqrt{54}+7\sqrt{6}]\cdot(10\sqrt{6})-(-400)\}\cdot 10^{17}$. **R.** 10^{20}

21. $\left[\sqrt{216}-5,125+4\sqrt{6}-\left(-5\frac{1}{8}\right)\right]\cdot\sqrt{24}$. **R.** 120.

22. $\left[-5,1(9)+\sqrt{125}-\left(-\frac{26}{5}\right)-4\sqrt{5}\right]\cdot 2\sqrt{5}-10$. **R.** 0.

23. $\left[5\frac{3}{\sqrt{8}}-8,9(9)-(12)-5\frac{5}{2\sqrt{2}}\right]\left(-\frac{1}{\sqrt{20}}\right)^2$. **R.** 1.

24. $\left[3\frac{3}{\sqrt{75}}-8\frac{2}{\sqrt{98}}-\left(-7\frac{2}{5\sqrt{3}}\right)+8\frac{2}{7\sqrt{2}}\right]\cdot\frac{5\sqrt{3}}{10\sqrt{3}+1}$. **R.** 5.

25. $\dfrac{\left(3\frac{2}{3\sqrt{7}}-20\frac{4}{3\sqrt{7}}+17\frac{2}{\sqrt{63}}\right):\left(\frac{-2\,360\,789}{2\,345}\right)+\sqrt{363}}{11\sqrt{3}}$. **R.** 1.

26. $\left[\frac{8}{3\sqrt{6}}-\left(-\frac{4}{3\sqrt{11}}\right)-\frac{8}{\sqrt{54}}+\frac{6\cdot}{\sqrt{99}}\right]:\left(-\frac{5}{3\sqrt{11}}\right)$. **R.** 2.

27. $\dfrac{\sqrt{25,9(9)}:(-\sqrt{8})\cdot-\frac{\sqrt{2}}{5}}{(\sqrt{68}-\sqrt{17}):(\sqrt{4914})}\cdot\frac{1}{2}$. **R.** 17.

28. $\dfrac{\left[\sqrt{1,0816}-\left(-\frac{24}{25}\right)\right]:\sqrt{48}+\frac{7}{8\sqrt{3}}}{-\sqrt{108}-5\sqrt{3}}$. **R.** $-\frac{1}{24}$.

29. $\dfrac{\left[\sqrt{9,030025}-\left(-7\frac{99}{200}\right)\right]:\left(-10\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{245}:(-7\sqrt{5})}$. **R.** 1.

30. $\dfrac{\left[\frac{\sqrt{3^3\cdot2^3\cdot5^7}}{125\sqrt{5}}-\left(-4\sqrt{6}\right)\right]:10\sqrt{6}+\sqrt{\frac{2}{5}}}{(\sqrt{5}+\sqrt{2}):\sqrt{5}}$. **R.** 1.

31. $\left[\frac{\sqrt{(3^3\cdot5^3\cdot4^4\cdot9^{10}):(27\cdot125\cdot4^5\cdot9^9)}}{1,5}-1+\sqrt{2}\right]:\sqrt{2}$. **R.** 1.

32. $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{1}{-5}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)+\left(\frac{-2}{-5}\right)\left(\frac{4}{-3}\right)-(-2+5)$. **R.** $-\frac{83}{24}$.

33. $\frac{-3+(-5)^2}{2-9}+\frac{(+6)-(+4)}{(+3)(+2)-(-2)^2}+\frac{(+3)^2-(-2)^3}{21-(+2)^2}$. **R.** $-1\frac{1}{7}$.

34. $\left(-3-5-\frac{1}{2}\right)^2+(-1-2)^2\left(-1+5+\frac{1}{2}\right)+(-1+2)^3$. **R.** $113\frac{3}{4}$.

35. $(-1+2-3)^2+(-2+1-3)^2(-3+2-1)+(1-2)^2$. **R.** –27.

36. $\frac{(-1)(-2)}{3}+\frac{(-2)^3}{-1}+\frac{(-1)^3}{-2}+\frac{1}{-1}+\frac{1}{-2}+\frac{1}{3}$ **R.** 8.

37. $\frac{(-3)(-1)^2(-2)^3-(-5)^3(-2)^3+(+4)^2}{[(+7)-(-2)-(+1)](-5)^2}$. **R.** $-4\frac{4}{5}$.

38. $(-1)^2(1+2-3)-(2+3)(3-1-5)+(-2+1)^2(9-2+1)$. **R.** 23.

39. $[15^2-(-8)^2]^2-[15^2+(-8)^2]^2+4\cdot 15^2(-8)^2$. **R.** 0.

40. $[(4-3)(2+1)-(4-2)(3-1)](4-1)$. **R.** -3.

41. $\frac{-3^3-(-5)^3}{3^2+5^2-5\cdot 3}+\frac{15-10}{6-(-1)^3}+\frac{(-5)^2-(-1)^2}{-6-2+(-1)}-5\frac{3}{19}-\frac{5}{7}$ **R.** $-\frac{8}{3}$.

42. $\frac{-2\frac{29}{30}}{\left(6-2\frac{1}{3}-\frac{\frac{7}{2}}{\frac{4}{3}}\right):(-0,125)}-\frac{339}{250}$. **R.** -1.

43. $\frac{(-5)^3-3^3}{(-5)^2-5\cdot 3+3^2}+\frac{-10+15}{6-(-1)}+\frac{(-5)^2-(-1)^2}{-5-6+(-1)}$. **R.** $-9\frac{2}{7}$.

44. $\left(\frac{81-9}{71+1}\right)\left(\frac{-9}{9-1}-\frac{1}{-9+1}\right)$. **R.** -1.

45. $\frac{12+4\sqrt{5}}{48+16\sqrt{5}}+\left(\frac{-3}{4}\right)\left(-\frac{2}{9}\right)+\frac{5}{6}$. **R.** $1\frac{1}{4}$.

46. $\frac{(-2)}{-3}+\frac{(-2)(+3)}{-1}+\frac{(-3)}{-2}+1+\frac{1}{-2}+\frac{1}{-3}$. **R.** $8\frac{1}{3}$.

47. $\left[\left(-1\frac{5}{6}\right)+(2,5)+5\right]-8+\left(-\frac{3}{4}\right)+\left[\left(-3\frac{1}{2}\right)+9\right]$. **R.** $2\frac{5}{12}$.

48. $\frac{(3)+(-7)+(-5)+(10)+(-4)+(+4)}{(-5)+(-7)-(+4)+(+10)+(-2)}$. **R.** $-\frac{1}{8}$.

49. $\frac{7+(-2)-(-3)-4+(+5)-(-1)}{(-3)(-2)(-1)}$. **R.** $-1\frac{2}{3}$.

50. $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right):\left[\left(\frac{5}{6}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{-3}{5}\right)(-3)\right]$. **R.** $\frac{-3}{8}$.

51. $\dfrac{(-5):(+5)+(+3):\left(+\frac{3}{5}\right)}{\frac{3}{5}:\left(\frac{-2}{5}\right)}$. **R.** $-2\frac{2}{3}$.

52. $\dfrac{16+8\sqrt{5}-4-4\sqrt{5}}{56+24\sqrt{5}-24-8\sqrt{5}+16}$. **R.** $\frac{1}{4}$.

53. $\dfrac{-\sqrt{27}+2\sqrt{75}-9\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}}$. **R.** 1.

54. $\dfrac{\left[(-5)-(-0{,}25)+\left(-2\frac{1}{4}\right)\right]\sqrt{7}}{(-6\sqrt{7})+(\sqrt{343})}$. **R.** –7.

55. $\dfrac{\left[\left(\frac{-2}{5}\right)+(+1{,}5)-\left(-\frac{9}{10}\right)+(-1)\right]^2}{\frac{1}{2}+2\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\sqrt{\frac{5}{4}}\cdot\frac{1}{4}:\sqrt{\frac{5}{3}}}$. **R.** 1.

56. $\dfrac{\left[\left(\frac{-2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{-3}\right)^2-\left(-\frac{4}{9}\right)+(-2)^2\right]^3}{\left(-\frac{5}{6}\right)^3-(-1)^3-1}$. **R.** –216.

III.5. ECUAŢII

Să se determine x din următoarele ecuaţii:

57. $\dfrac{\sqrt{\frac{867}{75}}-\left(-\frac{3}{5}\right)}{x}=\dfrac{\sqrt{841}\cdot 12}{\sqrt{2523}\cdot\sqrt{3}}$. **R.** $x=1$.

58. $\dfrac{3\sqrt{722}\cdot\sqrt{2}}{38\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{598}}{x}$. **R.** $x=11\frac{1}{3}$.

59. $\dfrac{\frac{\sqrt{845}}{13}-\left(-\frac{7\sqrt{5}}{7}\right)}{7\sqrt{5}}=\dfrac{x}{10}$. **R.** $x=20$.

60. $x\left[\dfrac{\sqrt{5^3}\cdot 8^2\cdot 3^2}{\sqrt{375\cdot 192}}-(-6)\right]=\dfrac{1-\dfrac{1-\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1}}}{2-\dfrac{1}{2}}}{\sqrt{968}:88\sqrt{2}}.$ **R.** $\frac{8}{75}$.

61. $\dfrac{2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}}}{1,1(6)}=1\dfrac{5}{7}.$ **R.** $x=-\frac{1}{2}$.

62. $\dfrac{1+\dfrac{1}{-2-\dfrac{1}{-1-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{5}}}}}{5:19x}-\dfrac{1-\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{4}}}}}{(30x-43):(30x-13)}=1.$ **R.** $x=2$.

III.6. SISTEME DE ECUAȚII

Să se rezolve următoarele sisteme de ecuații:

63. $\begin{cases}\dfrac{x-1}{y-1}=\dfrac{1}{5}\\ \dfrac{x+4}{y+4}=\dfrac{2}{5}\end{cases}.$ **R.** (4; 16).

64. $\begin{cases}0,25x+0,04y=2\\ 4x+25y=641\end{cases}$ **R.** (4; 25).

65. $\begin{cases}x+\dfrac{5y-1}{3}=-\dfrac{2}{3}\\ 3y-\dfrac{2x+3}{2}=-\dfrac{21}{2}\end{cases}.$ **R.** (3; –2).

66. $\begin{cases}\dfrac{5}{x-1}:\dfrac{4}{y-1}=25:24\\ \dfrac{2}{x+1}:\dfrac{3}{y+1}=7:12\end{cases}.$ **R.** (7; 6).

67. $\begin{cases}\dfrac{x+y}{3}+x=15\\ y-\dfrac{y-x}{5}=6\end{cases}.$ **R.** (10; 5).

68. $\begin{cases}\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{3}=8\\ \dfrac{x+y}{3}+\dfrac{x-y}{4}=11\end{cases}.$ **R.** (18; 6).

69. $\begin{cases}\dfrac{3x-5y}{2}+3=\dfrac{2x+y}{5}\\ 8-\dfrac{x-2y}{5}=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}\end{cases}.$ **R.** (12; 6).

70. $\begin{cases}\dfrac{5}{x+4}=\dfrac{2}{y-1}\\ \dfrac{3}{x+2}=\dfrac{4}{y+1}\end{cases}.$ **R.** (1; 3).

71. $\begin{cases}x-y=\dfrac{1}{12}\\ 18x-5y=4\dfrac{3}{4}\end{cases}.$ **R.** $\left(\dfrac{1}{3};\ \dfrac{1}{4}\right)$.

72. $\begin{cases}\dfrac{ay}{bx}=\dfrac{d}{c}\\ bx+ay=d+c\end{cases}.$ **R.** $\left(\dfrac{c}{b};\ \dfrac{d}{a}\right)$.

73. $\begin{cases}\dfrac{1}{2}y-3x=2\\ y=14x\end{cases}.$ **R.** $\left(\dfrac{1}{2};\ 7\right)$.

74. $\begin{cases} \dfrac{9x-y}{8}=1 \\ 7(x-1)=\dfrac{1}{9}(1-y) \end{cases}$ **R.** (1; 1)

75. $\begin{cases} x(y-1)-y(3+x)=4 \\ \dfrac{x+2y-3}{y-x+2}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$. **R.** (5; –3).

76. $\begin{cases} 5+4(0{,}1x+1)=1{,}1y \\ 5+4\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=\dfrac{11+0{,}3y-x}{x} \end{cases}$. **R.** determinat; (5; 10).

77. $\begin{cases} \dfrac{x-y+1}{y-x+1}=\dfrac{-3}{5} \\ \dfrac{2x+3y-5}{6+2y-x}=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$. **R.** determinat; (–2; 2).

78. $\begin{cases} 2x-\dfrac{11y}{3}+\dfrac{5}{3}=0 \\ 48x-88y=-15 \end{cases}$. **R.** incompatibil.

79. $\begin{cases} 8-\dfrac{z-2y}{5}=\dfrac{z}{2}+\dfrac{y}{3} \\ 2y-21z+240=0 \end{cases}$. **R.** nedeterminat.

Să se rezolve următoarele sisteme de ecuaţii, în care a,b şi c reprezintă numere date.

80. $\begin{cases} (a+c)x-by=bc \\ x+y=a+b \end{cases}$. **R.** $(b; a)$.

81. $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=c \\ \dfrac{x}{b}-\dfrac{y}{a}=0 \end{cases}$. **R.** $\left(\dfrac{ab^2c}{a^2+b^2}; \dfrac{a^2bc}{a^2+b^2}\right)$.

82. $\begin{cases} \dfrac{x+y-a}{x+y+a}=\dfrac{2}{3} \\ 2x-3y=-5a \end{cases}$. **R.** $(2a; 3a)$.

83. $\begin{cases} a(x+y)+b(x-y)=1 \\ a(x-y)+b(x+y)=1 \end{cases}$. **R.** $\left(\dfrac{1}{a+b}; 0\right)$.

III.7. PROBLEME CARE CONDUC LA ECUAŢII DE GRADUL INTII ŞI LA SISTEME DE ECUAŢII DE GRADUL INTII CU DOUĂ ŞI TREI NECUNOSCUTE

1. La o întreprindere muncitorii lucrînd cîte 15 piese pe zi, depăşeau norma zilnică cu 0,25 din ea. Dacă numărul muncitorilor s-ar micşora cu $\frac{1}{5}$ din numărul lor şi fiecare muncitor ar depăşi norma zilnică cu 10 piese, atelierul ar realiza 2 800 de piese mai mult decît prevedea planul iniţial. Cîţi muncitori erau iniţial în atelier şi care era planul pe zi?

R. 500 de muncitori; 6 000 de piese pe zi.

2. Două brigăzi ale unei secţii de strungărie trebuiau să lucreze zilnic, conform planului, un număr de piese care se găsesc în raportul de $\frac{3}{4}$. Prima brigadă a depăşit planul cu 15%, iar a doua cu $\frac{3}{20}$ din norma pe zi. Ştiind că în felul acesta au lucrat împreună 805 piese zilnic să se afle cîte piese trebuia să lucreze fiecare după plan şi care a fost realizarea în procente faţă de plan ?

R. 300 şi 400 de piese; 115% realizare.

3. La un magazin de legume şi fructe s-au adus cireşe socotite la 10 lei kg si căpşuni socotite la 15 lei kg, în valoare totală de 13 000 de lei. Cireşele au avut un scăzămînt de 5%, iar căpsunile 10%. Pentru a se recupera scăzămîntul, s-a mărit preţul pe kg cu procentele scăzămintelor respective. Din vînzare s-a încasat pe căpşuni cu 5 000 lei mai mult decît de pe cireşe. 1) Cîte kg de cireşe şi căpşuni s-au adus la magazin ? 2) Ce procent reprezintă scăzămîntul cireşelor faţă de cel al căpşunilor ?

R. 600 kg căpşuni; 400 kg cireşe; 33%.

4. Pentru construcţia a două clădiri trebuiau transportate cantităţi egale de ciment, cu două camioane. Un camion transporta ciment pentru clădirea mai apropiată şi la fiecare drum ducea 1,5 t; celalalt transporta ciment pentru clădirea mai depărtată şi la fiecare drum ducea cu $\frac{2}{3}$ t mai mult decît primul. Pînă la amiază camionul al doilea a făcut 3 drumuri mai puţin decît primul şi au rămas netransportate $3\frac{1}{2}$ t de ciment pentru clădirea apropiată şi 4 t pentru clădirea mai depărtată. a) Cîte tone de ciment trebuiau transportate pentru fiecare clădire? b) Cîte drumuri a făcut fiecare camion ?

R. a) 17 t; b) 9 drumuri; 6 drumuri.

5. O asociaţie de ţărani şi-a propus să termine prăşitul unei parcele de floarea-soarelui într-un anumit număr de zile. Dacă s-ar fi prăşit cîte 12 ha pe zi, ar fi rămas 8 ha neprăşite faţă de cele propuse. Prăşind însă cu cîte 4 ha mai mult pe zi, s-a terminat prăşitul parcelei cu o zi mai devreme faţă de plan. In cîte zile trebuia terminat prăşitul după plan ?

R. 6 zile.

6. Un grup de elevi din Bucureşti au organizat prin O.N.T. o excursie la Tuşnad, dînd fiecare cîte 200 de lei. Inaintea plecării s-au mai înscris 3 elevi plătind şi ei cîte 200 lei şi după ce au convenit să mai dea fiecare cîte 50 lei, realizîndu-se un plus de 2 250 lei, excursia s-a prelungit pînă la Borsec. Cîţi excursionişti au fost iniţial şi care a fost costul total al excursiei la Tuşnad ?

R. 42 de elevi; 8 400 de lei.

7. 380 ha grîu şi 230 ha secară trebuiau recoltate în timp de două săptămîni. In prima săptămînă s-au recoltat de două ori mai multe ha de grîu decît de secară, iar în săptămîna a doua de două ori şi jumătate mai multe ha de secară decît de grîu. Cîte ha de grîu au fost recoltate în prima săptămînă ?

R. 360 ha.

8. Două secţii ale unei uzine au produs împreună într-un an 8 900 piese. In anul următor, producţia primei secţii a crescut cu 12% iar a celei de-a doua cu 10%,aşa încît cea de-a doua secţie a produs cu 2 686 mai multe piese decît prima secţie. Cîte piese a produs fiecare secţie în primul an ?

R. 3 200 piese; 5 700 de piese.

9. In două silozuri s-au înmagazinat 186 t cereale. Din primul siloz s-a scos 60% din cantitatea înmagazinată, iar din al doilea $\frac{5}{6}$ şi a mai rămas în primul siloz de 12 ori mai mult decît în al doilea. Cîte tone au fost în fiecare siloz ?

R. 155 t; 31t.

10. Doi muncitori lucrînd împreună, pot să facă o anumită lucrare în 12 zile; dacă primul muncitor ar lucra 2 zile, iar muncitorul al doilea 3 zile, atunci ei ar face numai 20% din lucrarea întreagă. In cîte zile poate să facă lucrarea fiecare muncitor lucrînd singur ?

Indicaţie. Notăm cu x partea din lucrare realizată, de primul muncitor într-o zi, singur, şi cu y partea executată de-al doilea muncitor într-o zi dacă ar lucra singur; se găseşte $x=\frac{1}{20}$; $y=\frac{1}{20}$.

R. 20 zile; 30 zile.

11. Pentru executarea unei comenzi, o fabrică a întrebuinţat două tipuri de strunguri: 12 strunguri de tipul A şi alte 12 de tipul B şi a terminat comanda în 8 zile. Se ştie că 3 strunguri de tipul A pot strunji într-o oră aceeaşi cantitate de piese cît strunjesc două strunguri de tipul B. In cît timp se va efectua o altă comandă la fel de mare, dacă la ea lucrează 9 strunguri de tipul A şi 4 strunguri de tipul B ?

R. 16 zile.

12. Un grup de elevi a organizat o excursie la hidrocentrala de la Bicaz. Dacă fiecare participant ar contribui la cheltuielile pentru transport cu cîte 25 de lei, suma adunată de la toţi elevii ar fi mai mică cu 200 de lei decît cea necesară; dacă fiecare elev ar contribui cu cîte 32 de lei, suma adunată ar acoperi cheltuielile şi ar mai rămîne 24 de lei. Cîţi elevi erau în grup ?

R. 32 de elevi.

13. Cîţiva turişti au luat masa la o cabană. Dacă ar fi fost cu 5 mai mulţi şi dacă costul total al mesei ar fi fost cu 600 de lei mai mare, fiecare ar fi plătit cu 20 lei mai mult, iar dacă ar fi fost 15 turişti în plus şi masa ar fi costat cu 400 de lei mai mult, fiecare ar fi plătit 20 lei mai puţin. Cîţi turişti au luat masa la cabană şi cît a plătit fiecare pentru masă ?

R. 10 turişti; 60 lei.

14. Pentru două şcoli care s-au construit la Calafat, au fost necesare cantităţi egale de ciment. De la depozit, cimentul a fost cărat de 2 camioane. Pentru şcoala cea mai apropiată, un camion a transportat $2\frac{1}{2}$ t la fiecare drum; pentru şcoala mai îndepărtată, celălalt camion a transportat 3,5 t la fiecare drum. Pînă la amiază camionul al doilea a făcut cu 3 drumuri mai puţin decît primul şi au rămas netransportate $65\frac{1}{2}$ t pentru şcoala apropiată şi 69 t pentru cea îndepărtată. Cîte tone de ciment au fost necesare pentru fiecare şcoală ?

R. 83 tone.

15. O fermă zootehnică a pregătit fîn pentru hrana unei cirezi de vaci. Dacă vinde 20 de vaci, atunci va hrăni restul de vaci cu 10 zile mai mult decît timpul prevăzut la început. Dacă va mai cumpăra 80 de vaci, rezerva de fîn se va consuma cu 20 de zile mai devreme decît termenul fixat. Pentru cîte vaci şi pentru cîte zile s-a făcut rezerva de fîn ?

R. 120 de vaci; 50 de zile.

16. Mai mulţi elevi au vrut să cumpere un joc de şah. Dacă fiecare ar fi dat cite 5 lei, nu le-ar fi ajuns pentru a cumpăra şahul o sumă de două ori mai mică decît costul şahului. Doi dintre elevi au renunţat să mai ia parte la cumpărarea şahului, şi atunci, dînd fiecare cîte 20 de lei, le-a mai rămas o sumă egală cu 20% din costul şahului, care reprezintă costul a 5 piese de rezervă pentru şah. a) Cît a costat jocul de şah ? b) Cîţi elevi au fost iniţial ? c) Cît costă o piesă de rezervă ?

R. a) 50 lei; b) 5 elevi; c) 2 lei.

17. Terenul unei cooperative agricole de producţie a fost repartizat la trei asociaţii astfel: 0,75 din terenul primei asociaţii reprezintă 0,3 din terenul repartizat asociaţiei a doua şi $\frac{1}{8}$ din terenul asociaţiei a treia. Aria terenului fiind de 2 413 ari, să se afle suprafaţa repartizată fiecărei asociaţii.

R. 2,54 ha; 6,35 ha; 15,24 ha.

18. Trei brigăzi de muncitori ar fi executat aceeaşi lucrare astfel: prima ar fi terminat-o în 9 zile, a doua în 10 zile şi a treia în 12 zile. S-a alcătuit o brigadă din $\frac{1}{4}$ din efectivul brigăzii întîi, $\frac{1}{3}$ din efectivul brigăzii a doua şi $\frac{1}{2}$ din efectivul celei de-a treia. In cîte zile s-a executat aceeaşi lucrare cu brigada astfel alcatuită ?

R. 10 zile.

19. Trei grupe de muncitori au primit pentru o lucrare suma de 34 200 lei. Prima grupă de 8 oameni a lucrat 5 zile, a doua compusă din 7 membri a lucrat 8 zile, iar a treia compusă din 12 oameni a lucrat 4 zile. Calificarea fiind aceeaşi, pentru membrii tuturor grupelor, să se afle ce sumă revine de plată fiecărei brigăzi?

R. 9 500 lei; 13 300 lei; 11 400 lei.

20. O roată dinţată A are 60 de dinţi şi face 80 rotaţii pe minut. O altă roată B, angrenată cu prima, are 48 de dinţi. Cîte rotaţii face rota B pe minut ? Dacă, la un moment dat, un dinte a al roţii A este angrenat cu un dinte b al roţii B, peste cît timp dinţii a şi b se angrenează iarăşi ?

R. 100 rotaţii; 3 s.

21. Intr-o excursie, timpul coborîrii de pe munte a fost cu 1,2 ori mai mic decît timpul necesar urcuşului. Care este distanţa parcursă pînă la vîrful muntelui, ştiind că la urcare pe munte s-a parcurs, în medie, 106,2 m în 1/5 oră, iar timpul necesar coborîrii a fost 3/5 din cel necesar urcuşului ?

R. 1 593 m.

22. Dacă un tren ar merge cu viteza de 54 km/h, ar străbate distanţa dintre două localităţi într-un timp mai mic cu jumătate de oră decît cel programat, iar dacă ar merge cu viteza de 36 km/h, i-ar trebui 1 oră şi 1/2 mai mult decît timpul programat pentru străbaterea acelei distanţe. Care este viteza programată a acelui tren ? (Se presupune mişcarea uniformă)

R. 48 km/h.

23. Luni, la ora 5 dimineaţa a plecat un vapor de pasageri dintr-un port spre un alt port; în acelaşi timp, a plecat de la al doilea port către primul, un şlep care are viteza 1/2 din viteza vaporului. Cele două nave s-au întîlnit la ora 11 noaptea. Cînd va ajunge fiecare dintre ele la destinaţie ?

R. Marţi la ora 8; miercuri la ora 11.

24. Vitezele a trei trenuri: unul de marfă, altul personal şi al treilea rapid sînt proporţionale cu numerele 1; $1\frac{1}{2}$; 3. Ştiind că pentru o aceeaşi distanţă trenul de marfă foloseşte o oră şi 20 minute mai mult decît personalul, să se afle în cît timp a parcurs acea distanţă fiecare din cele trei trenuri.

R. 240 min; 160 min; 80 min.

25. Intr-o lună, două echipe de muncitori aveau de efectuat, după plan, 2 750 de piese. Prima echipă a depăşit planul cu 20%, iar a doua echipă cu 15%. Ştiind că în acest caz prima echipă a efectuat în acea lună cu 480 de piese mai mult decît a două echipă, să se calculeze: a) numărul de piese planificate iniţial pentru fiecare echipă;
b) numărul de piese efectuate peste plan de către fiecare echipă.

R. a) I. 1 550; II. 1 200 de piese;
b) 310; 180 de piese efectuate peste plan.

26. Din două calităţi de produse cu preţul de 5 lei şi 3 lei kg, s-a făcut un amestec de 18 kg. Dacă acest amestec s-ar vinde cu 3,90 lei kg, s-ar pierde 3,80 lei. Cîte kg de produse din fiecare cantitate s-au luat pentru amestec ?

R. 10 kg de calitatea I; 8 kg de calitatea a II-a.

27. Trei brigăzi ale unei cooperative agricole de producţie au cultivat zarzavaturi astfel: 20% din lotul primei brigăzi împreună cu 25% din lotul celei de-a treia brigăzi fac cît $\frac{1}{3}$ din lotul brigăzii a doua. Loturile au fost repartizate proporţional cu numărul de tractoare al fiecărei brigăzi. Ştiind că prima brigadă a avut 10 tractoare, a doua 15 tractoare şi a treia 12 tractoare. Să se afle cîte hectare a cultivat fiecare brigadă.

R. 100 ha; 150 ha; 120 ha.

28. Pentru rezultatele deosebite în muncă, trei muncitori au primit drept primă suma de 3 000 lei. 75% din suma primită de primul muncitor este cu 100 de lei mai mare decît suma primită de al doilea muncitor, iar raportul dintre suma primului muncitor şi al celui de-al treilea este de $\frac{6}{5}$. Să se afle sumele primite de fiecare muncitor.

R. 1 200; 800; 1 000 de lei.

29. Intr-un an, o cooperativă agricolă de producție a recoltat de pe două loturi semănate unul cu grîu și celălalt cu orz 1 370 q de cereale. In anul al doilea, folosind îngrășăminte chimice, recolta de pe lotul semănat cu grîu s-a mărit cu 15%, iar cea de pe lotul semănat cu orz s-a mărit cu 10%, obținîndu-se astfel de pe ambele loturi 1 551 q de cereale. Cît s-a recoltat, pe fiecare lot, în anul următor ?

R. 1 012 q; 539 q.

30. Avem două bucăți de aliaj, dintre care prima bucată conține 270 g de aur și 30 g de aramă, iar bucata a doua conține 400 g de aur și 100 g de aramă. Cît trebuie luat din fiecare bucată de aliaj, pentru a obține 400 g de aliaj cu titlul de 0,825 ?

R. 100 g; 300 g.

31. Două aliaje de aur și aramă, dintre care unul cu proba de 950, iar celălalt cu proba de 800, se topesc împreună cu 2 g de aur curat și se obține un aliaj nou cu masa de 25 g și cu proba de 906. Să se afle masa celor două aliaje date. (Se numește proba unui aliaj, de 1 000 ori titlul lui.)

R. 15 g; 8 g.

32. Pentru 5 kilograme de cafea de două calități s-au plătit 1 800 de lei. Un kilogram de cafea de prima calitate costă 400 de lei, iar un kilogram de calitatea a doua costă 300 de lei. Cîte kg de cafea de fiecare calitate s-au cumpărat ?

R. 3 kg; 2 kg.

33. Un aliaj de aur și argint cu masa de 1,06 kg, fiind introdus în apă, "pierde" 70 g. Cît aur și cît argint este în acest aliaj, dacă aurul "pierde" în apă $\frac{1}{19}$ din masă, iar argintul "pierde" 0,1 din masă ?

R. 760 g; 300 g.

34. Se cîntărește o medalie în apă și se găsește că are masa de 22,5 g, iar în aer de 25 g. Medalia fiind un aliaj de cupru și argint, să se afle ce cantitate din fiecare metal cuprinde, știind că densitatea argintului este de 10 450 kg/m^3, iar a cuprului 8 800 kg/m^3.

R. Ag 19 g; Cu 6 g.

35. Se amestecă 15 kg acid sulfuric de 40% cu apă și se obține o soluție cu o concentrație de 15%. Să se calculeze masa amestecului obținut.

Indicație. Pentru rezolvarea aritmetică

$$\begin{matrix} 40\% & \searrow & & \nearrow & 15\% \\ & & 15\% & & \\ 0\% & \nearrow & & \searrow & 25\% \end{matrix}$$

Raportul părților este 15/25=3/5; noul amestec conține în total 3+5=8 părți egale, dintre care trei corespund la 15 kg. O singură parte conține 5 kg, iar amestecul total va avea 40 kg

R. 40 de kg.

36. Pentru a prepara 40 kg acid cu tăria de 20% se amestecă acid de 80% cu acid de 15%. Ce cantități de acid se vor folosi din fiecare fel ?

R. 3,07 kg; 36,93 kg.

37. Din două calități de grîu de 4 lei kg și 3 lei kg trebuie făcut un amestec de 350 kg spre a fi vîndut cu 3,40 lei kg (fără cîștig sau pierdere). Ce cantitate de grîu trebuie să se ia din fiecare calitate ?

Indicație pentru rezolvarea aritmetică. Dacă tot grîul ar fi de 3 lei kg, atunci costul a 350 kg ar fi 1 050 lei; dar grîul amestecat este vîndut cu 3,40 · 350=1 190 lei. Diferența de 140 de lei provine de

la 140 kg grîu de calitatea 4 lei kg şi restul (210 kg) cuprinde grîul de calitate 3 lei kg. Se poate utiliza şi metoda obişnuită pentru problemele de amestec.

R. 140 kg; 210 kg.

38. Un aliaj de aur de 2 kg cu titlul de 0,910 s-a obţinut dintr-o bucată de aliaj de aur cu titlul de 0,800 şi alta cu titlul de 0,950. Ce cantitate din fiecare fel s-a folosit pentru noul aliaj ?

R. 0,533 kg; 1,467 kg.

39. Cifra zecilor unui număr de două cifre este de două ori mai mică decît cifra unităţilor. Dacă schimbăm ordinea cifrelor acestui număr, obţinem un număr cu 27 de unităţi mai mare decît cel de la început. Să se afle numărul.

R. 36.

40. Cifra zecilor unui număr de două cifre este de trei ori mai mare decît cifra unităţilor. Dacă schimbăm ordinea cifrelor acestui număr, obţinem un număr cu 36 de unităţi mai mic decît numărul de la început. Să se afle numărul.

R. 62.

41. Suma cifrelor unui număr de două cifre este 11. Dacă adăugăm la acest număr 63, obţinem un număr format din aceleaşi cifre, dar aşezate în ordine inversă. Să se afle numărul.

R. 29.

42. Să se găsească două numere ştiind că unul este mai mare decît celălalt cu 14 unităţi, iar dacă se împarte cel mai mare la 5 şi cel mai mic la 8, diferenţa cîturilor obţinute este 4.

R. 30; 16.

43. O echipă de muncitori trebuia să producă zilnic un număr de 19 800 de piese. Introducerea de utilaj modern a făcut ca productivitatea să crească astfel că, dacă ar fi fost cu 18 muncitori mai puţin în echipă, s-ar fi produs tot atît cît înainte de introducerea utilajului. Aplicîndu-se apoi o inovaţie, productivitatea fiecărui muncitor a crescut din nou cu acelaşi număr de unităţi, astfel că dacă ar fi fost cu 33 de muncitori mai puţin în echipă, faţă de numărul iniţial, s-ar fi produs tot atît cît se producea la început.

a) Cîţi muncitori au fost la început şi care era norma unui muncitor ?

b) Cu cît s-a mărit norma de fiecare dată ?

R. a) 198 muncitori; 100 piese; b) cu 10 piese.

44. Dacă pentru îndeplinirea unui contract o uzină ar face zilnic cîte 20 de tractoare, ar lipsi la termenul stabilit 100 de tractoare, iar dacă uzina ar face zilnic cîte 23 de tractoare ar preda la termenul stabilit cu 20 de tractoare mai mult decît prevedea contractul. Cîte tractoare au fost comandate şi ce termen a fost stabilit pentru îndeplinirea contractului ? Ce relaţie se poate stabili între 900 de tractoare şi 900 de tractorişti dacă pe fiecare tractor lucrează cîte un tractorist?

Indicaţie. Dacă, în loc de 20 de tractoare, uzina ar face 23 de tractoare pe zi, există un plus de $100+20=120$ de tractoare, care provin de la surplusul zilnic de 3 tractoare (40) zile; $40 \cdot 20+100=900$ tractoare.

R. 900 de tractoare; 40 de zile.

45. Să se găsească un număr de trei cifre, divizibil cu 9, astfel încît cifra sutelor să fie de trei ori mai mică decît a unităţilor, iar dacă adăugăm 594 să obţinem răsturnatul lui.

Indicaţie. Numărul se scrie algebric $100x+10y+z$ răsturnatul lui $100z+10y+x$.

R. 369.

46. Să se determine un număr cuprins între 400 şi 500, ştiind că suma cifrelor sale este 9 şi că răsturnatul numărului este 36/47 din el.

Indicaţie. Numărul căutat fiind cuprins între 400 şi 500, cifra sutelor este 4; suma celorlalte două cifre este deci 5.

R. 423.

47. Prima cifră a unui număr de şase cifre este 9. Dacă se ia această cifră de la început şi se aşează la sfîrşitul numărului, se obţine sfertul primului număr. Care este acel număr ?

Indicaţie. Tăiem pe 9. Această operaţie este echivalentă cu a scădea 900 000 din numărul dat, şi obţinem: (1) x–900 000. Acest număr are cinci cifre. Vom adăuga apoi cifra 0 la sfîrşitul său. El recapătă 6 cifre. Operaţiunea este echivalentă cu înmulţirea numărului (1) cu 10: $10(x-900\ 000)$. In fine, în ultima etapă, adăugăm acestui număr cifra 9 la sfîrşit: $10(x-900\,000)+9$. Acum scriem că numărul astfel obţinut este $\frac{1}{4}$ din numărul iniţial adică $10(x-900\,000)+9=\frac{x}{4}$.

R. 923 076.

48. Un număr de 6 cifre are ultima cifră 7. Dacă se taie de la urmă cifra 7 şi se mută în faţa numărului, vom obţine un număr de 5 ori mai mare decît numărul dat. Să se afle primul număr.

Indicaţie. Scădem din acest număr pe 7, adică ultima sa cifră. Atunci, toate cifrele lui rămîn la fel ca şi înainte, dar ultima devine zero. Dacă acum tăiem pe acest zero de la sfîrşit, numărul s-a împărţit cu 10, adică a devenit de 5 cifre şi se va scrie $\frac{x-7}{10}$ (1). Luăm cifra 7 şi o punem acum în faţa numărului. Atunci, numărul are din nou şase cifre, iar cifra sutelor de mii este 7. Aceasta echivalează cu a adăuga 700 000 la numărul (1); numărul astfel obţinut se va scrie: $700\,000+\frac{x-7}{10}$. El trebuie să fie egal cu de 5 ori numărul căutat, de unde ecuaţia problemei: $700\,000+\frac{x-7}{10}=5x$, cu soluţia $x=142\,857$.

R. 142 857.

49. Un atelier de croitorie a primit tercot de două calităţi şi anume: din calitatea întîi 240 m şi din a doua 360 m, în valoare totală de 103 200 lei. Pentru confecţionarea unor trenciuri, atelierul a întrebuinţat 30% din prima calitate şi 45% din a doua calitate. Ştiind că tercotul de calitatea a doua întrebuinţat pentru trenciuri a costat cu 1 440 de lei mai mult decît tercotul de calitatea întîi întrebuinţat să se afle costul unui metru de tercot din fiecare calitate.

R. 250 de lei; 120 lei.

50. Pentru a hrăni 10 cai şi 14 vaci se dădeau cîte 180 kg de fîn pe zi. Mărindu-se raţia de fîn pentru cai cu 25% iar pentru vaci cu $33\frac{1}{3}\%$, s-au dat cîte 232 kg de fîn pe zi. Cîte kg de fîn se dădeau pe zi la început pentru un cal şi cîte pentru o vacă ?

R. 9,6 kg; 6 kg.

51. Un muncitor a economisit 1 600 lei pentru cumpărarea unui sacou şi a unui pulovăr. In urma reducerilor de preţuri, sacourile s-au ieftenit cu 38%, iar puloverele cu 24%. Cumpărînd la preţurile reduse un sacou şi două pulovere, i-au mai rămas 68 de lei din suma pe care a avut-o. Să se afle preţul unui sacou şi al unui pulovăr, înainte şi după reducerea de preţuri.

R. 1 000 lei şi 600; 620 lei şi 456 lei.

52. Două secţii ale unei fabrici de încălţăminte trebuiau să confecţioneze 4 000 de perechi de pantofi într-o lună. Prima secţie, lucrînd lunar cu 12% mai multe perechi iar a doua cu 8%, după 3 luni, a doua secţie a făcut cu 1 080 de perechi de pantofi mai mult decît prima. Cîte perechi de pantofi trebuia să confecţioneze, într-o lună, fiecare secţie ?

R. 1 800 perechi; 2 200 perechi.

53. In primul an de existenţă o cooperativă agricolă de producţie a recoltat, de pe un loc de 20 ha semănate cu grîu şi 30 ha semănate cu porumb, 1 180 q de cereale. In al doilea an, folosind noi metode agrotehnice înaintate, producţia de grîu la ha s-a mărit cu 20%, iar cea de porumb cu 2 q la hectar. In aceste condiţii, recolta de pe trei hectare semănate cu grîu întrece cu 1,2 q recolta culeasă de pe două hectare semănate cu porumb. Să se calculeze recolta de grîu şi porumb la hectar în fiecare din cei doi ani.

R. I. 17 q grîu şi 28 q porumb.
II. 20 q grîu şi 30 q porumb.

54. Un obiect care are masa de 300 g este alcătuit din aur şi argint. In apă, el are o masă cu 20 g mai mică. Să se afle cantitatea de aur şi argint din acel obiect, ştiind că densitatea aurului este de 19 200 kg/m^3, a argintului de 10 500 kg/m^3 şi a apei 1 000 kg/m^3.

Indicaţie. Fie x şi y numerele ce ne arată masa în grame a aurului şi a argintului considerat: $x+y=300$. Obiectul cufundat în apă este împins de jos în sus cu o forţă egală cu greutatea volumului de apă dezlocuit (principiul lui Arhimede). Pe de altă parte raportul dintre masa unui corp şi densitatea sa este egală cu volumul său, deci putem scrie ecuaţia: $\frac{x}{19,2}+\frac{y}{10,5}=20$, unde $\frac{x}{19,2}$ şi $\frac{y}{10,5}$ sînt respectiv, volumele aurului şi argintului.

R. $x=198,62$ g; $y=101,38$ g.

55. Pentru scopuri tehnice, s-au amestecat 5ℓ de spirt, de o calitate, cu 7ℓ de spirt de o altă calitate şi s-a obţinut spirt cu tăria de 65°. Dacă s-ar lua 20 de litri de spirt de prima calitate şi 41 de calitatea a doua amestecul ar avea tăria de 70%. Să se determine tăria spirtului de fiecare calitate.

Indicaţie. Fie x şi y tăriile spirtului de prima, respectiv a doua calitate. Atunci 5ℓ de spirt de prima calitate conţin $\frac{5x}{100}\ell$ de alcool pur, 7ℓ din calitatea a doua conţin $\frac{7x}{100}\ell$ de alcool pur, iar amestecul lor conţine $\frac{12 \cdot 65}{100}$ alcool curat. Apoi, 20ℓ de spirt de prima calitate conţin $\frac{20x}{100}$ alcool, iar 41ℓ de calitatea a doua conţin $\frac{41y}{100}$.

R. 72°; 60°.

56. O fermă agricolă a vîndut 3 000 q de cereale şi anume: orz, secară şi grîu, primind: pentru orz 140 000 de lei, pentru secară 120 000 de lei şi pentru grîu 84 000 de lei. Ştiind că 6 q de orz costă cît 5 q de secară şi că 7 q de secară costă cît 6 q de grîu, să se afle cantitatea de chintale şi costul unui chintal pentru fiecare fel de cereale.

Rezolvare: Să notăm cu x,y,z numerele ce reprezintă cantităţile în chintale de orz, secară şi grîu vîndute de fermă, obţinem ecuaţia $x+y+z=3\,000$. Scriem acum că 6 q de orz costă cît 5 q de secară. $\frac{6 \cdot 140\,000}{x}=\frac{5 \cdot 120\,000}{y}$. Apoi, scriem că 7 q de secară costă cît 6 q de grîu: $\frac{7 \cdot 120\,000}{y}=\frac{6 \cdot 84\,000}{z}$, $x=1\,400$, $y=1\,000$, $z=600$.

R. 100 lei; 120 lei; 140 lei.

III.8. PROBLEME DE MIŞCARE

1. Pentru a ajunge din sat la oraş în timpul stabilit, un drumeţ trebuia să meargă cu viteza de 4 km/h. El merge jumătate din drum cu viteza stabilită, iar restul cu un autocamion care merge cu 20 km/h. El soseşte în oraş cu două ore înaintea timpului stabilit. Să se afle distanţa de la sat pînă la oraş.

R. 20 km.

2. Un drumeţ a socotit că, făcînd cîte 3 km pe oră, va sosi din sat la oraş la o anumită oră. După ce a făcut jumătate din drum cu viteza stabilită, el s-a oprit pentru o oră şi apoi a trebuit să-şi mărească viteza, pentru partea de drum rămasă, cu 1 km pe oră. Să se afle distanţa de la sat la oraş.

R. 24 km.

3. Roata din faţă a unei trăsuri are cincumferinţa de 30 dm, iar roata din spate, de 40 dm. Pe distanţa de la A la B, roata din faţă a făcut cu 30 de învîrtituri mai mult decît roata din spate. Să se afle distanţa de la A pînă la B.

R. 360 m.

4. Pe aceeaşi distanţă, roata din faţă a unei trăsuri face 240 de învîrtituri, iar cea din spate, a cărei circumferinţă este cu 0,6 m mai mare, face 180 de învîrtituri. Să se afle lungimea circumferinţei fiecăreia din aceste roţi.

R. 1,8 m; 2,4 m.

5. Roata din faţă a unei căruţe a făcut pe o anumită distanţă cu 15 învîrtituri mai mult decît cea din spate. Circumferinţa roţii din faţă este de 2,5 m iar a celei din spate, de 4 m. Cîte învîrtituri a făcut fiecare roată şi ce distanţă a parcurs căruţa ?

R. 40; 25; 100 m.

6. Cu cîţi km poate să se îndepărteze de la debarcader o barcă care merge împotriva curentului, pentru ca să se întoarcă înapoi în 4 ore, dacă viteza apei este de 2 km/h şi viteza bărcii în apă stătătoare este de 8 km/h ?

R. 15 km.

7. Un curier a parcurs pe o bicicletă un drum cu viteza medie de 8 km/h. El s-a înapoiat pe alt drum, cu 3 km mai lung decît primul. La întoarcere curierul a mers cu o viteză medie de 9 km/h şi a făcut cu $\frac{1}{8}$ ore mai mult decît la dus. Să se afle lungimea fiecărui drum.

R. 15 km; 18 km.

8. Un călător trebuie să străbată într-un timp stabilit distanţa dintre oraşele A şi B. Dacă el ar face acest drum cu o motocicletă, parcurgînd cîte 35 km/ oră, ar întîrzia cu 2 ore, iar dacă ar face acest drum cu un automobil parcurgînd cîte 50 km/ oră, ar sosi cu o oră mai devreme. Să se afle distanţa dintre oraşele A şi B şi în cîte ore trebuia să ajungă călătorul în oraşul B.

R. AB=350 km; 8 ore.

9. Doi turişti merg unul către celălalt din două oraşe A şi B, situate la o distanţă de 30 km unul de celălalt. Dacă primul turist porneşte cu 2 ore înaintea celui de-al doilea,

ei se întîlnesc după $2\frac{1}{2}$ ore de la plecarea turistului al doilea, iar dacă turistul al doilea pornește cu 2 ore înaintea primului, ei se întîlnesc după trei ore de la plecarea primului turist. Cîți kilometri pe oră face fiecare turist ?

R. 5 km/ oră; 3 km/ oră.

10. Un călăreț și un pieton pornesc din același punct *A* spre punctul *B*. Călărețul, ajungînd în *B* cu 50 minute înaintea pietonului, se reîntoarce imediat spre *A* și se întîlnește cu pietonul la o distanță de 2 km de *B*. Pentru tot drumul de la *A* la *B* și înapoi i-a trebuit călărețului 1 oră 40 minute. Să se afle distanța de la *A* la *B*, vitezele călărețului și a pietonului.

Indicație pentru metoda aritmetică. Se deduce ușor că distanța *AB* a fost parcursă de călăreț în 50 min. Dacă pietonul a sosit în *B* la 50 minute după călăreț, înseamnă că în același moment călărețul ajunsese din nou în *A*, deci viteza pietonului este de două ori mai mică decît a călărețului și, prin urmare, cînd călărețul sosise în *B*, pietonul era la jumătatea drumului. La întoarcere călărețul face 2 km pînă îl întîlnește pe pieton, care, în acest timp, mergînd cu o viteză de două ori mai mică, a parcurs un km de la jumătatea drumului; aceasta înseamnă că jumătatea distanței dintre *A* și *B* este 1+2=3 km. Acum se poate afla distanța *AB* și apoi vitezele.

R. 6 km; 7,2 km/ oră; 3,6 km/ oră.

11. Un înotător înoată pe fluviul Neva împotriva curentului. Lîngă Podul Republicii pierde o ploscă goală. După ce mai înoată 20 de minute împotriva curentului, observă pierderea, se întoarce și ajunge plosca lîngă podul Schmidt. Să se afle cu ce viteză curge Neva, știind că distanța dintre poduri este de 2 km.

Culegere U.R.S.S.

Rezolvare: Să notăm cu x viteza cu care curge Neva exprimată în km pe oră. Pentru a lucra cu aceleași unități de măsură, vom transforma în prealabil cele 20 de minute în ore, adică 20 de minute$=\frac{20}{60}$ ore$=\frac{1}{3}$ ore. Să notăm cu *A* punctul unde înotătorul a observat că a pierdut plosca. De la Podul Republicii pînă la *A* el a parcurs distanța împotriva curentului deci viteza lui față de țărmul apei a fost diferența dintre viteza v (viteza proprie a înotătorului) și viteza apei, adică v-x, fiindcă el a parcurs distanța *VA* în $\frac{1}{3}$ ore, avem $VA=\frac{1}{3}(v-x)$. Intorcîndu-se de la *A* la *V*, el parcurge această distanță cu o viteză egală cu $v+x$ întrucît la viteza sa proprie se adaugă viteza apei. Ca să ajungă plosca, el mai parcurge încă o distanță *VS* dintre poduri care este de 2 km, avînd o viteză tot de $v+x$. Deci, drumul total parcurs în sensul curentului va fi:

$$AV+VS=\frac{1}{3}(v-x)+2.$$

Prin urmare, timpul necesar ca să parcurgă acest spațiu, adică să ajungă plosca, este: $\dfrac{\frac{1}{3}(v-x)+2}{v+x}$. Dacă la acest timp adăugăm cele 20 minute$=\frac{1}{3}$ ore, de cînd a pierdut plosca, înseamnă că pentru ca s-o prindă s-a scurs un timp egal cu: $\frac{1}{3}+\dfrac{\frac{1}{3}(v-x)+2}{v+x}$.

Acest timp trebuie să fie egal cu acela necesar pentru ca plosca să parcurgă cei 2 km cu viteza x a apei,

GEOMETRIE PLANĂ

III.9. CERCUL

Poziția a două cercuri; intersecția unei drepte cu un cerc; tangenta la cerc; construcții în cerc.

1. Insemnînd cu R și r razele a două cercuri, iar cu D distanța centrelor lor, să se spună ce poziție au aceste cercuri, dacă:
R = 5 dm, r = 3 dm, D = 10 cm; R = 9 dm, r = 3 dm, D = 6 cm;
R = 7 dm, r = 4 dm, D = 9 cm; R = 5 dm, r = 2 dm, D = 2 cm.
R = 6 dm, r = 2 dm, D = 8 cm;

2. Prin extremitățile unui diametru al unui cerc se duc două coarde paralele. Să se arate că aceste două coarde sînt congruente.

3. Printr-un punct în interiorul unui cerc, să se ducă o coardă care să aibă mijlocul în acest punct.

R. Perpendiculara pe diametru ce trece prin acest punct.

4. Printr-un punct oarecare se duc într-un cerc două coarde congruente. Să se arate că ele sînt simetrice față de diametrul care trece prin acest punct.

Indicație: Se va observa că distanțele de la coarde la centru sînt egale.

5. Să se ducă printr-un punct în interiorul unui cerc, două coarde congruente și perpendiculare.

Indicație: Se va arăta că cele două coarde fac unghiuri de 45° cu diametrul ce trece prin acest punct.

6. Se dă cercul O în care se duce diametrul AB; fie CD coarda perpendiculară pe acest diametru în mijlocul razei OB. a) Să se arate că triunghiul DCB este isoscel;
b) patrulaterul $ODBC$ este romb.

Indicație: Triunghiurile $OA'B$, $OA'C$ sînt echilaterale. $m(\sphericalangle BOC)=120^{\circ}$ și $BA'C=120^{\circ}$; arcele egale $\overset{\frown}{AB}$ și $\overset{\frown}{AC}$ au tot cîte 120°.

7. Se dă un punct în interiorul unui cerc. Să se arate că, dintre toate coardele ce se pot duce prin acest punct, cea mai scurtă este aceea care este perpendiculară pe diametrul ce trece prin acel punct.

Indicație: Se arată că această coardă este cea mai îndepărtată de centru, față de toate coardele duse prin acest punct.

8. Să se construiască o dreaptă care taie două cercuri date sub unghiuri congruente.

Indicație: Se duc două raze paralele în cele două cercuri și se unesc extremitățile lor. Se va cerceta cazul cînd razele sînt în același sens sau în sens contrar.

9. Fie două cercuri secante de raze R și r. Să se arate că segmentele paralele duse din punctele de intersecție a celor două cercuri și mărginite de aceste cercuri, sînt congruente.

10. Fie un punct M în interiorul unui cerc. Să se ducă prin M o coardă a cărei mijloc să fie punctul M și să se arate că această coardă este cea mai scurtă din toate coardele, ce ar trece prin M.

11. Fie cercul O și N un punct în interiorul cercului. Să se arate cum se obține cea mai mare coardă și cea mai mică, care trec prin punctul N. Justificați răspunsul.

12. Fie cercul O și două coarde ale cercului $[AB]\equiv[DC]$ astfel ca $AB\cap DC=\{N\}$. Să se arate că AB și DC sînt diagonalele unui trapez înscris în cercul O.

Indicație: Din arcele subîntinse de coarde se scoate partea comună.

13. Să se ducă printr-un punct din interiorul unui cerc, două coarde congruente și perpendiculare.

Indicație: Se va demonstra mai întîi că cele două coarde subîntind unghiuri de 45° cu diametrul ce trece prin acel punct.

14. Fie AOB un unghi la centrul cercului O și $A'OB'$ un alt unghi la centru cu laturile respectiv perpendiculare pe ale primului unghi. Să se demonstreze că dreptele AB, $A'B'$ sînt perpendiculare sau paralele, după cum unghiurile indicate sînt ambele de același fel, sau unul ascuțit iar celălalt obtuz.

Indicație: Se va arăta că perpendicularele duse din O pe AB, $A'B'$ sînt sau perpendiculare, sau în prelungire.

15. Se dă cercul O în care se duce diametrul AA'; fie BC coarda perpendiculară pe diametrul dat în mijlocul razei OA'. Să se demonstreze că triunghiul ABC este echilateral.

Indicație: Triunghiurile $OA'B$, $OA'C$ sînt isoscele.

16. Se dă un cerc O de rază R și un punct A în același plan. Se unește A cu centrul O și un punct variabil B de pe cerc. Se notează cu D mijlocul lui AO și cu C mijlocul lui AB. Care este figura determinată de punctul C ale cărei puncte au aceeași proprietate ?

R. Un cerc cu centrul în D și cu raza $\frac{R}{2}$.

17. Se dau două cercuri concentrice avînd centrul în O. Se duce o dreaptă care determină pe cele două cercuri coardele AB și CD. Să se arate că triunghiurile OAC și OBD sînt congruente.

18. In planul unui cerc, se dă un punct fix și se duc prin el două coarde mobile perpendiculare. Să se arate că dreapta care unește mijloacele acestor două coarde este

o lungime constantă.

Indicație: Centrul cercului, punctul fix şi mijloacele celor două coarde sînt vîrfurile unui dreptunghi.

19. Se dă un cerc C şi un punct A pe el; pe tangenta în punctul A luăm un punct C' şi considerăm cercul cu centrul în C' şi cu raza $C'A$. Ambele cercuri se taie în B. Să se arate că punctele A,B,C,C' sînt aşezate pe un cerc căruia i se va determina centrul şi raza.

20. Fie cercul O şi un punct A în exteriorul cercului, în primul caz şi, în interiorul cercului, în al doilea caz. Să se determine punctul B pe cerc, care este cel mai apropiat şi cel mai depărtat de punctul A, în ambele cazuri.

21. La un cerc dat să se ducă o tangentă perpendiculară pe o dreaptă dată.

22. La un cerc dat să se ducă o tangentă care să facă cu o dreaptă dată un unghi dat α.

23. Să se construiască un cerc de rază R, trecînd printr-un punct dat A şi tangent unei drepte date.

24. Să se construiască un cerc de rază dată, trecînd printr-un punct dat, şi tangent la un cerc dat.

25. Se uneşte un punct fix A cu un punct mobil B de pe cercul dat O. Să se determine figura F descrisă de mijlocul M al segmentului AB.

Indicație: Fie I mijlocul lui OA iar $OB=R=$constantă. Din triunghiul OAB avem: $IM=\frac{OB}{2}=\frac{R}{2}=$constantă. Figura F este un cerc cu centrul în I şi de rază $\frac{R}{2}$.

26. Fie un cerc O şi un diametru fix AB. Se duce coarda CD paralelă cu acest diametru. Se notează cu M intersecția dreptelor CB şi DA; iar $AC\cap BD=\{N\}$. Ce figură descriu punctele M şi N cînd coarda variază?

R. Perpendiculara ridicată în O pe AB.

27. Fie AB şi CD două coarde ale unui cerc; $[AB]\equiv[CD]$ şi $AB\cap CD=M$. Să se arate că segmentele cuprinse între punctul M şi extremitățile coardelor sînt congruente.

28. Care este cea mai mică coardă a unui cerc ce se poate duce printr-un punct din interiorul cercului ?

29. Care este cel mai mare şi cel mai mic segment de dreaptă care se poate aşeza cu extremitățile sale pe două cercuri exterioare ?

30. Perpendiculara pe mijlocul razei OB a cercului O intersectează cercul de diametru AB în punctul N. Se cere: a) să se determine arcul BN, b) dacă M este simetricul lui N față de AB, să se arate că $MBNO$ este romb.

R. a) 60°.

III.10. MĂSURA UNGHIURILOR

31. Se dă un patrulater *ABCD* înscris în cercul de centru *O*. Latura *AB* corespunde unui arc de 60^o, latura *CD* la un arc de 120^o şi diagonala $BD=a$, corespunde unui unghi la centru de 120^o. a) Să se calculeze unghiurile formate de intersecţia diagonalelor. b) Să se calculeze perimetrul triunghiului *BCD*.

R. 90^o; $3a$.

32. Se dă triunghiul *ABC* cu înălţimile *BB'* şi *CC'* ($B' \in AC$ şi $C' \in AB$). a) Să se arate că patrulaterul *BCC'B'* este inscriptibil. b) *M* fiind un punct la mijlocul lui *BC*, şi dacă $m(\sphericalangle B)=60^o$, să se arate că triunghiul *MC'B* este echilateral.

33. Fie *M* un punct oarecare pe înălţimea *AA'* a triunghiului *ABC*. Din *M* se duc perpendicularele *MB'* şi *MC'* pe laturile *AB* şi *AC*. Să se arate că $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle AB'C'$

Indicaţie: *AC'MB'* şi *CC'MA'* inscriptibile $\sphericalangle AMB' \equiv \sphericalangle AC'B'$.

34. Fie *AC* tangenta în *A* a cercului cu diametrul *AB* şi raza *R* ($AC=2R$); *CB* intersectează cercul în *D*. Să se arate că triunghiul *ADC* este isoscel.

35. Fie *ABC* un triunghi înscris în cercul *O*. Prin mijlocul *M* al arcului *AC*, se duce o coardă $MN \parallel AB$, $MN \cap BC = \{I\}$. Se cere să se arate că: a) arcele $\widehat{MCN}$ şi $\widehat{BNC}$ sînt egale; b) $MN=BC$.

36. Se dă un unghi $\sphericalangle BAC$ înscris în cercul *O*. Fie *MN* dreapta care uneşte mijloacele coardelor *AB* şi *AC* şi care taie arcele *AB* şi *AC* respectiv în *D* şi *E*. Se ştie că $\widehat{DB}=\frac{\widehat{EAD}}{3}$; $\widehat{AE}=112^o$ şi $\widehat{BAC}=220^o$. Să se afle măsurile unghiurilor triunghiului *BAC*.

R. 70; 78^o; 32^o.

37. Bisectoarele unghiurilor ascuţite ale unui triunghi dreptunghic *ABC* se intersectează în *O*, iar prelungirile lor intersectează pe *AC* şi *AB*, respectiv, în *M* şi *N*. Cercul de diametru *MN* intersectează bisectoarele *BM* şi *CN* în *P* şi *Q*. Să se arate că arcul $PQ=90^o$.

38. Prin punctele de intersecţie *A* şi *B* ale două cercuri secante se duc două secante oarecare. Să se arate că coardele care unesc noile intersecţii ale acestor secante cu cercurile sînt paralele.

Indicaţie: Se duce coarda comună.

39. Intr-un cerc *O* se ia un unghi la centru *AOB*, apoi se construieşte un alt unghi la centru cu laturile respectiv perpendiculare pe ale primului unghi ($\sphericalangle A'OB'$). a) Să se arate în ce caz $\widehat{AB}+\widehat{A'B'}=90^o$ şi *ABB'A'* este trapez isoscel. b) Să se arate că *AB* şi *A'B'* sînt paralele sau perpendiculare.

Indicaţie: Perpendicularele duse din *O* pe *AB*, *A'B'* sînt sau perpendiculare sau în prelungire.

40. Se dau două cercuri concentrice O şi O' ale căror raze sînt în raportul de $\frac{1}{2}$. Fie un punct A al cercului exterior din care se duc coardele AB şi AC care sînt tangente la cercul O' interior, în B' şi C'. Să se arate că coarda BC este tangentă la cercul O' şi $BCC'B'$ este inscriptibil.

Indicaţie: Se demonstrează că triunghiul ABC este echilateral.

41. Inălţimile CC' şi BB' ale triunghiului ABC înscris într-un cerc se intersectează în punctul D. a) Să se construiască cercurile ce au ca punct comun D, iar vîrfurile triunghiului ABC aparţin respectiv cercurilor construite. b) Să se arate că unghiurile BAC şi $B'DC$ sînt egale.

42. Fie triunghiul ABC înscris în cercul O. Unghiul B al triunghiului ABC are măsura de 80°. Bisectoarea unghiului B este perpendiculară pe diametrul care trece prin C. Să se arate că raportul arcelor BC şi AB este $\frac{2}{3}$. Să se afle măsurile unghiurilor triunghiului.

R. 80°; 40°; 60°.

43. In cercul O se înscrie triunghiul ABC şi fie D punctul diametral opus lui A, H ortocentrul (punctul de întîlnire al înălţimilor triunghiului ABC), iar A' mijlocul laturii BC. Să se arate că H, A' şi D sînt coliniare.

Indicaţie: $BH \| CD$; de asemenea $CH \| BD$; $HBDC$ paralelogram.

44. Pe latura BC a triunghiului ABC se ia un punct oarecare M, tangentele duse din B şi C la cercurile circumscrise triunghiurilor ABM şi ACM se intersectează în punctul N. Să se arate că punctul N aparţine cercului circumscris triunghiului ABC.

Indicaţie: $\sphericalangle NBC \equiv \sphericalangle MAB$ *şi* $\sphericalangle NCB \equiv \sphericalangle MAC$; $m(\sphericalangle BNC) = 180^{o} - [m(\sphericalangle NBC) + m(\sphericalangle NCB)] = 180^{o} - m(\sphericalangle A)$.

45. In triunghiul ABC, $m(\sphericalangle A) = 60^{o}$; bisectoarele interioare BB', CC' se intersectează în I. Să se demonstreze că patrulaterul $AB'IC'$ este inscriptibil.

46. Două cercuri se taie în A şi B. Tangentele în A la cele două cercuri intersectează din nou cercurile în punctele C şi D. Să se arate că AB este bisectoarea unghiului CBD.

Indicaţie: $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle ADB$; $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle DAB \rightarrow \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ABD$.

47. Intr-un cerc se duc coardele AB, AC apoi se duc coardele BB', CC' respectiv paralele cu coardele AC, AB. Să se demonstreze că triunghiul $AB'C'$ este isoscel.

Indicaţie: Patrulaterele $AB'BC$ şi $AC'CB$ sînt trapeze isoscele $\rightarrow [AB'] \equiv [AC'] \equiv [BC]$.

48. Se dă un semicerc AD. Se iau arcele AB şi BC a căror măsură este $\pi/5$ radiani. Fie O centrul cercului, iar intersecţia dintre CB şi OA o notăm cu T. a) Să se arate că triunghiurile TAB şi TOC sînt isoscele. b) $[TB] \equiv [OA]$. c) Proiecţia lui BC pe raza OA este egală cu jumătatea razei.

Indicaţie: $m(\sphericalangle CTD) = \dfrac{m(\overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{AB})}{2}$.

49. Pe prelungirea unei coarde AB a unui cerc O se ia lungimea BC egală cu raza cercului şi apoi se duce secanta COE, unde E e punctul cel mai depărtat de C. Să se arate că $m(\sphericalangle AOE) = 3m(\sphericalangle ACO)$.

50. Prin punctul A al unui cerc se duce o coardă AB şi tangenta în punctul B. Diametrul perpendicular pe raza OA întîlneşte tangenta şi coarda (sau prelungirea ei) respectiv în punctele C şi D. Să se demonstreze că $[BC]\equiv[CD]$.

51. Pe un cerc se iau patru puncte oarecare A, B, C, D. Fie M, N, P, Q respectiv mijloacele arcelor AB, BC, CD, DA. Să se demonstreze că dreptele MP şi NQ sînt perpendiculare.

52. Se duce o rază BO perpendiculară pe un diametru al cercului O. Se uneşte B cu un punct A al diametrului şi BA taie cercul în P. Tangenta în P taie prelungirea diametrului în C. Să se demonstreze că $[CA]\equiv[CP]$.

Indicaţie: Se arată că $\sphericalangle APC\equiv\sphericalangle CAP$.

53. Intr-un cerc O se duce diametrul AB; din B se construiesc de o parte şi de alta a diametrului, două coarde oarecare, care intersectează cercul în C şi D. Cunoscînd că BD intersectează tangenta la cerc dusă în A în punctul E, să se arate că $\sphericalangle BCD\equiv\sphericalangle AEB$.

Indicaţie: $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{AD}$.

54. Circumferinţa unei roţi de transmisie este de 810 mm. Cureaua de transmisie este în contact cu roata de-a lungul unui arc ce are lungimea de 200 mm. Să se calculeze măsura unghiului corespunzător acestui arc.

R. $88^{\circ}53'20''$.

55. Pe laturile AB şi BC ale unui triunghi ABC, se construiesc în exterior pătratele $ABMN$ şi $BCQP$. Fie O_1 şi O_2 centrele acestor pătrate şi K, L mijloacele laturilor AC respectiv MP. $AP\cap MC=D$. Arătaţi că: a) $\Delta MBC\equiv\ ABP$; b) $AMBD$ inscriptibil; c) O_1LO_2K pătrat.

Indicaţie: Se arată că $MC\perp AP$, folosind patrulaterul inscriptibil.

III.11. FIGURI ASEMENEA

Segmente proporţionale

56. Să se împartă segmentul de 12 cm in părţi proporţionale cu numerele 2, 5, 6, 8.

57. Se dau trei segmente de lungimi: 4 cm; 7 cm; 9 cm. Să se afle, prin construcţie grafică, a patra proporţională prin două metode (a paralelelor şi dreptelor ce pleacă din acelaşi punct).

58. Să se afle pe cale grafică: $\sqrt{12}$; $\sqrt{15}$; $\sqrt{28}$. Se vor folosi mai multe metode.

59. Să se afle pe cale grafică $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{11}$.

60. Să se împartă segmentul AB în cinci părţi egale. (Construcţie grafică.)

61. Fie a, b, c segmente date. Să se împartă segmentul AB în părţi proporţionale cu a, b, c.

62. Pe segmentul AB=70 mm, să se găsească un punct M astfel ca: $\frac{MA}{MB}=\frac{3}{5}$ apoi un punct M' astfel ca: $\frac{M'A}{M'B}=\frac{5}{3}$. Cum sînt aşezate M şi M' faţă de extremităţile segmentului ?

63. Se prelungesc medianele BB', CC' ale triunghiului ABC cu $[B'B"]\equiv[BB']$, $[C'C"]\equiv[CC']$. Să se arate că punctele A, $B"$, $C"$ sînt coliniare.

64. Intr-un trapez dreapta care uneşte mijloacele laturilor neparalele, este paralelă cu bazele şi trece prin mijloacele diagonalelor.

65. Să se construiască un triunghi, cunoscînd măsura unghiului A, lungimea bisectoarei unghiului A şi raportul lungimilor laturilor $\frac{AB}{AC}=a$.

66. Să se demonstreze, bazîndu-se pe congruenţe de triunghiuri, că dreapta care uneşte mijloacele a două laturi a unui triunghi este paralelă cu a treia şi egală cu jumătatea ei.

67. Fie ABC un triunghi oarecare şi D un punct situat pe prelungirea lui AC, astfel ca $\sphericalangle BAC\equiv\sphericalangle CBD$. Să se demonstreze că BD este medie proporţională între AD şi CD.

68. Să se demonstreze că lungimea diametrului EF al cercului înscris într-un trapez isoscel $ABCD$ este medie proporţională între lungimile celor două baze ale acestuia.

Indicaţie: Centrul cercului O este la intersecţia bisectoarelor unghiurilor trapezului.

69. Să se construiască media proporţională între două segmente a şi b de lungime: a=20 mm, b=45 mm, folosind teorema catetei şi apoi a înălţimii. Să se afle prin calcul media proporţională a acestor lungimi şi să se verifice concordanţa celor trei rezultate.

70. Să se afle, prin desen, valoarea mediei proporţionale a numerelor 37 şi 54 şi să se verifice rezultatul prin calcul.

Indicaţie: Se construieşte grafic media proporţională între 37 mm şi 54 mm şi apoi se măsoară segmentul obţinut.

71. Să se deseneze un dreptunghi oarecare. Apoi să se construiască fără calcul sau măsurători, un pătrat echivalent cu dreptunghiul iniţial.

72. Pe laturile unui romb $ABCD$ se iau punctele M, N, P, Q astfel ca $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{ND}=\frac{CP}{PD}=\frac{CQ}{QB}=2$. Să se găsească valoarea raportului dintre aria rombului şi aria dreptunghiului $MNPQ$. **R.** $\frac{9}{4}$.

III.12. ASEMĂNAREA

73. Pe catetele AB şi AC ale unui triunghi dreptunghic se construiesc în exterior pătratele $ABDE$ şi $ACFG$; $AC\cap BF=\{K\}$ şi $AB\cap DC=\{H\}$. Să se arate că triunghiul AHK este isoscel.

Indicaţie: Se observă că triunghiurile $CAH\sim CDE$ şi $ABK\sim BGF$. Dacă notăm $|AC|=b$; $|AB|=c$

obținem $|AH|=\frac{bc}{b+c}$ și $|AK|=\frac{bc}{b+c}$.

74. Să se arate că mijloacele laturilor unui triunghi oarecare și piciorul uneia din înalțimile triunghiului sînt vîrfurile unui trapez isoscel.

Indicație: Se aplică teorema referitoare la linia mijlocie într-un triunghi și teorema referitoare la mediana corespunzătoare ipotenuzei într-un triunghi dreptunghic.

75. Să se demonstreze că suma distanțelor vîrfurilor unui triunghi la o dreaptă exterioară triunghiului este egală cu suma distanțelor mijloacelor laturilor triunghiului la aceeași dreaptă.

Indicație: Se va aplica teorema referitoare la linia mijlocie în trapez.

76. Fie M și N mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez, iar P și Q mijloacele diagonalelor sale. Să se arate că segmentele MN și PQ au același mijloc.

77. In triunghiul dreptunghic ABC, cu unghiul drept în A, avem $AC=2AB$. Să se ia pe cateta AC un punct D, astfel ca $m(\sphericalangle BDA)=90^0-m(\sphericalangle C)$. Să se arate că $DC=3AD$.

Indicație: Inlocuind pe AC cu valoarea sa din enunțul problemei obținem din asemănarea triunghiurilor ABC și ABD: $\frac{AB}{AD}=\frac{2AB}{AB}$, de unde $AB=2AD$ și fiindcă prin ipoteză $AC=2AB$ deducem, ținînd seama de cele de mai sus, că: $AC=4AD$.

78. Fie D un punct oarecare pe baza BC a unui triunghi ABC. Prin vîrfurile B și C ducem paralele la AD. Acestea întîlnesc prelungirea lui AC în M și prelungirea lui AB în N. Să se arate că: $MB \cdot DC=NC \cdot DB$.

79. O paralelă la mediana AD a triunghiului ABC întîlnește respectiv laturile AB, AC, în E și F. Să se demonstreze că: $\frac{AE}{AF}=\frac{AB}{AC}$.

Indicație: Ducînd $GE \parallel BC$ se obține $\Delta AEG \sim \Delta ABC$ (fig. III.11).

80. Produsul lungimilor a două laturi AB, AC ale unui triunghi ABC este egal cu produsul lungimii diametrului cercului circumscris triunghiului prin lungimea înălțimii AA', dusă la vîrful A.

Indicație: $\Delta ADC \sim \Delta ABA'$ (fig. III.12).

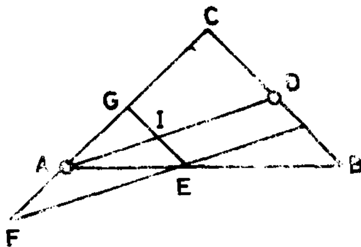


Fig.III.11

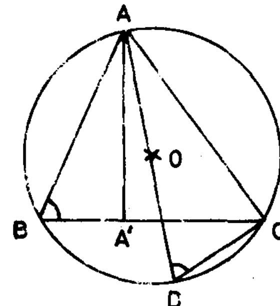


Fig.III.12

81. Se dă un punct M pe diagonala AC a unui patrulater oarecare $ABCD$. Se duce MP

paralelă la AB şi MQ paralelă cu CD ($P \in BC$ iar $Q \in AD$). Să se demonstreze că: $\frac{MP}{AB}+\frac{MQ}{CD}=1$.

Indicaţie: $\begin{cases} \text{triunghiul } MPC \sim \Delta ABC \rightarrow \frac{MP}{AB}=\frac{MC}{AC}, \\ \text{triunghiul } AMQ \sim \Delta ACD \rightarrow \frac{MQ}{CD}=\frac{AM}{AC} \end{cases}$

Adunăm membru cu membru egalităţile de mai sus şi obţinem 1.

82. Pe bisectoarea unui unghi drept xOy, se consideră un punct fix A. O secantă variabilă ce trece prin A taie pe Ox în M şi pe Oy în N. Să se arate că suma: $\frac{1}{OM}+\frac{1}{ON}$ are aceeaşi valoare, oricare ar fi poziţia secantei.

Indicaţie: Ducem din A perpendicularele AP şi AQ pe Ox şi Oy. Triunghiurile AQN şi MON sînt asemenea, deci $\rightarrow \frac{QA}{OM}+\frac{OQ}{ON}=1$. Sau, vom scrie că suma ariilor triunghiurilor OAN şi OAM este egală cu aria triunghiului OMN.

83. Latura pătratului $ABCD$ este egală cu a. Pe diagonala AC se ia punctul P, astfel încît $PC=\frac{AC}{4}$. Notăm $PB \cap CD=\{E\}$, O centrul pătratului, OU perpendiculara din O pe BC şi $BP \cap OU=\{M\}$.

a) Să se determine CE. b) Să se arate că triunghiul BCM este isoscel.

Indicaţie: Dreapta OU este paralelă cu AB, ambele fiind perpendiculare pe BC. Triunghiurile PAB şi POM sînt asemenea. Scriind proporţionalitatea laturilor omoloage, avem: $\frac{OM}{AB}=\frac{PM}{PB}=\frac{PO}{PA}=\frac{1}{3} \rightarrow OM=\frac{a}{3}$ Pe de altă parte triunghiurile OPM şi PEC *sînt congruente; patrulaterul* $ECMO$ este un paralelogram.

84. Fie ABC un triunghi echilateral înscris întrun cerc. Din centrul O al cercului ducem $OD \parallel BC$, $D \in AC$. Să se determine lungimile segmentelor AD şi DC, cunoscînd că lungimea ℓ_3 a laturii triunghiului ABC este de $12\sqrt{3}$ cm.

R. $8\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}$ cm.

85. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic în A. Cercul ce are ca diametru latura oblică taie latura opusă AD în punctele M şi N. Să se arate că fiecare din produsele $MA \cdot MD$ şi $NA \cdot ND$ este egal cu produsul bazelor trapezului.

Indicaţie: Triunghiurile MDC şi MBA sînt dreptunghice în D şi A; $m(\sphericalangle DCM)=m(\sphericalangle AMB)$, ca unghiuri cu laturi perpendiculare $\rightarrow \Delta MDC \sim \Delta MBA$. Analog: $\Delta NDC \sim \Delta NBA \rightarrow ND \cdot NA=DC \cdot AB \Rightarrow$ $\rightarrow MA \cdot MD=NA \cdot ND=AB \cdot DC$.

86. Se dă un paralelogram $ABCD$. Fie F un punct pe prelungirea laturii AB, iar $FD \cap AC=\{E\}$. Să se determine lungimea segmentului BF ştiind că: $\frac{AE}{EC}=\frac{m}{n}$ şi $BA=a$.

Indicaţie: $\Delta AEF \sim \Delta CED \rightarrow \frac{AE}{EC}=\frac{AF}{DC}$. Inlocuind primul raport cu $\frac{m}{n}$, iar pe $AF=a+BF$, cunoscute, obţinem: $\frac{m}{n}=\frac{a+BF}{a} \rightarrow \frac{m-n}{n}=\frac{BF}{a}$.

R. $BF=\frac{a(m-n)}{n}$.

87. In trapezul dreptunghic $ABCD$, avînd ca baze AB baza mică şi CD baza mare, fie E mijlocul înălţimii AD şi $[AD]\equiv[DC]$. Să se arate că, dacă BE este perpendiculară pe EC atunci aria trapezului $ABCD$ este egală cu $10\cdot AB^2$.

Indicaţie: $\sphericalangle ABE\equiv\sphericalangle DEC$ ca avînd laturile perpendiculare → triunghiurile ABE şi DEC sînt asemenea. E este mijlocul lui AD şi $DC=AD$ prin ipoteză, deci $\frac{AE}{2AE}=\frac{AB}{AE}$ de unde: $AE=2AB$ → $DC=AD=2AE=4AB, AD=4AB$. Acum este suficient să înlocuim în formula ariei trapezului.

88. Să se arate că paralela EF dusă la bazele unui trapez $ABCD$, prin punctul M de întîlnire al diagonalelor, este împărţită în două părţi, de lungimi egale, de acest punct.

Indicaţie: Se foloseşte asemănarea triunghiurilor formate.

89. Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic mediana şi înălţimea duse din vîrful unghiului drept formează între ele un unghi a cărui măsură este egală cu diferenţa măsurilor unghiurilor ascuţite ale triunghiului.

90. Fie triunghiul ABC şi $DE||BC$; $(D\in AB;\ E\in AC)$ şi înălţimea AA' $(A'\in BC)$ şi $AA'\cap DE=\{F\}$. Paralela din F la AB şi paralela din A' la AC se intersectează în P. Să se arate că punctele B, P, E sînt coliniare.

91. In triunghiul dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A)=90^0$ se duce mediana AM $(M\in BC)$. Fie D un punct oarecare pe BM; N mijlocul lui AD şi P simetricul punctului M în raport cu N. $PD\cap AC=\{O\}$ şi $PD\cap AB=\{Q\}$. Să se arate că $[QD]\equiv[DB]$; ΔODC este isoscel; $OQ=2AP$.

92. Să se arate că dreapta care uneşte două din picioarele înălţimilor unui triunghi dat formează un alt triunghi asemenea cu primul.

Indicaţie: Se va ţine seama că picioarele celor două înălţimi sînt pe acelaşi cerc cu două vîrfuri ale triunghiului dat şi se va deduce egalitatea măsurilor unghiurilor celor două triunghiuri.

93. Se dau două cercuri secante în punctele P şi Q. In primul cerc O_1, se înscrie un triunghi ABC. Dreptele AP, BP, CP întîlnesc din nou cercul al doilea O_2 respectiv în punctele A', B', C'. Să se arate că triunghiul $A'B'C'$ este asemenea cu triunghiul ABC. Justificaţi (v. fig. III.13.).

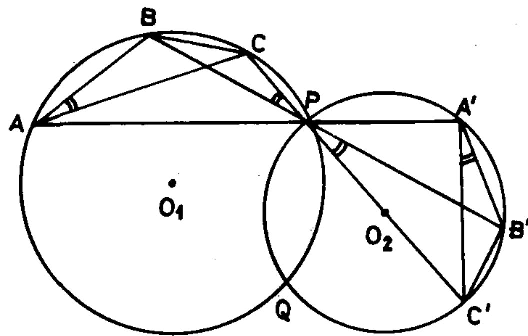


Fig.III.13

94. Pe laturile Ox şi Oy ale unui unghi, se iau punctele A şi B, respectiv C şi D astfel încît $OA\cdot OB=OD\cdot OC$. Să se arate că patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil.

Indicaţie: $\Delta OCA\sim\Delta OBD$; din $m(\sphericalangle OAC)=m(\sphericalangle ODB)$, rezultă că $ABCD$ este inscriptibil.

95. În dreptunghiul $ABCD$, $AB=2AD$. Pe latura DC se ia punctul M şi pe latura AD punctul N astfel încît $AN=2DM$. Să se arate că $AM \perp BN$.

Indicaţie: $\Delta ANB \sim \Delta ADM$; din congruenţa unghiurilor celor două triunghiuri, rezultă că unghiul dreptelor AM şi BN este de 90^o.

96. Se prelungesc în acelaşi sens laturile AB şi DC, ale unui pătrat de latură "a" cu lungimile $BE=\frac{a}{2}$ şi $CF=a$. Să se demonstreze că $AF \perp CE$. Să se arate că punctul lor de intersecţie M, se află pe cercul circumscris pătratului.

Indicaţie: a) Se va proceda ca la problema precedentă; b) Se observă că $m(\sphericalangle CMA)=90^o \rightarrow$ $\rightarrow M$ se află pe cercul de diametrul AC.

97. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic, $m(\sphericalangle A)=90^o$; $m(\sphericalangle B)=90^o$, iar intersecţia diagonalelor se notează cu O. Paralela dusă prin O la baze se intersectează cu AB în E. Să se arate ca EO este bisectoarea unghiului DEC.

Indicaţie: $\Delta AOD \sim \Delta BOC$ (din proporţionalitatea laturilor şi teorema lui Tales) rezultă că $\Delta ADE \sim \Delta BEC$. Se observă că $m(\sphericalangle DEO)=m(\sphericalangle OEC)$ (se poate aplica şi reciproca teoremei bisectoarei).

III.13. RELAŢII METRICE

98. Triunghiul isoscel ABC, $AB=AC=8$ cm şi înălţimea $AD=6{,}4$ cm, este înscris într-un cerc O. a) Să se calculeze raza cercului. b) Să se determine raza cercului dacă $AB=a$ şi $AD=b$. c) Să se determine aria triunghiului ABC.

R. a) $r=5$ cm; b) $r=\frac{a^2}{2b}$; c) $b\sqrt{a^2-b^2}$.

99. Catetele AB şi AC ale unui triunghi ABC sînt respectiv de 15 şi 20 de unităţi de lungime. Să se determine mărimea înălţimii AP duse din vîrful unghiului drept pe ipotenuză precum şi cele două segmente PB şi PC determinate de aceasta pe ipotenuză.

R. $AP=12$; $PB=9$; $PC=16$.

100. Catetele unui triunghi dreptunghic au 8 şi 15 unităţi de lungime. Cît de mare este raza cercului înscris în acel triunghi ?

R. 3.

101. Intr-un triunghi isoscel obtuzunghic ABC (AB şi AC sînt congruente), baza $BC=32$ m, iar laturile egale sînt de 20 m. Din punctul A se duce o perpendiculară pe AB ($AE \cap BC=\{E\}$). Să se calculeze lungimea segmentelor AE şi CE.

Indicaţie: $AD^2+DE^2=AE^2$, dar $AE^2=BE \cdot DE$, deci $BE \cdot DE=AD^2+DE^2$.

R. 15 m şi 7 m.

102. Trebuie frezată o piesă pătratică cu latura de 32 mm. Care este cel mai mic diametru pe care trebuie să-l aibe o bucată rotundă de fier pentru acest scop ?

R. ≈ 45 mm.

103. Diametrul unei bîrne este de 12 cm. Se poate ciopli din ea o grindă pătratică cu latura de 10 cm ?

R. Nu.

104. Catetele unui triunghi dreptunghic sînt de 8 dm şi 18 cm. Să se determine raza cercului circumscris.

R. 41 cm.

105. Să se afle aria cercului înscris într-un triunghi echilateral ABC cu latura de 6 cm.

R. 3π cm^2.

106. Razele a două cercuri sînt de 27 cm şi 13 cm, iar distanţa dintre centrele lor este de 50 cm. Să se determine lungimea unei tangente exterioare şi a uneia interioare (comune).

R. tg.ext.=48 cm; tg.int.=30 cm.

107. Intr-un cerc O cu raza de 10 m se duce o coardă MN lungă de 16 m şi diametrul AB este perpendicular pe această coardă. Să se calculeze: a) distanţa de la centrul cercului la coarda MN; b) lungimile celor două segmente ale diametrului determinate de coardă.

R. a) 6 m; b) 4 m; 16 m.

108. Să se determine aria unui paralelogram ştiind că una dintre laturile sale este de 51 cm, iar diagonalele sînt de 40 cm şi 74 cm.

R. 1 224 cm^2.

109. Fundul circular al unui butoi este format din 4 scînduri de aceeaşi lăţime. Raza cercului fiind de 30 cm, să se afle aria fiecărei scînduri.

R. două scînduri a cîte $450\sqrt{3}$ cm^2, alte două scînduri de cîte 900 cm^2.

110. Arcul descris din vîrful A al unui unghi drept al unui triunghi dreptunghic ABC, cu o rază egală cu cateta cea mai mică $AB=c$, taie ipotenuza BC în D. Se dau lungimile segmentelor $BD=p$, $DC=q$. Să se determine mărimile $b=AC$ şi $c=AB$ ale celor două catete. Să se verifice apoi rezultatul aflat, aplicînd teorema lui Pitagora în triunghiul ABC (fig. III.14).

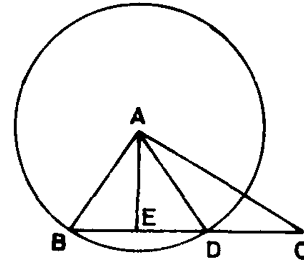


Fig.III.14

Indicaţie: ΔABD este isoscel şi deci AE înălţimea este şi mediană, $BE=ED=\frac{p}{2}$, $EC=\frac{p}{2}+q$. In ΔABC aplicînd teorema înălţimii: $\frac{p^2+2pq}{4}=AE^2$. Apoi din ΔABE deducem: $c^2=\frac{p^2+pq}{2}$; şi din triunghiul dreptunghic AEC, $c^2=\frac{p^2+3pq+2q^2}{2}$.

111. Perimetrul unui dreptunghi $ABCD$ este de $18\frac{2}{3}$ cm. Raportul dintre dimensiunile laturilor dreptunghiului este $\frac{3}{4}$. Din vîrful A al dreptunghiului se duce o perpendiculară pe diagonala BD care intersectează pe BD în O şi pe BC în F. Să se determine: a) perimetrul ΔBOF; b) valoarea raportului $\frac{OF}{OA}$; c) aria $AFCD$.

Indicaţie: $AB^2=BD\cdot BO$.

R. a) 7,2 cm; b) $\frac{9}{16}$; c) $15\frac{1}{3}$ cm^2.

III.14. POLIGOANE

112. Se dă un triunghi oarecare *ABC*. Ducem înălţimea *AD* ($D \in BC$) iar din *D* ducem o perpendiculară pe *AC*, care întîlneşte bisectoarea unghiului *DAC* în *O*. Să se arate că triunghiul *DOM* (*M* fiind piciorul bisectoarei) este isoscel (fig. III.15).

113. Pe cercul circumscris unui triunghi echilateral *ABC* se ia un punct oarecare *M*. Să se demonstreze că cel mai mare dintre segmentele *MA, MB, MC* este egal cu suma celorlalte două.

Indicaţie: Luăm pe *MC* punctul *D* astfel ca $[MB]\equiv[MD]$; ΔDMB este echilateral. Se compară ΔAMB şi ΔBDC (fig.III.16). $m(\sphericalangle ABM)=m(\sphericalangle BCD)=60-m(\sphericalangle ABD) \rightarrow [DC]\equiv[AM]$.

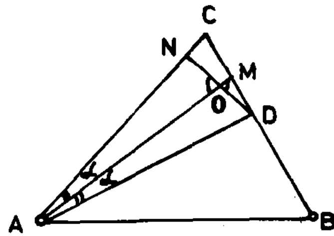


Fig.III.15

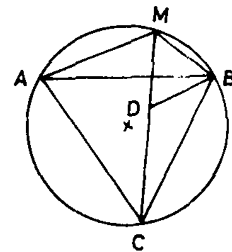


Fig.III.16

114. Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic: a) lungimea medianei relative la ipotenuză este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei; b) dacă un unghi ascuţit are 30°, cateta opusă lui este egală cu jumătate din ipotenuză.

115. Lungimea laturii unui triunghi echilateral este egală cu 10 cm. Să se calculeze lungimea razei unui cerc a cărui arie este a patra parte din aria cercului în care se poate înscrie triunghiul dat.

R. $\frac{5}{2\sqrt{3}}$ cm.

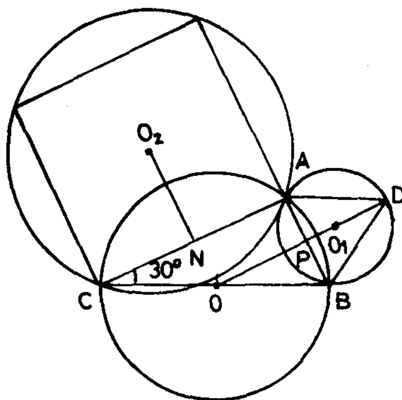


Fig.III.17

116. Se consideră un triunghi dreptunghic *ABC* cu $m(\sphericalangle C)=30^{\circ}$ şi fie *O* centru cercului circumscris acestui triunghi. Cateta *AB* este latura unui triunghi echilateral *ABD*, înscris în cercul O_1, secant cu cercul *O* în *A* şi *B*. Cateta *AC* este latura pătratului înscris în cercul O_2 secant cu cercul *O* în *A* şi *C*. Să se demonstreze că înălţimea triunghiului echilateral *ABD* are lungimea egală cu apotema pătratului din figură, iar latura pătratului este congruentă cu latura triunghiului echilateral înscris în cercul *O* (fig.III.17).

Indicaţie: Patrulaterul *ACOD* este un paralelogram $\rightarrow AD=R$; unde *R* este raza cercului *O*, iar

$AP=\frac{R}{2}$. In triunghiul dreptunghic ADP avem: $DP=\frac{R\sqrt{3}}{2}$. Dar $\Delta BDP\equiv\Delta BOP$, deci: $DO=2DP=AC=$latura pătratului din figură. Insă şi $NO_2=\frac{AC}{2}\rightarrow DP=NO_2$, iar pentru mărimea laturii pătratului se observă că subîntinde un arc de 120° în cercul iniţial adică este tocmai latura triunghiului echilateral înscris în cercul O.

117. Ce diametru trebuie să aibă un copac, pentru ca prin cioplire să se poată scoată din el un stîlp prismatic cu baza un pătrat a cărui latură să fie de 3 dm ?

R. $3\sqrt{2}\approx 4{,}23$ dm.

118. Ce diametru trebuie să aibă un copac, pentru ca prin cioplire să se poată scoate din el un stîlp prismatic cu baza un triunghi echilateral, a carui latură să fie 4 dm ?

R. $\approx 4{,}62$ dm.

119. Prin vîrfurile unui triunghi ABC se duc paralele la fiecare latură. Fie A', B', C' punctele opuse respectiv lui A, B, C. Se uneşte B cu B' şi C cu C'; $BB'\cap AC=\{E\}$ şi $CC'\cap AB=\{D\}$. Să se arate că triunghiul CEB este echivalent cu triunghiul BCD.

Indicaţie: Se arată că triunghiurile CEB şi BDC au aceeaşi înălţime şi au bază comună. Pe de altă parte patrulaterele $ABCB'$ şi $ACBC'$ sînt paralelograme.

120. Să se calculeze latura unui triunghi echilateral ştiind că diferenţa dintre raza cercului circumscris şi a celui înscris este de 24 mm.

R. $48\sqrt{3}$ mm.

121. Un triunghi echilateral este tăiat prin paralele duse la laturi la $\frac{1}{3}$ din înălţimea socotită de la vîrf. Să se demonstreze că figura obţinută în interiorul triunghiului este un hexagon regulat şi să se afle aria acestui hexagon, ştiind că lungimea laturii triunghiului dat este de 120 mm.

R. 4 152 mm^2.

122. Să se calculeze aria unui triunghi cu laturile avînd lungimile de 65 cm, 40 cm şi 87 cm.

Indicaţie: Se aplică de două ori teorema lui Pitagora pentru aflarea înălţimii.

R. 1 224 cm^2.

123. Capătul unei tije cilindrice cu diametrul de 48 mm trebuie cioplit astfel încît secţiunea să fie pătratul cu latura cea mai mare posibilă. Să se calculeze latura pătratului.

R. ≈ 34 mm.

124. Unui cerc cu raza de 16 cm i se circumscrie un triunghi echilateral, un pătrat şi un hexagon regulat. Să se determine lungimile laturilor acestor poligoane cu o precizie de 1 mm.

Indicaţie: Pentru aflarea laturii triunghiului se vor uni punctele de contact ale laturilor triunghiului cu cercul şi se vor folosi proprietăţile liniei mijlocii.

R. 55,3 cm; 32 cm; 18,4 cm.

125. Intr–un cerc cu raza avînd lungimea de 4 cm se înscriu un triunghi echilateral, un pătrat şi un hexagon regulat. Să se afle raportul dintre suma lungimilor laturilor

acestor poligoane şi suma lungimilor celor trei apoteme. Să se arate ca acest raport nu depinde de raza cercului.

R. $\ell_3+\ell_4+\ell_6=R(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)$, $a_3+a_4+a_6=R\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Valoarea raportului este totdeauna 2.

126. Lungimea laturii unui triunghi echilateral este de 6 cm. Să se găsească aria triunghiului şi raza cercului circumscris.

R. 15,57 cm^2; 3,46 cm.

127. O sală trebuie pardosită cu plăci în formă de hexagon regulat cu latura de 12 cm. Sala are 7,48 m lungime şi 3,25 m lăţime. Să se determine numărul de plăci necesare pentru pardosire.

R. 650 de plăci.

128. O tablă de oţel în formă de hexagon regulat cu latura de 60 cm trebuie vopsită pe ambele părţi. Să se calculeze cantitatea de vopsea necesară, dacă pentru 6,5 cm^2 se consumă 1,5 g de vopsea.

R. 4,312 kg.

129. In triunghiul dreptunghic ABC(m($\sphericalangle A$)=90^o), m($\sphericalangle B$)=60^o se duce AM mediană, ($M \in BC$). Din M se duc perpendicularele pe AM şi pe BC astfel ca $MN \cap AC=\{N\}$ şi $ME \cap AC=\{E\}$. a) Ce fel de triunghiuri sînt AMN şi MEN ? b) Să se arate că $NE=\frac{AC}{3}$.

130. In triunghiul ABC se duc perpendiculare din A pe bisectoarele interioare şi exterioare ale unghiurilor B şi C şi obţinem punctele E, D, N, M. Să se arate că aceste puncte sînt coliniare.

Indicaţie: Se vor observa dreptunghiurile ce se formează.

131. *Elementele poligoanelor regulate înscrise în cerc* (hexagon, triunghi, pătrat)

	latura	apotema	aria	aria
triunghi	$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$	$\frac{l_3^2\sqrt{3}}{4}$
pătrat	$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$2R^2$	l_4^2
hexagon	R	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3l_6^2\sqrt{3}}{2}$

III.15. TRIGONOMETRIE

132. *Valorile funcţiilor trigonometrice ale unghiurilor de 30°, 45° şi 60°* sînt prezentate în tabelul de mai jos.

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\text{tg}\,\alpha$	$\text{ctg}\,\alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

133. Pe un teren înclinat trebuie să se planteze pomi care să aibă între ei o distanţă de 5 m. La ce distanţă trebuie săpate gropile pentru sădirea pomilor, dacă panta are o înclinare de 31° faţă de orizontală ?

R. 5,83 m.

134. Un coş de fabrică înalt de 30 m lasă o umbră de 45 m. Să se afle înălţimea soarelui deasupra orizontului, în momentul cînd s–a măsurat umbra.

R. ≈33°30'.

135. Cîtă tablă este necesară pentru confecţionarea unui acoperiş cu două pante al unei hale dreptunghiulare de 30 m lungime şi 10 m lăţime, ştiind că panta acoperişului este de 40° şi că pentru încheierea tablei se mai adaugă 5% material.

Indicaţie: Fiecare pantă formează un dreptunghi (fig. III.18, pag.144) cu dimensiunile $a=30$ m şi b, care se poate calcula din Δ dreptunghic ABC (haşurat), în care avem: $BC=5$ m şi unghiul $ACB=40°$.

R. $2\cdot 195{,}6+\frac{5}{100}(2\cdot 195{,}6)\approx 411\ \text{m}^2$.

136. Un vagonet încărcat are masa de 300 kg. Cu ce forţă trebuie împins vagonetul pe un plan înclinat cu 17° faţă de sol pentru ca vagonetul să se urnească din loc ?

R. 8,76 N.

137. Dintr–un punct aflat la distanţa $a=86{,}6$ m de centrul bazei unui turn vizăm turnul sub unghiul 22°30'. Să se calculeze înălţimea turnului.

R. 35,8 m.

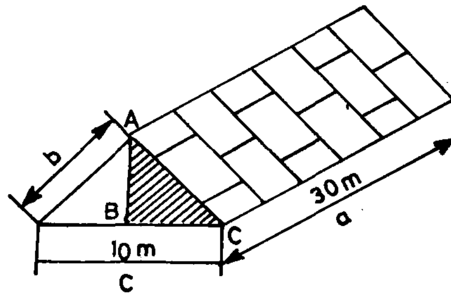


Fig.III.18

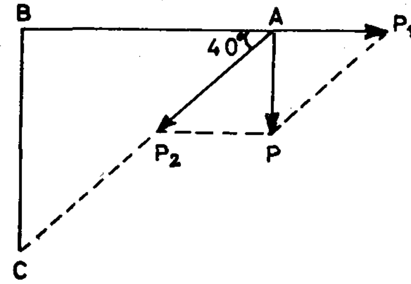


Fig.III.19

138. O cale ferată se ridică la fiecare 30 m de şine cu o cotă de 1 m. Să se afle unghiul de urcare.

R. ≈ 2^{o}.

139. Un elicopter se află la 1 700 m deasupra unei ţinte a cărei poziţie o semnalează aeroportul. In acel moment observatorul citeşte unghiul direcţiei elicopterului cu orizontul de 35^{o}. Să se afle distanţa (în linie orizontală) de la aeroport la elicopter.

R. 2 427,6 m.

140. In capătul A al unei macarale de perete este atîrnat un corp P cu greutatea de 900 N. Barele AB şi AC ale macaralei formează un unghi de 40^{o} (fig. III.19). Să se determine efortul din bare.

Indicaţie: Forţa P se descompune în două componente, după direcţiile barelor, P_1 (forţa ce întinde bara AB) şi P_2 forţa ce comprimă bara AC).

R. $P_1=P$ ctg 40^{o} =1 073 N; P_2=1 400 N.

141. Să se afle lungimea proiecţiei unui segment $AB=a$ pe o dreaptă $x'x$, care face cu AB un unghi dat α (Aplicaţie a=21 m, $\alpha=25^{o}$.)

R. $A'B'$=21 cos 25^{o}=21 · 0,906=19,03m.

142. O scară de piatră este formată din trepte care au lăţimea l=27 cm şi înălţimea a=18 cm. Să se calculeze unghiul pe care îl face scara cu direcţia orizontală.

R. ≈ $33^{o}30'$.

143. Intr–un trapez isoscel, diferenţa lungimilor bazelor este de 2 cm, iar linia mijlocie are lungimea de 6 cm. Latura neparalelă face cu baza un unghi de 60^{o}. Să se calculeze lungimea bazelor trapezului şi aria sa.

R.7 cm; 5 cm; $6\sqrt{3}$ cm^2.

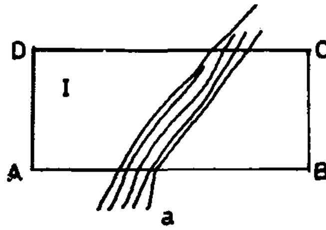
144. Un cerc cu raza R este circumscris unui pentagon regulat. Să se afle latura, apotema şi aria pentagonului.

Indicaţie: Se foloseşte triunghiul dreptunghic care are ipotenuza R, iar catete apotema poligonului şi jumătatea laturii.

R. Notînd cu l_5, a_5, A_5 elementele cerute, obţinem:
$l_5=2R$ sin 36^{o}; $a_5=R$ cos 36^{o}; $A_5=5R^2$ sin 36^{o} cos 36^{o}.

145. Două terenuri în formă de dreptunghi au fost inundate parţial, aşa cum se vede în figura III.20,*a* şi *b*. Bazele fiind inaccesibile, s–a putut măsura la primul teren lăţimea de 180 m, care se vede din A sub unghiul de $32^{o}30$. La terenul al doilea s–a putut măsura lungimea de 160 m, care este văzută tot din punctul A sub unghiul de 34^{o}. Să se afle ariile celor două terenuri.

R. 50 862,60 m^2; 17 254,40 m^2.



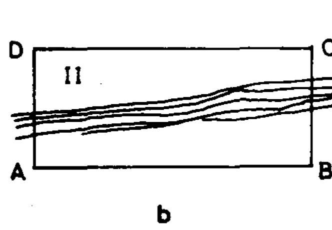


Fig.III.20

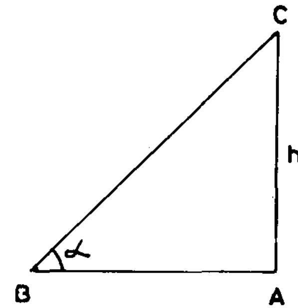


Fig.III.21

146. O scîndură cu lungimea de 42,6 dm este sprijinită pe un prag înalt; $h=180$ cm, spre a servi ca plan înclinat pentru rostogolirea pe ea a unui butoi greu, care trebuie ridicat peste prag. Să se determine unghiul ce–l face scîndura cu pavajul orizontal al curţii.

147. O scară BC de lungime dată l este rezemată de o podea orizontală AB şi de un perete vertical AC (fig. III.21). Se cunoaşte unghiul α pe care scara BC îl face cu orizontala AB. Se cere să se afle înălţimea $AC=h$ pe care o putem atinge cu această scară, precum şi distanţa $AB=k$ a extremităţii B a scării de la piciorul A al zidului. (Aplicaţie numerică: $l=5{,}20$ m; $\alpha=68^{o}30'$.)

R. $h=4{,}836$ m; $k=1{,}908$ m.

148. Un drum în linie dreaptă este înclinat faţă de orizontala AB cu unghiul α. Se cere să se calculeze lungimea acestui drum şi înclinarea sa α deasupra orizontalei, cînd se cunoaşte $AB=589$ m; $h=121{,}5$ m (fig. III.22).

R. $\alpha \approx 11^{o}30'$; $L=601{,}4$ m.

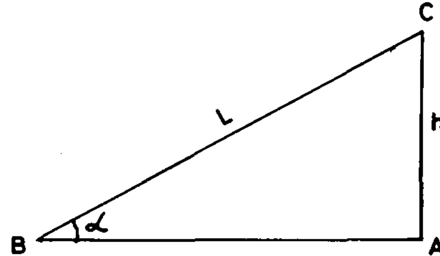


Fig.III.22

III.16. ARII

149. Fie ABC un triunghi echilateral şi M un punct arbitrar pe latura BC, ($M \in BC$). Fie ME şi MF distanţele de la punctul M la laturile AB si AC. Să se arate că suma $ME+MF$ este constantă şi egală cu înălţimea triunghiului dat (fig. III.23).

Indicatie: Să unim pe M cu A şi să scriem că aria $\Delta(CMA)$ + aria $\Delta(BMA)$ = aria $\Delta(ABC) \Rightarrow \frac{AC \cdot MF}{2}+\frac{AB \cdot ME}{2}=\frac{AC \cdot BH}{2}$, unde H este piciorul perpendicularei pe AC din B.

Observaţie. Consideraţiile de mai sus rămîn valabile şi în

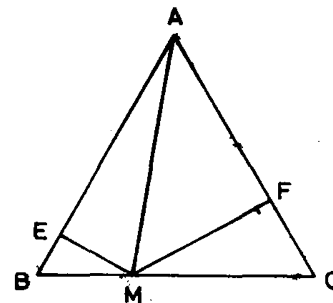


Fig.III.23

cazul triunghiului isoscel, cînd $[AB]\equiv[AC]$, atunci valoarea constantei este egală cu una dintre cele două înălțimi ce se pot duce din vîrfurile unghiurilor egale ale triunghiului.

150. Se consideră un hexagon regulat *ABCDEF* de latură *l*. Se construiește pe fiecare latură a sa, în exterior, cîte un triunghi echilateral. Se obține în modul acesta un poligon cu 12 laturi în formă de stea. Se cere să i se afle aria. Să se afle apoi latura unui alt hexagon care are aria egală cu aria poligonului cu 12 laturi.

Indicatie. Aria poligonului în formă de stea se compune din aria hexagonului de latură 1 și ariile a șase triunghiuri echilaterale de aceeași latură.

Observatii. Latura noului hexagon este cît latura unui pătrat înscris în același cerc în care se poate înscrie hexagonul *ABCDEF*, ceea ce ne permite să-l construim cu rigla și compasul.

R. Aria poligonului cu 12 laturi este $3l^2\sqrt{3}$.

151. Să se arate că aria unui hexagon regulat este dublul ariei triunghiului echilateral înscris în același cerc cu el. Presupunînd că latura triunghiului echilateral este de 3 cm, cît este de mare aria pătratului înscris în același cerc ?

R. $A_4=6$ cm^2.

152. Se dă un octogon regulat *ABCDEFGH*. Să se calculeze aria cuprinsă între acest octogon și pătratul *BDFH*, presupunînd că se cunoaște raza *R* a cercului circumscris octogonului.

Indicație. Pentru a înscrie un octogon într-un cerc, înscriem în prealabil un pătrat *BDFH* și prelungim apotemele acestuia pînă taie cercul. Se obțin astfel 4 puncte care împreună cu vîrfurile pătratului determină vîrfurile octogonului regulat.

R. $2(\sqrt{2}-1)R^2$.

153. Se împart laturile unui pătrat *ABCD* cu latura *l* în cîte patru părți egale și se taie colțurile pe la primele diviziuni; se obține un octogon (fig. III.24). a) Să i se calculeze aria și perimetrul. b) Cît este mare înălțimea ce pleacă din vîrful unghiului obtuz al unui triunghi arătat în figură prin *RPM* unde *R* este mijlocul laturii *PQ* a octogonului

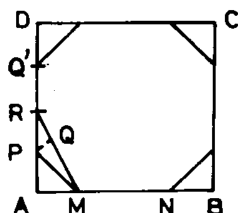


Fig.III.24

Indicație: Cele patru triunghiuri tăiate de la colțuri sînt dreptunghice isoscele egale. Deci este suficient să calculăm, de exemplu, aria triunghiului dreptunghic isoscel *PMA* cu catetele egale cu $\frac{1}{4}$. Apoi perimetrul căutat va fi: $P=4MN=l(2+\sqrt{2})$. Pentru calculul înălțimii *PQ* ne vom folosi de aria triunghiului *RPM*. Aria unui triunghi de felul lui *RPM* se află, luînd ca bază, de exemplu, *RP* și ca înălțime pe *MA*. Aceeași arie se poate afla luînd ca bază pe *MR* și ca înălțime pe *PQ*. $RM=\sqrt{AR^2+AM^2}=\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2+\left(\frac{l}{4}\right)^2}=$ $=\frac{l\sqrt{5}}{4}$. Prin compararea ariilor $\Rightarrow PQ=\frac{1}{4\sqrt{5}}$.

R. a) $\frac{7l^2}{8}$; $l(2+\sqrt{2})$; b) $\frac{l}{4\sqrt{5}}$.

154. Pe o tarla, s-a obținut, folosindu-se îngrășăminte chimice, un spor de recoltă de 360 kg de porumb la hectar. In prealabil s-a făcut experiența pe o tarla ce avea formă de trapez isoscel, cu laturile $AB=70$ m, $AC=BD=280$ m și $CD=406$ m.

Care a fost sporul de porumb obţinut pe această ultimă tarla ?

Indicaţie: Fie AE · şi BF înălţimile trapezului duse din A şi B pe baza mare CD; $CE+FD=406-70=336$m. Cum $CE=FD \Rightarrow$ că fiecare din acestea au o lungime de $\frac{336}{2}=168m$. $AE^2=280^2-168^2=(280-160)(280+168)=112 \cdot 448$. Observăm că $448=4 \cdot 112$, astfel că putem scrie: $AE^2=112 \cdot 112 \cdot 4$; $AE=224$.

R. 1919,232 kg porumb.

155. a) Să se afle perimetrul şi aria unui romb, $ABCD$, ale cărui diagonale sînt $AC=60$ cm şi $BD=80$ cm. Să se afle distanţa dintre laturile paralele ale rombului.
b) Fie A mulţimea ale cărei elemente sînt factorii primi ai c.m.m.m.c. ai numerelor ce reprezintă diagonalele şi distanţa cerută mai sus. Fie B şi C mulţimile ale căror elemente sînt factorii primi ai numerelor ce reprezintă diagonala mare şi diagonala mică. Să se determine $C_A B=A-B$. Să se determine $(A \cap B) \cup C$ şi $(A \cup C) \cap B$.

R. a) $P=200$cm; 48cm; b) {3}; {2;3;5}; {2;5}.

156. Un teren de sport este format dintr-un dreptunghi $ABCD$ şi două semicercuri cu diametrul cît lăţimea dreptunghiului. Lungimea dreptunghiului este de 172m, iar lungimea unui semicerc este de 329,70 m. Cîtă sămînţă de iarbă este necesară pentru a însămînţa tot terenul dacă la 1 m pătrat se folosesc 12g de sămînţă?

R. 848 862 g.

157. a) Să se calculeze aria unui cerc O, în care o coadă AB are lungimea de 8cm şi săgeata sa CD e lungă de 3 cm. b) Fie $\{m,n,p\}$ trei puncte distincte pe OC şi $\{a,b,c\}$ trei puncte pe DC. Să se pună în evidenţă propietatea comună a acestor puncte.

R. a) $\frac{625\pi}{36}$ cm^2. b) Toate punctele sînt egal depărtate de A şi B.

158. Distanţa dintre centrele O_1 şi O_2 a două cercuri de raze egale este egală cu raza R a cercurilor. Să se calculeze aria comună a celor două cercuri în funcţie de R. Aplicaţie: $R=6$ cm.

Indicaţie: Fie C şi C_1 cele două cercuri $C \cap C_1=\{A,B\}$. Fie I punctul unde coarda comună taie linia centrelor O_1, O_2. Cum ariile segmentelor de cerc O_1AB şi O_2AB sînt egale, problema revine la a calcula una din ele. Aria sectorului circular AO_1B este a treia parte din aria cercului: rezultă: $A_{segm}=\frac{\pi R^2}{3}-\frac{R^2\sqrt{3}}{4}=R^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, iar aria comună celor două cercuri este $2A_{segm}=R^2\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. In particular, dacă $R=6$cm; $2A=\left(24\pi-18\sqrt{3}\right)$ cm^2.

159. Să se împartă prin cercuri concentrice, un cerc cu raza r în patru părţi echivalente (de aceeaşi arie) (fig.III.25).

Indicaţie: Să notăm cu x,y,z razele OE, OD, OB ale celor trei cercuri concentrice cerute. Ariile acestor cercuri sînt: $\pi x^2, \pi y^2, \pi z^2$. Se vor studia relaţiile dintre ele.

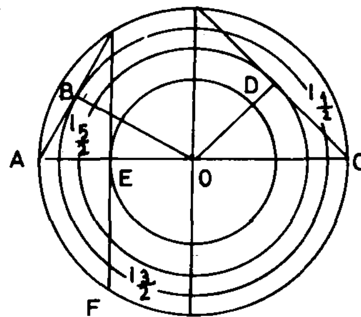


Fig.III.25

160. Se dă un triunghi dreptunghic cu catetele c şi b iar ipotenuza a. Să se afle ariile triunghiurilor ABD. şi BDC obţinute prin ducerea bisectoarei BD a unghiului ascuţit B.

Indicaţie: Aria ABD=aria ABC–aria $BDC=\frac{bc}{2}-\frac{ac(a-c)}{2b}=\frac{b^2c-ac(a-c)}{2b}=\frac{c(b^2-a^2+ac)}{2b}$.

161. Intr–un cerc cu raza de 6,5 m se duce un diametru AB, pe care se ia distanţa $AM=4$ m, iar din M se ridică o perpendiculară care întîlneşte cercul într–un punct N. Să se calculeze aria triunghiului NAB.

R. 39cm^2.

162. Să se construiască un hexagon regulat cu latura de 2 cm şi pe fiecare latură a lui să se construiască, în afară, cîte un pătrat. Se unesc vîrfurile pătratelor necomune cu hexagonul şi se obţine un poligon cu 12 laturi. Să se arate că acest poligon este regulat şi să i se calculeze aria.

Indicaţie: Aria cerută se compune din aria hexagonului cu latura de 2 cm, la care se adaugă aria a şase pătrate egale, avînd latura de cîte 2 cm şi aria a şase triunghiuri echilaterale avînd latura de 2 cm.

R. $12(2+\sqrt{3})$cm^2.

163. Latura BC a unui triunghi ABC cu aria de 240 cm^2, se împarte în 6 părţi egale astfel: BM, MN, NP, PD, DE *şi* EC. Latura AC se împarte în 4 părţi egale, astfel: AF, FG, GH, HC. Să se afle aria patrulaterului $GHEP$.

R. 50 cm^2.

164. Să se calculeze apăsarea exercitată de abur asupra pistonului unei maşini, ştiind că diametrul pistonului este de 9 cm şi că presiunea medie este de $29{,}4 \cdot 10^4$N/m^2.

R. 1 871 N.

165. O persoană, care face 150 de paşi pe minut, a parcurs diagonala unei pieţe publice, în formă de pătrat, în 40 secunde. Care este aria pieţei? Care ar fi latura unei pieţe de aceeaşi arie cu aceasta, avînd însă forma unui hexagon regulat? (Se va socoti că la 125 de paşi corespunde 1hm.)

R. 3200 m^2; $\frac{80}{\sqrt{3\sqrt{3}}}$ m.

166. Fie D şi d diagonalele unui romb de latură l, ce are un unghi de 150^o.Să se arate că în acest romb există relaţia: $l^2=D.d$.

167. Laturile consecutive ale unui paralelogram au lungimile de 5 cm şi 6 cm iar aria lui este de 24 cm^2. a) Să se afle cu cît la sută creşte aria acestui paralelogram, dacă laturile consecutive ale acestui paralelogram cresc fiecare cu cîte 5 cm. b) Să se arate că diagonala paralelogramului iniţial este egală cu una din laturile paralelogramului.

R. 267% prin adaos.

III.17. PROBLEME ŞI EXERCIŢII RECAPITULATIVE

1. Care este unghiul a cărui suplement este de n ori mai mare decît complementul său. Cazuri particulare: $n=4$, $n=5$

R. $\frac{90(n-2)}{n-1}$; 60^o; 67^{o}30'.

2. Dintre cele trei unghiuri ale unui triunghi ABC, al doilea îl întrece pe cel dintîi cu 40° şi al treilea pe cel de–al doilea cu aceeaşi cantitate.Se cer măsurile unghiurilor triunghiului.

R. $m(A)=20^\circ$; $m(B)=60^\circ$; $m(C)=100^\circ$.

3. Unul din unghiurile unui triunghi are măsura de n°, iar diferenţa celorlalte unghiuri este de m°. Să se determine măsurile unghiurilor triunghiului.Caz particular: $n^\circ=40^\circ$; $m^\circ=18^\circ$.

R. $m(\sphericalangle A)=40^\circ$; $m(\sphericalangle B)=79^\circ$; $m(\sphericalangle C)=61^\circ$.

4. Laturile unui triunghi au lungimile de 3 m, 4 m, 6 m. Perimetrul unui alt triunghi asemenea cu primul este de 26m. Să se determine lungimile laturilor acestui triunghi.

R. 6 m, 8 m, 12 m.

5. Lungimea unui dreptunghi este cu un metru mai mare decît lăţimea lui. Micşorînd amîndouă dimensiunile cu cîte un metru, aria dreptunghiului scade cu 12 metri pătraţi. Se cer dimensiunile dreptunghiului.

R. 6 m; 7 m.

6. Să se calculeze dimensiunile unui dreptunghi ştiind că, dacă mărim baza cu 2cm şi micşorăm înălţimea cu 1 cm, aria se măreşte cu 2 cm^2, iar dacă micşorăm baza cu 1 cm şi mărim înălţimea cu 1 cm, aria sa rămîne neschimbată.

R. 6 cm; 5 cm.

7. Cît de mare trebuie să fie înălţimea unui dreptunghi, pentru ca aria lui să crească cu 16 m^2, dacă mărim baza cu o cantitate egală cu înălţimea?

R. 4 m.

8. Se dau două dreptunghiuri. Baza unuia are lungimea de 5 cm, iar a celuilalt de 4 cm. Suma ariilor lor este de 42 cm^2. Dacă mărim baza primului dreptunghi de două ori, iar baza dreptunghiului al doilea cu 1 cm, fără să schimbăm înălţimile lor, suma ariilor dreptunghiurilor obţinute este cu 33 cm^2 mai mare decît suma ariilor dreptunghiurilor iniţiale. Să se afle mărimea înălţimii fiecăruia din aceste dreptunghiuri.

R. 6 cm; 3 cm.

9. Să se determine dimensiunile unui dreptunghi cunoscînd mărimea $2p$ a perimetrului său şi raportul $\frac{m}{n}$ dintre lungimile bazei şi înălţimii sale.

R. $\frac{pm}{m+n}$; $\frac{pn}{m+n}$.

10. Două laturi omoloage a două poligoane asemenea au lungimile de 15 m şi 5 m, iar diferenţa dintre perimetrele lor este de 60 m. Să se determine perimetrele celor două poligoane.

R. 30 m; 90 m.

11. Raportul dintre lungimile b şi c ale celor două catete AC şi AB ale unui triunghi dreptunghic este $\frac{5}{6}$, iar ipotenuza BC are lungimea de 122 cm. Să se afle lungimea segmentelor determinate de înălţimea AD pe ipotenuză.

R. 72 cm; 50 cm.

12. Raportul lungimilor catetelor unui triunghi dreptunghic este $\frac{3}{4}$, iar lungimea ipotenuzei este de 175 cm. Să se afle lungimile celor două catete şi diferenţa dintre

cele două segmente determinate pe ipotenuză de înălţimea ce pleacă din vîrful unghiului drept.

R. 140 cm; 105 cm; 49 cm.

13. Să se înscrie un pătrat *EFGH* într-un triunghi *ABC*, a cărui bază $BC=10$ cm iar înălţimea este de 6 cm astfel ca vîrfurile *E* şi *F* ale pătratului să fie pe latura *BC* a triunghiului iar vîrfurile *G* şi *H* pe laturile *AC* şi *AB*.

R. $l_4=3{,}75$ cm.

14. Un trapez are bazele de lungime 8 m şi 26 m; înălţimea are lungimea de 3 m. La o distanţă de 2 m de baza mare se duce o paralelă *EF* la baza mare, care determină două trapeze. Să se afle ariile celor două trapeze.

R. 40 m^2; 11 m^2.

15. Distanţa cea mai mare dintre punctele a două cercuri concentrice este de a cm, iar distanţa cea mai mică este de b cm. Să se determine razele celor două cercuri. Caz numeric $a=18$ cm; $b=10$ cm.

R. 14 cm; 4 cm.

16. Dacă între mulţimile *A, B, C* avem relaţia $A\subset B\subset C$, să se arate că:
a) $A\cup(B\cap C)=B\cup(A\cap C)$; $B\cap(A\cup C)=C\cap(A\cup B)$; b) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;
c) $C\cup(A\cap B)=(C\cup A)\cap(C\cup B)$.

17. Să se determine numărul laturilor pe care trebuie să le aibă un poligon pentru ca suma unghiurilor lui să fie de patru ori mai mare decît aceea a unui alt poligon, care are un număr de laturi de două ori mai mic decît primul.

R. 6 laturi.

18. O catetă a unui triunghi dreptunghic este de 15 m. Să se afle ipotenuza presupunînd: 1) că a doua catetă este cu 5 m mai scurtă decît ipotenuza; 2) că ea este $\frac{4}{5}$ din ipotenuză.

R. 25 m.

19. Se dă un triunghi dreptunghic *ABC* cu catetele avînd lungimea de 3 cm şi 4 cm. Se duce bisectoarea unghiului drept *A* care taie ipotenuza în *D*. Să se calculeze lungimile segmentelor *BD* şi *DC*.

R. $\frac{20}{7}$ şi $\frac{15}{7}$ cm.

20. Intr-un triunghi isoscel, $[AB]\equiv[AC]$, înălţimea dusă din *A* pe baza *BC* este de 4 m, iar înălţimea dusă din vîrful *B* pe *AC* este de 4,8 m. Să se determine lungimile laturilor triungiului.

R. 5 m; 6 m.

21. Se dă triunghiul isoscel *ABC*, $[AB]\equiv[AC]$, cu baza $BC=8$ cm şi înălţimea $AD=3$ cm. Din piciorul *D* al înălţimii duse din *A* se duc $DE\parallel AB$ şi $DF\parallel AC$, $E\in AC$, $F\in AB$. Diagonalele paralelogramului *AFDE* se taie în *O*. a) Să se arate că înălţimea *BM* dusă din *B* pe *AC* este de patru ori mai mare decît distanţa *OH* de la *O* la latura *AC*.
b) Să se calculeze lungimea lui *OH*.

Indicaţii: a) Se foloseşte proprietatea liniei mijlocii a triunghiului; b) Se foloseşte asemănarea triunghiurilor *AHO* şi *ACD*.

R. b) $OH=\frac{6}{5}$.

22. Un trapez $ABCD$ are bazele $AB=24$ m, $CD=15$ m, iar înălţimea $h=6$ m. Se cere: a) înălţimea triunghiului CED format din baza mică a trapezului cu lungimea laturilor neparalele ale acestuia; b) să se deducă în ce raport trebuie să fie bazele unui trapez pentru ca înălţimea triunghiului considerat să fie un sfert din înălţimea trapezului.

R. a) 10 m; b) $\frac{1}{5}$.

23. Perimetrul unui triunghi este $\frac{11}{13}$ din perimetrul unui triunghi asemenea cu el. Diferenţa dintre două laturi omoloage este de 1 m. Să se determine lungimile acestor laturi.

R. 6,5 m şi 5,5 m.

24. Raportul dintre lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic este 3:2, iar înălţimea împarte ipotenuza în două segmente, din care unul are lungimea cu 2 m mai mare decît celălalt. Să se determine lungimea ipotenuzei.

R. 5,2 m.

25. Perimetrul unui dreptunghi este 40 m. Ştiind că lungimea este cu 5 m mai mare decît lăţimea, să se calculeze lungimea dreptunghiului.

R. 12,5 m.

26. Perimetrul unui dreptunghi este egal cu p, iar diferenţa laturilor neegale este egală cu d. Să se determine laturile dreptunghiului. Aplicaţie numerică: $p=60$, $d=20$.

R. 25; 5.

27. Lungimile laturilor unui patrulater oarecare sînt proportionale cu numerele 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$ şi 2. Perimetrul unui patrulater asemenea cu el este de 75 m. Să se determine lungimile laturilor patrulaterului al doilea.

R. 18; 9; 12; 36.

28. Laturile unui patrulater au lungimile de 10 dm, 20 dm, 25 dm. Intr–un patrulater asemenea cu el, latura cea mai mare adăugată la cea mai mică ne dă 28 dm. Să se determine mărimile laturilotr celui de–al doilea patrulater.

R. 8 dm, 12 dm, 16 dm, 20 dm.

29. Una din bazele unui trapez este egală cu 10 m, înălţimea este de 4 m, iar aria de 32 m^2. La o distanţă de 1 m de baza dată, se duce o paralelă cu ea între cele două baze. Se cere lungimea acestei paralele.

R. 9 m.

30. Raza unui cerc este de 25 cm; două coarde paralele sînt de 14 cm şi 40 cm. Să se determine distanţa dintre ele. Se vor considera două cazuri: a) coarde de aceeaşi parte a centrului şi b) opuse faţă de centru.

R. 9 cm; 39 cm.

31. Aria laterală a unui paralelipiped dreptunghic este de 72 m^2. Inălţimea lui este de 60 dm, iar una din dimensiunile dreptunghiului de bază este de $\frac{1}{2}$ din cealaltă. Să se afle dimensiunile bazelor acestui paralelipiped.

R. 2 m; 4 m.

32. Să se construiască triunghiul ABC cînd se cunosc: a) înălţimea $AD (D \in BC)$; b) distanţa DE a punctului D la latura AC; c) ortocentrul H al triunghiului.

33. Să se arate că: $12012_3+12302_4+11034_5+1555_6=1774_{10}$.

34. Să se calculeze aria unui triunghi dreptunghic, ştiind că o catetă are lungimea egală cu 27 m, iar cealalta este cu 9 m mai mică decît ipotenuza.

R. $A=486$ m^2.

35. Un trapez are baza mare de 32 m, baza mică de 24 m şi înălţimea de 15 m. Să se calculeze aria triunghiului format din baza mică şi prelungirea laturilor neparalele.

R. $A=540$ m^2.

36. Intr–un trapez cu baza mare de 35 m, baza mică de 20 m şi înălţimea de 12 m se duce o dreaptă lungă de 31 m, paralelă cu bazele, limitată de laturile neparalele. Să se calculeze distanţa de la această dreaptă la baza mare.

R. 3,20 m.

37. Se dă triunghiul dreptunghic ABC (unghiul drept în A) în care măsura unghiului C este de 60°. In punctul C se duce dreapta (d) perpendiculară pe BC. Prelungirea laturii AB întîlneşte această dreaptă în C' iar perpendiculara în B pe AB întîlneşte dreapta d în C''. Segmentul CC' are lungimea de $12\sqrt{3}$ cm. Să se afle: aria patrulaterului $C'BC''B'$ (B' fiind simetricul lui B faţa de dreapta d).

R. $1\,728\sqrt{3}$ cm^2.

38. In triunghiul ABC, latura $AC=12{,}5$ cm, iar înălţimea $AD=10$ cm. Pe latura AB se ia un punct M astfel încît să avem $BM{:}MA=\frac{1}{4}$. Prin M se duce paralela la AC şi perpendiculara pe BC care determină pe BC, respectiv, punctele N si P. Fie P' simetricul lui P faţa de N. Paralela la MP' dusă prin P taie dreapta MN în Q. a) Să se arate că patrulaterul $MPQP'$ este paralelogram. b) Să se calculeze lungimile laturilor şi diagonalele paralelogramului $MPQP'$. c) Prelungirea dreptei NM întîlneşte tangenta în A la cercul circumscris triunghiului ABC, în punctul T. Să se arate că triunghiurile ATM şi ABC sînt asemenea.

R. b) $MP=QP'=2$; $PQ=P'M=\sqrt{13}$; $PP'=3$; $MQ=5$.

39. Fie triunghiul dreptunghic ABD, $m(\sphericalangle A)=90^\circ$, în care sînt date AD de lungime 15 cm şi tangenta unghiului B de 3/4. Inălţimea corespunzătoare ipotenuzei întîlneşte paralela dusă prin B la cateta AD în C şi ipotenuza în I. Paralela dusă prin I la AD întîlneşte pe AB şi CD respectiv în M şi N. Să se afle lungimile laturilor şi diagonalelor trapezului $ABCD$. b) Să se arate că $[MI]\equiv[IN]$.

R. $BC=80/3$ cm; $AB=20$ cm; $BD=25$ cm;

$CD=5\sqrt{139}/3$ cm; $AC=33\frac{1}{3}$ cm.

40. Intr–un trapez $ABCD$ raportul dintre lungimile bazei mici şi bazei mari este de 1/3, iar înălţimea este de 6 cm. Laturile neparalele prelungite se întîlnesc în punctul F. Să se afle distanţa de la acest punct la fiecare bază.

R. 3 cm; 9 cm.

41. Fie paralelogramul $ABCD$ în care $AB=2 \cdot BC$ şi $m(\sphericalangle A)=60^{\circ}$. Notăm cu M mijlocul laturii CD. Dreapta AM intersectează diagonala DB în E. a) Să se demonstreze că triunghiul BCM este echilateral. b) Să se arate că $ABDM$ este un trapez înscris în cercul de diametru AB. c) Să se arate că triunghiurile ADB şi AMB sînt dreptunghice congruente. d) Dacă $DB=5\sqrt{3}$ cm, să se afle perimetrul triunghiului DEM.

R. *d)* $\frac{5}{3}(3+2\sqrt{3})$ cm.

42. Fie cercul de centru O şi rază R în care se construieşte diametrul CD şi perpendiculara în P (mijlocul lui OD) pe CD intersectează cercul în A şi B. a) Să se arate că coarda AD este egală ca lungime cu raza R. b) Să se arate că $AP=\frac{BC}{2}$. c) Să se arate că $AD+PD=PC$. d) Să se calculeze raportul $\frac{BC}{AD}$. e) Să se arate că $(\sin \sphericalangle PCB)^2+$ $+(\sin \sphericalangle PDA)^2=1$. f) Dacă M este mijlocul lui BC şi E este proiecţia lui pe AD, atunci punctele M, P şi E sînt coliniare.

R. d) $\frac{BC}{AD}=2$.

43. Se dă ecuaţia: $(5x-6)^{371} \cdot (6x-7)^{370} \cdot (7x-8)^{369}=1$ şi mulţimea $A=\{2; 3; 1; 4\}$. Care din valorile lui x, $x \in A$ sînt soluţii ale ecuaţiei date ?

44. Se consideră un triunghi ABC în care $AB+AC=12$ cm şi $m(\sphericalangle BAC)=48^{\circ}$. Fie D simetricul punctului B faţă de dreapta AC şi E simetricul punctului C faţă de dreapta AB. a) Să se afle lungimea liniei frînte EAD. b) Să se afle măsura unghiului EAD.
c) Cîte grade trebuie să aibă unghiul ACB pentru ca semidreptele AE şi AD să fie în prelungire ?

R. 12 cm; 144°; 60°.

45. Prin vîrful A al unui triunghi isoscel $[AB]\equiv[AC]$ se duce o dreaptă (D) care taie pe BC în M şi cercul circumscris triunghiului în N. Să se arate că: a) triunghiurile ABM şi MCN sînt asemenea; b) AB este medie geometrică a segmentelor AM şi AN;
c) $\frac{AM}{NA}=\left(\frac{CM}{CN}\right)^2$ şi $\frac{AM \cdot AN}{CN^2}=\left(\frac{MB}{MN}\right)^2$.

46. Se consideră triunghiul oarecare ABC. Fie M un punct oarecare în interiorul segmentului BC. Perpendicularele în B şi C respectiv pe BC taie perpendiculara dusă în A pe AM respectiv în B' şi C'. Să se arate că triunghiurile ABC şi $B'MC'$ sînt asemenea.

47. Se dă triunghiul dreptunghic ABC cu catetele $AB=c$ cm şi $AC=b$ cm. Notăm cu O mijlocul laturii BC. Paralelele la AO duse respectiv prin B şi C întîlnesc perpendiculara din A pe AO respectiv în B' şi C'.

a) Să se arate că AC este bisectoarea unghiului OCC' iar AB bisectoarea unghiului OBB'.

b) Să se arate că AB' este medie proporţională între segmentele CC' şi BB'. Care

triunghiuri formate sînt asemenea între ele ?

c) Să se calculeze perimetrul patrulaterului $B'BCC'$ în cazul în care $AB=12$ cm şi $AC=18$ cm.

R. c) 59,2 cm.

48. Se dă $f(x)=8:\left(\sqrt{\frac{245}{5}}\cdot\frac{4}{7}-x\right)$. Să se determine mulţimea M, unde $M \triangleq \{x \mid x \in \mathbf{Z}$ şi $f(x) \in \mathbf{Z}\}$.

R. $M=\{+12; +8; +6; +5; +3; -12; 0\}$.

49. In triunghiul ABC, măsurile unghiurilor sînt proporţionale cu numerele 2, 3, 13. a) Să se calculeze măsurile unghiurilor şi să se construiască triunghiul ştiind că latura $AB=12$ cm. b) In acest triunghi se duce bisectoarea unghiului ABC şi înălţimea din A, care se întîlnesc în punctul D. Să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului ADB. c) Fie F simetricul punctului A faţă de dreapta BC. Să se calculeze lungimile laturilor triunghiului ABF. d) Să se arate că triunghiul ABC este echivalent cu triunghiul BCF.

R. a) 20°; 30°; 130°; b) 15°; 60°; 105°;
c) echilateral; $l=12$ cm.

50. Din punctul P exterior cercului (O), se duc tangentele PA şi PB astfel că triunghiul PAB este echilateral. a) Să se calculeze măsurile unghiurilor patrulaterului $PAOB$ şi să se exprime perimetrul lui în funcţie de raza R a cercului (O). b) Să se demonstreze că cercul circumscris triunghiului PAB este egal cu cercul (O) şi apoi să se facă construcţia grafică a întregii figuri (folosind numai compasul şi rigla negradată).

R. 60°; 120°; $2R(\sqrt{3}+1)$.

51. Se consideră două cercuri tangente–exterioare în A. Notăm cu O_1 şi O_2 centrele celor două cercuri şi cu R şi r razele lor $(R>r)$. Fie apoi B şi C punctele de contact ale unei tangente comune exterioare şi O mijlocul segmentului BC. Paralela dusă prin O_2 la BC taie raza O_1B în D. a) Să se arate că patrulaterul BCO_2D este dreptunghi şi să se deducă apoi că avem $BC=2\sqrt{Rr}$. b) Să se arate că triunghiurile ABC şi OO_1O_2 sînt dreptunghice şi asemenea între ele. c) Folosind asemănarea precedentă să se calculeze lungimile laturilor triunghiului ABC în funcţie de razele R şi r ale celor două cercuri. d) Aplicaţie numerică $R=9, r=4$.

R. d) $AB=\frac{36\sqrt{13}}{13}$, $AC=\frac{24\sqrt{13}}{13}$; $BC=12$.

52. Se dă $f(x)=\frac{9}{x+1}$, $x\in\mathbf{Z}$. Să se dermine mulţimea $A=\{\,x\in Z \mid f(x)\in Z\,\}$.

R. $A=\{-10; -4; -2; 0; 2; 8\}$.

53. Fie M un punct pe diagonala AC a trapezului $ABCD$ (AB baza mare) şi MP, MN paralele duse la AB, respectiv AD. ($N\in DC$ şi $P\in BC$.) a) Să se arate că unghiurile CNP şi ABD sînt congruente. b) Paralela din N la BC taie pe BD în R. Să se arate că punctele B, N şi mijlocul Q al segmentului RP sînt coliniare. c) Care trebuie să fie valoarea raportului $\frac{MC}{MA}$ astfel ca să aibă loc relaţia $NP=\frac{2}{3}DB$?

R. c) $\frac{MC}{MA}=2$.

54. Se dă paralelogramul $ABCD$ în care $m(\sphericalangle ABC)=150^{\circ}$ şi diagonala BD este perpendiculară pe AB. Fie E proiecţia lui C pe AD şi F intersecţia laturii BC cu cercul circumscris triunghiului DEC, avînd centrul O. b) Să se arate că punctele E, O, F sînt coliniare. c) Să se arate că BD este tangentă la cercul circumscris triunghiului DEC. d) Să se demonstreze că $BD^2=BF\cdot AD$. e) Dacă $AB=2a$, $(a>0)$, să se calculeze perimetrul patrulaterului $BDEF$.

R. e) $2a(\sqrt{3}+1)$.

55. Fie mulţimile M, N, P, Q între care există relaţiile: $M\subset N$; $N\subset P$; $P\subset Q$; $Q\subset M$. Să se arate că $M=N=Q$.

56. Mulţimea M are ca elemente divizorii numărului de 2 cifre (cel mai mic) $x\in\mathbf{N}$ egal cu $\frac{4}{7}$ din răsturnatul său, iar mulţimea N are ca elemente divizorii numărului de 2 cifre $y\in\mathbf{N}$ egal cu $\frac{2}{9}$ din răsturnatul său. Să se determine $(M\cap N)$.

R. 4.

57. Intr–un romb latura este medie proporţională (geometrică) a diagonalelor. Să se afle măsura unghiului ascuţit.

R. 30°.

58. a) Să se demonstreze că într–un triunghi dreptungnic isoscel raportul dintre suma catetelor şi ipotenuză este $\sqrt{2}$. b) Reciproc, dacă într–un triunghi dreptunghic raportul dintre suma catetelor şi ipotenuză este $\sqrt{2}$, triunghiul este isoscel. Demonstraţi. c) Fie b şi c catetele, iar a ipotenuza unui triunghi dreptunghic $b=c$. Raportul $\frac{b+c}{a}$ poate fi mai mare decît $\sqrt{2}$? De ce ? Să se înlocuiască în propoziţia următoare punctele prin: "egal", "cel puţin egal", "cel mult egal". Intr–un triunghi dreptunghic raportul dintre suma catetelor şi ipotenuză este ... cu $\sqrt{2}$.

59. Intr–un cerc cu diametrul BC se duce o rază $OA\perp BC$ (O este centrul cercului) şi se ia un punct oarecare M situat pe acelaşi cerc. Să se spună care linie frîntă are lungimea mai mare: BAC sau BMC ?

60. Pe un cerc cu diametrul BC se iau două puncte M şi N situate de o parte şi de alta a lui BC. Cum trebuie alese punctele M şi N ca patrulaterul $BMCN$ să aibă un perimetru cît mai mare ? Ce fel de patrulater este în acest caz $BMCN$?

61. Se dau segmentele AB şi CD. Să se determine un punct M, astfel încît:

$$m(\sphericalangle AMB)=m(\sphericalangle CMD)=90^{\circ}.$$ Discuţie.

Indicaţie: Se consideră semicercurile care au ca diametru segmentele date.

62. Fie mulţimile: $M=\{x\in\mathrm{N}\mid \frac{6}{x+2}\in\mathbf{Z}\}$. $P=\{x\in\mathrm{N}\mid \frac{8}{x-2}\in\mathbf{Z}\}$. Să se determine $(M\cup P)\cap P$.

R. $M\cup P=\{0, 1, 4, 6, 10, 3\}$, $(M\cup P)\cap P=\{0, 1, 4, 3, 6, 10\}$.

63. Să se arate că dacă un triunghi are măsurile unghiurilor proporționale cu numerele 5, 4, 9 atunci triunghiul este dreptunghic.

Indicație: se ține seamă că dacă suma a două unghiuri dintr–un triunghi este egală cu măsura unghiului al treilea, triunghiul este dreptunghic.

64. In paralelogramul $ABCD$, M şi N sînt mijloacele laturilor opuse AD şi BC. Să se arate că BM şi ND împart diagonala AC în trei părți egale.

Indicație: se aplică proprietatea liniei mijlocii în triunghi.

65. Se dă triunghiul ABC în care $m(\sphericalangle CAB)=60^{\circ}$. Inălțimile BB' şi CC' se intersectează în H, iar bisectoarea unghiului CAB intersectează cele două înălțimi BB' şi CC' în O şi E. Să se demonstreze că ΔOEA este echilateral.

66. In dreptunghiul $ABCD$, bisectoarea unghiului B şi diagonala ce pleacă din acest vîrf, fac între ele un unghi de 15°. Bisectoarea întîlneşte diagonala AC în P, latura DC în E iar pe AD în M. Să se arate că ΔDEM este isoscel.

67. Se dă dreptunghiul $ABCD$. Fie E piciorul perpendicularei dusă din A pe diagonala BD. Se prelungeşte AE cu segmentul $[EF]\equiv[AE]$. Să se arate ca ΔAFB este isoscel şi ΔDBF este triunghi dreptunghic.

68. Se dă triunghiul isoscel ABC, $[AB]\equiv[AC]$. Se prelungeşte BA cu segmentul $[AM]\equiv[AB]$. Pe latura AC se ia un punct D astfel ca $AD=\frac{AC}{3}$. Fie O mijlocul lui BC. Sa se arate că: a) $MC\perp BC$; $\Delta AOD\sim\Delta DCM$; c) M, D, O sînt coliniare.

IV. CLASA a VIII-a

ALGEBRA

IV.1. SUME ALGEBRICE

1. $(-7ab)+(6ab)+(-2ab)+(-3ab)+(-ab)$. **R.** $-7ab$.

2. $(-7a^2b)+(8a^2b)+(-2a^2b)+(a^2b)$. **R.** 0.

3. $(-10a^2b)+(-5a^3)+(-12a^2b)+(5a^3)+(21a^2b)$. **R.** $-a^2b$.

4. $2ab^3+(-7ab^3)+(+3ab^3)+(-ab^3)$. **R.** $-3ab^3$.

5. $2ab^4+(-3ab^4)+(-5a^2b^3)+(-3ab^4)+(+3a^2b^3)$. **R.** $-4ab^4-2a^2b^3$.

6. $\left(-\frac{3}{4}ab\right)+\left(+\frac{2}{3}a^2b\right)+(+ab)+\left(-\frac{5}{6}a^2b\right)+\left(-\frac{1}{2}ab\right)$. **R.** $-\frac{1}{4}ab-\frac{1}{6}a^2b$.

7. $7ax^2-3by+5a-2ax^2-7a$. **R.** $5ax^2-3by-2a$.

8. $a^3+2ab^2-a^2b+ab^2-2a^2b-b^3$. **R.** $a^3+3ab^2-3a^3b-b^3$.

9. $x^3-ax^2+a^2x+ax^2-a^2x+a^3$. **R.** x^3+a^3.

10. $\frac{3}{5}a+2ay-\frac{7}{2}ay+4a$. **R.** $\frac{23}{5}a-\frac{3}{2}ay$.

11. $\frac{3}{2}a^2b+4b^2x-5a^2b-\frac{5}{2}b^2x$. **R.** $\frac{3}{2}b^2x-\frac{7}{2}a^2b$.

12. $2,3m^2n-5an+4m^2n-1,7an$. **R.** $6,3m^2n-6,7an$.

13. $0,7ax-0,04ax-0,2ax-0,16ax$. **R.** $0,3ax$.

14. $\frac{0,5}{2}x^2-\frac{3}{2}x+x^2+\frac{0,3}{4}x+5$. **R.** $\frac{2,5}{2}x^2-\frac{5,7}{4}x+5$.

15. $\frac{2}{0,5}bxy-\frac{0,3}{2}x^2y-0,7x^2y-\frac{7}{2}bxy$. **R.** $0,5bxy-0,85x^2y$.

16. $\frac{1}{0,2}x+0,3x-\frac{0,5}{2}x-0,13x-0,02x$. **R.** $4,9x$.

17. $0,3y-\frac{0,7}{2}y+\frac{3}{0,2}x-\frac{5}{4}x+y$. **R.** $\frac{1,9}{2}y+\frac{11}{0,8}x$.

18. $\frac{5}{3}ax+\frac{1}{2}ax-\frac{2}{3}ax-\frac{3}{2}ax$. **R.** 0.

19. $\frac{2}{5}by-\frac{5}{2}by+by+1,1by$. **R.** 0.

20. $7a^2b-11\frac{2}{3}a^2b+3\frac{1}{2}a^2b-2\frac{5}{6}a^2b$. **R.** $-4a^2b$.

21. $0,27ab^2+0,23ab^2-\frac{2}{5}ab^2+\frac{1}{2}ab^2$. **R.** $0,6ab^2$.

22. $-1,25a^3+\frac{3}{4}a^3+2,5a^3-\frac{2}{3}a^3$. **R.** $1\frac{1}{3}a^3$.

23. $3(a+b)^2+7(a+b)^2+(a+b)^2$. **R.** $11(a+b)^2$.

24. $4(a-b)^2+2(a-b)^2+(a-b)^2$. **R.** $7(a-b)^2$.

25. $5(a-b)^3+7(a-b)^3+(a-b)^3$. **R.** $13(a-b)^3$.

26. $2(a+b)^3+7(a+b)^3+(a+b)^3$. **R.** $10(a+b)^3$.

27. $15a^3b^2-(+8a^3b^2)$. **R.** $7a^3b^2$.

28. $0,75a-(-1,25a)$. **R.** $2a$.

29. $-4a^2-(-2,5a^2)$. **R.** $-1,5a^2$.

30. $-0{,}2x^a-(+0{,}05x^a)$. **R.** $-0{,}25x^a$.

31. $6{,}3a^3b^2c-\left(+\frac{11}{2}a^3b^2c\right)$. **R.** $0{,}8\,a^3b^2c$.

32. $-21x^2-(-7x^2+2)-8+10+14x^2$. **R.** 0.

33. $(a+2b-6a)-(3b-6a+6b)$. **R.** $a-7b$.

34. $a-[b-(c-d)]$. **R.** $a-b+c-d$.

35. $(x+y-z)-(x-y+z)+(-x+y+z)+(x+y-z)$. **R.** $2(2y-z)$.

36. $4x^3-2x^2+x+1-(3x^3-x^2-x-7)-(x^3-4x^2+2x+8)$. **R.** $3x^2$.

37. $5a+\{3b+[6c-2a-(a-c)]\}-[9a-(7b+c)]$. **R.** $-7a+10b+8c$.

38. $x+(y-x)-(y-z)$. **R.** z.

39. $(a+b-c)-(-b+3c)$. **R.** $a+2b-4c$.

40. $44x+48y-(6z+3y-7x)+4z-[48y-8x+2z-(4x+y)]$. **R.** $63x-2y-4z$.

41. $(5a^2-3ax+x^2)-4a^2+5ax+(3a^2-7ax+5x^2)-7x^2$. **R.** $4a^2-5ax-x^2$.

42. $(6x^2-3x+8-(4x^2-3x+1)-(2x^2+7)$. **R.** 0.

43. $(a-b)-(b+c-d)+(b+c-d)+(2b-a)$. **R.** b.

44. $\left(\frac{4}{5}ab+\frac{1}{7}bc-\frac{2}{3}ac\right)-\left(-\frac{4}{5}ab+\frac{3}{14}bc-\frac{1}{5}ac\right)$. **R.** $ab-\frac{1}{14}bc-\frac{7}{15}ac$.

45. $\left(\frac{1}{2}a^2x+\frac{1}{4}ax^2+\frac{2}{3}x^2\right)-\left(-\frac{3}{4}a^2x+\frac{1}{3}ax^2-\frac{5}{8}x^2\right)$. **R.** $\frac{5}{4}a^2x-\frac{1}{12}ax^2+\frac{31}{24}x^2$.

46. Un elev depune la C.E.C. o sumă C în cele trei luni consecutive de la începutul anului. In luna I scoate a lei, în a II–a b lei şi în a III–a c lei. Ce sumă i–a mai rămas după trei luni ?

R. $C-a-b-c$.

47. Să se exprime că într–un triunghi o latură este mai mare ca diferenţa celorlalte două.

R. $a>b-c$ sau $b>c-a$ sau $c>a-b$.

48. Suma măsurilor unui triunghi fiind de 180°, să se exprime măsura unghiului C, cunoscînd măsurile celorlalte două A şi B.

R. $m(\sphericalangle C)=180^{\circ}-m(\sphericalangle A)-m(\sphericalangle B)$.

49. Insemnînd cu $2p$ perimetrul unui triunghi ale cărui laturi sînt $a,b,c,$ să se exprime valoarea laturii b în funcţie de perimetru şi celelalte două laturi.

R. $2p-(a+c)=2p-a-c$.

50. Un elev are o sumă de bani C din care cheltuieşte într–o zi a lei, în altă zi 28 lei şi în alta o sumă cît diferenţa dintre cele două zile. Să se exprime suma rămasă.

R. $C-a-28-(a-28)=C-2a$.

IV.2. INMULŢIREA UNUI POLINOM CU UN MONOM

51. $(m-n+p)\left(-\frac{5}{6}a\right)$.

52. $(-5b^2+2bc^2-4cd)\cdot\frac{1}{2}b^2c^3$.

53. $(-2a^2b^2+5ab^3-4b^4)(-4ab)$.

54. $13a^3x^3(-4a^2x+5a^3x^3-3ax^2)$.

55. $\frac{1}{2}mn^3\left(\frac{5}{3}m^2-\frac{2}{3}m^2n+\frac{3}{4}mn^2\right)$.

56. $(6a+2b-8c)7a$.

57. $(-5a^2+3ab-8b^2)(-9ab)$.

58. $(4a^3-5ax-1)\cdot 7ax^2$.

59. $(ax-5b-2ab)3a^2b$.

60. $(2a^3b^2-4ab^2c+3x-2a)\cdot abx$.

61. $(4m-2x-3ab+9mn)2a^2m^3b$.

62. $2ab^2xy^3(2ax^2y-3bxy^2+axyz-5ab^2)$.

63. $(a-b+cn-an^2bc)3a^2b^3cn^2$.

IV.3. INMULŢIREA A DOUĂ POLINOAME

64. $(x^2-3x-7)(x-2)$. **R.** x^3-5x^2-x+14.

65. $(a^2-3x-7)(a^2-1)$. **R.** $a^4-3a^2x-8a^2+3x+7$.

66. $(a^4-2a^3b+4a^2b^2-8ab^3+16b^4)(a+2b)$. **R.** a^5+32b^5.

67. $(a^m-b^p-2c^n)(2a^m-3b)$. **R.** $2a^{2m}+2a^mb^p-4a^mc^n-3a^mb-3b^{p+1}+6bc^n$.

68. $\left(\frac{5}{2}x+1\right)\left(x+\frac{4}{3}\right)$. **R.** $\frac{5x^2}{2}+\frac{13x}{3}+\frac{4}{3}$.

69. $(x^2+y^2-xy)(y^2+x^2+xy)$. **R.** $x^4+x^2y^2+y^4$.

70. $(a+b-c)(a-b+c)$. **R.** $a^2-b^2-c^2+2bc$.

71. $(a+4b-c)(a-4b+c)$. **R.** $a^2-16b^2+8bc-c^2$.

72. $(a^4+a^3b+a^2b^2)(a-b)$. **R.** $a^2(a^3-b^3)$.

73. $(a^3-3a^2x+3ax^2-x^3)(a-x)$. **R.** $(a-x)^4$.

74. $(5a^2+ab-3b^2)(3a^2-2ab+b^2)$. **R.** $15a^4-7a^3b-6a^2b^2+7ab^3-3b^4$.

75. $(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5)(a+b)$. **R.** a^6-b^6.

76. $(x^5-ax^4+a^2x^3-a^3x^2+a^4x-a^5)(x+a)$. **R.** x^6-a^6.

77. $(a^3+2a^2b+2ab^2+b^3)(a^3-2a^2b+2ab^2-b^3)$. **R.** a^6-b^6.

78. $(y^4-2y^3+y^2-4y-11)(y^2-2y+3)$. **R.** $y^6-4y^5+8y^4-12y^3+10y-33$.

79. $(3x^3-8x^2+4x-4)(2x^2-4x-1)$. **R.** $6x^5-28x^4+37x^3-16x^2+12x+4$.

80. $(4x^2-12xy+9y^2)(2x+3y)(4x^2+12xy+9y^2)(2x-3y)$. **R.** $64x^6-432x^4y^2+972x^2y^4-729y^6$.

81. $[2x-y-(x+2y)][3x-2y-(2x-3y)]$. **R.** $x^2-2xy-3y^3$.

82. $3(x-y)^2(x+y)-3(x+y)^2(x-y)$. **R.** $6y(y^2-x^2)$.

83. $(2a-b)[(4a+b)a+b(a+b)]x^2$. **R.** $x^2(8a^3-b^3)$.

84. $(a-b)^3+(a+b)^3+3(a+b)(a-b)^2+3(a-b)(a+b)^2$. **R.** $8a^3$.

IV.4. IMPĂRŢIREA UNUI POLINOM CU MONOM

Să se efectueze următoarele împărţiri:

85. $(8ab^4-6a^2b^3+4a^3b^2):2ab$. **R.** $4b^3-3ab^2+2a^2b$.

86. $(6a^2x^3y^2-12a^4x^2y^3-9a^3x^2y^3):(-3a^2x^3y^2)$. **R.** $-2x+4a^2y+3axy$.

87. $(3a^4x^2-5a^3x^3+6a^2x^4):2a^4x^4$. R. $\frac{3}{2x^2}-\frac{5}{2ax}+\frac{3}{a^2}$.

88. $-(6b^5+4b^3-5ab^2):4b^3$. R. $-\left(\frac{3}{2}b^2+1-\frac{5}{4}\cdot\frac{a}{b}\right)$.

89. $(-5x^3y^2-6x^2y^2-x^4y^4):(-x^2y^3)$. R. $\frac{5x}{y}+\frac{6}{y}+xy$.

90. $(4a^3b^3-6a^3b^2+2a^2b):2a^2b$. R. $2ab^2-3ab+1$.

91. $(4a^7x^5-24a^6x^6+36a^5x^7):(4ax)$. R. $a^4x^4(a-3x)^2$.

92. $(25a^2-10a+1):(5a-1)$. R. $5a-1$.

93. $(8a^4b^2-6a^3b^3+4a^2b^4-2a^2b^2):(-2a^2b^2)$. R. $-4a^2+3ab-2b^2+1$.

94. $-(15a^4x^2-20a^3x^3+5a^2x^4):(-5a^2x^2)$. R. $3a^2-4ax+x^2$.

95. $(4m^3+6m^2-m):\left(-\frac{1}{2}m\right)$. R. $-8m^2-12m+2$.

96. $\left(-4m^5n^2-\frac{4}{9}m^4n^5+\frac{2}{3}m^3n^6\right):\frac{2}{3}m^3n^2$. R. $-6m^2-\frac{2}{3}mn^3+n^4$.

97. $\left(\frac{3}{4}a^6x^3+\frac{6}{5}a^3x^4-\frac{9}{10}ax^5\right):\frac{3}{5}ax^3$. R. $\frac{5}{4}a^5+2a^2x-\frac{3}{2}x^2$.

98. $(p^4+4p^3-6p^2-8p):(-0{,}2p)$. R. $-5p^3-20p^2+30p+40$.

IV.5. IMPĂRȚIREA A DOUĂ POLINOAME

99. $(6a^4+a^2x-15x^2):(2a^2-3x)$. R. $3a^2+5x$.

100. $(6x^2-2xy^2-28y^4):(2x+4y^2)$. R. $3x-7y^2$.

101. $(4x^3+4x^2-29x+21):(2x-3)$. R. $2x^2-5x-7$.

101. $(4x^3+4x^2-29x+21):(2x-3)$. R. $2x^2+5x-7$.

102. $(3a^5+5a^4b-33a^3b^2+14a^2b^3):(a^2+7ab)$. R. $3a^3-16a^2b+79ab^2-539b^3$; rest $3773ab^4$.

103. $(2a^4-13a^3b+31a^2b^2-38ab^3+24b^4):(2a^2-3ab+4b^2)$. R. $a^2-4ab+6b^2$.

104. $(14a^5-27a^4b+21a^3b^2-3a^2b^3-2ab^4):(2a^2-3ab+2b^2)$. R. $7a^3-3a^2b-ab^2$.

105. $(6a^6b^3-13a^5b^4+28a^4b^5-23a^3b^6+20a^2b^7):(2a^2b^2-3ab^3+4b^4)$. **R.** $3a^4b-2a^3b^2+5a^2b^3$.

106. $(10a^5b-21a^4b^2-56ab^5-3a^2b^4-10a^3b^3):(8b^3-3ab+5a^2b)$. **R.** $2a^3-3a^2b-7ab^2$.

107. $\left(x^4-\frac{13}{6}x^3+x^2+\frac{4}{3}x-2\right):\left(\frac{4}{3}x-2\right)$. **R.** $\frac{3}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2+1$.

108. $(27x^5-9x^4+9x^3-4x^2-14x+6):(9x^3-6x^2+8x-6)$. **R.** $3x^2+x-1$.

109. $(a^4+2a^2b^2+9b^4):(a^2-2ab+3b^2)$. **R.** $a^2+2ab+3b^2$.

110. $(12-22x+2x^2-9x^4+27x^5):(9x^3+8x-6x^2-6)$. **R.** $3x^2+x-2$.

111. $(3x^2-14x+15):(x-3)$. **R.** $3x-5$.

112. $(4x^5-5ax^4-20a^2x^3-5a^3x^2+6a^4x):(x^3-2ax^2-3a^2x)$. **R.** $4x^2+3ax-2a^2$.

113. $(x^5+a^5):(x+a)$. **R.** $x^4-ax^3+a^2x^2-a^3x+a^4$.

114. $(x^5-a^5):(x-a)$. **R.** $x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4$.

115. $(x^6-7^6):(x+7)$. **R.** $x^5-7x^4+7^2x^3-7^3x^2+7^4x-7^5$.

116. $(x^5+1):(x-1)$. **R.** $x^4+x^3+x^2+x+1$; rest 2.

117. $(6x^5-28x^4+37x^3-16x^2+12x+4):(3x^3-8x^2+4x-4)$. **R.** $2x^2-4x-1$.

118. $(15a^4-7a^3b-6a^2b^2+7ab^3-3b^4):(3a^2+b^2-2ab)$. **R.** $5a^2+ab-3b^2$.

IV.6. EXERCIȚII PENTRU APLICAREA FORMULELOR DE CALCUL PRESCURTAT

119. $\{\{[3x^2y^2-3x^2:(-3)-x^2+2y^2] \cdot (3y^2x^2-2y^2)\}^2+72x^4y^8-17y^8\}:(9x^4y^4-y^4)$ **R.** $x^4y^4+y^4$.

120. $\{[(12x^2y-8)(3x^2y+2):4+4-x^2]^2+18x^6y^2-2x^4\}:(9x^4y^2-x^2)-9x^4y^2-1$. **R.** x^2-1.

121. $\left[\left(\frac{4x^2}{9}-1\right):\left(\frac{2x}{3}+1\right)-\frac{2x}{3}-x^2+2x\right]:[-(x-1)]$. **R.** $x-1$.

122. $\{[(36x^4-100x^2y^2):(12x^3+20x^2y)]^2+30xy-26y^2\}:(3x-y)$. **R.** $3x+y$.

123. $\left\{\left[(0,625x^2-4)\left(\frac{5x^2}{8}+4\right)-\frac{24x^4}{64}\right]^2+\frac{x^4}{2}-256\right\}:\frac{x^4}{8^2}.$ **R.** $\frac{x^4}{64}.$

124. $[(6x^3-9x^2y)(2x^2+3xy):3x^3+9y^2-4xy+y^2-1]:(2x-y+1)+y.$ **R.** $2x-1.$

125. $\left\{\left[\left(\frac{2a}{5}-1\right)\left(\frac{2a}{5}+1\right):0,04:(2a-5)\right]^2-25\right\}:(a+5):a^2.$ **R.** $\frac{4}{a}.$

126. $\{[(a^4+a^3b-a^2b^2-ab^3):(a^2-b^2)(a^2-ab)]^2+2a^6b^2-2a^4b^4\}:(a^4-a^2b^2).$
R. $a^2(a^2+b^2).$

127. $\{[(x^5-a^5):(x-a)-ax^3-a^2x^2-a^3x-2a^4]:(x-a)-ax^2-a^2x\}:(x+a).$ **R.** $x^2-ax+a^2.$

128. $\{[(3-6x^2+4x^4-x^6):(3-3x^2+x^4)(1+x^2)]^2-x^2\}:(1-x-x^4).$ **R.** $1-x^4+x.$

129. $\{[(3x^4+12x^3y+12x^2y^2):3x^2-2xy-4y^2]^3-12x^4y^2-6x^5y\}:(x^4-2x^3y+4x^2y^2).$ **R.** $x(x+2y).$

130. $\{[(16x^3-2):(2+4x+8x^2)]^3-8x^3+28x^2-14x+2\}:(4x-1).$ **R.** $4x-1.$

131. $\{[(20x^2y^4-45):5:(2xy^2+3)]^2-4x^2y^4+9x^2+4y^4-9\}^3:(3x-2y^2)^3+54x^2y^2-36xy^4.$
R. $27x^3-8y^6.$

132. $\{[(1-x^3)(1+x):(x^2+x+1)]^2+4x^2+x^5+x^3\}:(x^3+x^2+1).$ **R.** $1+x^2.$

133. $\{[(a^3-2a^2+2a-4):(a^2+2)]^2+a^3+5a^2+16a+4\}:(a+2)^2(a-2)+4.$ **R.** $a^2.$

134. $[(18a^4x+3a^2x^2-45x^3):(6a^2x-9x^2)\cdot(3a^2-5x)]^2+450a^4x^2-80a^8-624x^4.$ **R.** $(x^4+a^8).$

135. $\{\{[(24x^4-3x):(6x^2-3x)+2x]:(2x+1)\}^3-6x(2x+1)\}:(2x+1)-2x.$ **R.** $(2x-1)^2.$

136. $[(2x+54x^4):(2x+6x^2)-3x]\cdot(1-3x)^3:(1-3x)^6-\frac{1}{1-3x}.$ **R.** $0.$

137. $\left\{\left[(27a^3+54a^2b+36ab^2+8b^3):(9a^2+6ab)-\frac{4b^2}{3a}\right]\cdot(3a+4b)^2-108a^2b-144ab^2\right\}:$
$:(3a+4b)-12ab.$ **R.** $(3a-4b)^2.$

138. $\{[(15-3x^3+5x^2-9x):(5-3x)\cdot(x^2-3)]^2+18x^4-80\}^3-x^{24}-3x^{16}.$ **R.** $3x^8+1.$

139. $\{[(1+2m^2-m+m^4-m^3):(1+m^2-m)+2m]^2-1\}:(m^2+2m+2)+1.$ **R.** $(m+1)^2.$

140. $\{\{[(9a^4-12a^3+10a^2-4a+1):(3a^2-2a+1)-3a^2]^2-4a^2\}^3+12a-48a^2\}:(1-4a)+4a.$
R. $(1+4a)^2.$

141. $\{\{[16x^2-(3x+5y)^2]:(7x+5y)\}^3+15x^2y-75xy^2\}:(x-5y)+5xy.$ **R.** $(x+5y)^2.$

142. $[4(x+2)^2-9(x-2)^2](x^3-1000):[(10-x)^2(5x-2)]-10x.$ **R.** $-(x+10)^2.$

143. $[(x^6-3x^5+3x^4-x^3):(x^2-x)^2(x^2-x)^2-(x^2+x)^3]:(3x^2+1)+x^4+x^2.$ **R.** $(x^2+x)^2.$

144. $\{[(x+6)^3-(x-6)^3]:(x^2+12)-4(3x-2)^2\}:(5-3x)+4x^2+5.$ **R.** $(2x+3)^2.$

145. $\{[(x+2)^2(x^3+8)(x^2-2x+4)(x-2)]:(x^4-4)\}:(x^2-2x+4)^2.$ **R.** $(x+2)^2.$

146. $[(x-1)(x^3-1)(x^2+x+1)-(x^3+1)^2+5x^3-6x^2+12x-8.$ **R.** $(x-2)^3.$

147. $\{[(2x/3-0,5)^3+2x^2/3-x/2]:(4x^2/9+x/3+1/4)\}\cdot\dfrac{4x+3}{6}+1/4.$ **R.** $\dfrac{4x^2}{9}.$

148. $\left[(3,375x^3-8):\dfrac{9x^2+12x+16}{4}\cdot\dfrac{3x+4}{2}\right]+4-3x^2+x^2.$ **R.** $(3x/2-x)^2.$

149. $[x^4+4+y^2+4x^2+2x^2y+4y-(x^2-2-y)^2]:(2+y)-x^2+x^3+3x+1.$ **R.** $(x+1)^3.$

150. $\{x^2/36+1+y^2+x/3-xy/3-2y-[(0,1(6)x-1-y]^2\}:\dfrac{x-6}{3}.$ **R.** 2.

151. $[(x+y-2)(x+y+2)+4](x+y)-(x-y)^3+x^3+12xy^2+8y^3-2y^3.$ **R.** $(x+2y)^3.$

152. $\{[(2x+y-\sqrt{2})(2x+y+\sqrt{2})+2-2(2x+y)+1]-(2x+y+1)^2\}:(2x+y).$ **R.** $-4.$

153. $[(x^2+2x\sqrt{2}+2)(x+\sqrt{2})-3x^2\sqrt{2}-2\sqrt{2}+6x^2+6x+8]:(x+2)^2$ **R.** $x+2.$

154. $\left\{\left[\left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2-(x-y)+1\right]\cdot\dfrac{4}{(x-y-2)^2}-4(x-y)^2\right\}:(1+2x-2y)-2y+x^2.$ **R.** $(1-x)^2.$

155. $\{[(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1)]^4:(x^4+1)+x^8-1\}:(x^8+x^4).$ **R.** $x^4+3.$

156. $(a+x)^4-(a-x)^4.$ **R.** $8ax(a^2+x^2).$

157. $(a^6+b^2)^2-4a^6b^6.$ **R.** $(a^3+b)^2(a^3-b)^2.$

158. $4a^6b^4-(a^6+b^4)^2.$ **R.** $-(a^3+b^2)(a^3-b^2)^2.$

159. $x^4+x^2y^2+y^4.$ **R.** $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2).$

160. $3x^4y^4-x^8-y^8$. **R.** $(x^2y^2+x^4-y^4)(x^2y^2-x^4+y^4)$.

161. x^8+x^4+1. **R.** $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$.

162. $3x^6-x^{12}-1$. **R.** $(x^3+x^6-1)(x^3-x^6+1)$.

163. $\{[(a^6+3a^4x^2-a^3x^3-3a^5x-1)]:[(a^2-ax)^3-1]\}\cdot(a^2-ax)^2+2(a^2-ax)+1$. **R.** $(a^2-ax+1)^2$.

164. $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$. **R.** $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$.

165. $\left\{\left[\left(\dfrac{\sqrt{588}+13\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-x^3\right):(x^2+3x+9)\right]^3-8x^2\right\}:(27+x^2)$.

166. $a^2b^2+c^2d^2-a^2c^2-b^2d^2-4abcd$. **R.** $(ab-cd+ac+bd)(ab-cd-ac-bd)$.

167. $a^2c^2+b^2d^2-b^2c^2-a^2d^2+4abcd$. **R.** $(ac+bd+bc-ad)(ac+bd-bc+ad)$.

168. $[(x^{m-1}:x^{n-1}\cdot x^{m+n})^3:x^{6m}-x^6]:(x^2-1)-x^2$. **R.** $(x^2+1)^2$.

169. $(x^{m+2}:x^{m+1}\cdot x^{m-1}):x^m\cdot x^2]x-8\}:(x-2)+2x^{m+1}:2x^m-(x+2)^2$. **R.** 0.

170. Să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor:
$P_1(x)=6x^6+12x^5-24x^4-48x^3$; $P_2(x)=8x^5+48x^4+96x^3+64x^2$. **R.** $2x^2(x+2)^2$.

171. Să se afle cel mai mare divizor comun al polinoamelor:
$P_1(x,y)=280x^4y-280x^3y^2+70x^2y^3$; $P_2(x,y)=336x^3y^2-42y^5$. **R.** $14y(2x-y)$.

172. Să se afle cel mai mic multiplu comun al polinoamelor: x^2+2x+1; x^2-1; $x+1$. **R.** x^3+x^2-x-1.

173. Aceeaşi întrebare pentru polinoamele:
x^3-2x^2+2x-1; x^3+2x^2+2x+1; x^3+1; x^3-1; x^2-1. **R.** x^6-1.

IV.7. DESCOMPUNEREA IN FACTORI

Să se descompună în factori expresiile:

174. $5a^2b+15a-5$. **R.** $5(a^2b+3a-1)$.

175. $8a^3-12a^2b^2+4a^2c$. **R.** $4a^2(2a-3b^2+c)$.

176. $a^3b+a^2b^3+a^2b$. **R.** $a^2b(a+b^2+1)$.

177. $-10a^3-6ab+2a$. **R.** $-2a(5a^2+3b-1)$.

178. $2m^3-4m^5+6m^2n+2m^2$. **R.** $2m^2(m-2m^3+3n+1)$.

179. $54a^8b^5-42a^5c^3-24a^4b^7$. **R.** $6a^4(9a^4b^5-7ac^3-4b^7)$.

180. $a^2(a+x)+x^2(a+x)$. **R.** $(a+x)(a^2+x^2)$.

181. $2p(p-q)+3q(p-q)$. **R.** $(p-q)(2p+3q)$.

182. $a(x+1)-2x(x+1)$. **R.** $(x+1)(a-2x)$.

183. $2(p-1)^2-4q(p-1)$. **R.** $2(p-1)(p-2q-1)$.

184. $mn(m^2+n^2)-n^2(m^2+n^2)$. **R.** $n(m^2+n^2)(m-n)$.

185. $4m^2(n^2-2)+2mn(n^2-2)$. **R.** $2m(n^2-2)(2m+n)$.

186. $9(b^3+b^2-b)+b^3+b^2-b$. **R.** $10b(b^2+b-1)$.

187. $2(p-q)^2-5q(q-p)$. **R.** $(p-q)(2p+3q)$.

188. $a(b-1)+c(1-b)-b+1$. **R.** $(a-c-1)(b-1)$.

189. $a(2-x^2)+b(x^2-2)-2+x^2$. **R.** $(a-b-1)(2-x^2)$.

190. $(4a-5b)(3m-2p)+(4b-a)(3m-2p)$. **R.** $(3m-2p)(3a-b)$.

191. $(4a+5b)(3p-2m)-(4b+a)(3p-2m)$. **R.** $(3p-2m)(3a+b)$.

192. $(5a-2b)(3m+3p)-(2a-7b)(2m+3p)$. **R.** $(2m+3p)(3a+5b)$.

193. $(2a-5b)(2p+3m)+(3a-7b)(2p+3m)$. **R.** $(2p+3m)(5a-12b)$.

194. $(7a-3x)(5c-2d)-(6a-2x)(5c-2d)$. **R.** $(5c-2d)(a-x)$.

195. $ac+ad+bc+bd$. **R.** $(a+b)(c+d)$.

196. $ac-ad+bc-bd$. **R.** $(a+b)(c-d)$.

197. $x^3+x^2z+2xz^2+2z^3$. **R.** $(x^2+2z^2)(x+z)$.

198. $x^3-x^2z+2xz^2-2z^3$. **R.** $(x-z)(x^2+2z^2)$.

199. $x^3+x^2z-2xz^2-2z^3$. **R.** $(x^2-2z^2)(x+z)$.

200. a^3+2a^2+2a+4. **R.** $(a+2)(a^2+2)$.

201. a^3-2a^2+2a-4. **R.** $(a^2+2)(a-2)$.

202. $12x^2y-20y^4+3x^2-5y^3-3x^2y^2+5y^5$. **R.** $(4y-y^2+1)(3x^2-5y^3)$.

203. $(m^2+4m)^2-4$. **R.** $(m^2+4m+2)(m^2+4m-2)$.

204. $9-(m+6m)^2$. **R.** $(3+6m+m^2)(3-6m-m^2)$.

205. $(2a-3b)^2-4b^2$. **R.** $(2a-5b)(2a-b)$.

206. $9a^2-(2a+3b)^2$. **R.** $(a-3b)(5a+3b)$.

207. $16c^2-(3c+5d)^2$. **R.** $(c-5d)(7c+5d)$.

208. $(5c-3d)^2-25d^2$. **R.** $(5c-8d)(5c+2d)$.

209. $9(5m-4p)^2-64m^2$. **R.** $(23m-12p)(7m-12p)$.

210. $100m^2-9(3m-2p)^2$. **R.** $(m+6p)(19m-6p)$.

211. $16(n+q)^2-(39-n)^2$. **R.** $(5n+4q-39)(3n+4q+39)$.

212. $(n+3q)^2-4(q-n)^2$. **R.** $(5q-n)(q+3n)$.

213. $m^8-6m^4y^3+9y^6$. **R.** $(m^4-3y^3)^2$.

214. $4p^{12}-20p^6z^5+25z^{10}$. **R.** $(2p^6-5z^5)^2$.

215. a^2+6a+9. **R.** $(a+3)^2$.

216. $-30ab^2+25b^4+9a^2$. **R.** $(5b^2-3a)^2$.

217. $-6a^2b^3+1+9a^4b^6$. **R.** $(3a^2b^3-1)^2$.

218. $3x+18x^3y^3+27x^5y^6$. **R.** $3x(1+3x^2y^3)^2$.

219. $9x^4-12x^3+10x^2-4x+1$. **R.** $(3x^2-2x+1)^2$.

220. $x^4+6x^3+19x^2+30x+25$. **R.** $(x^2+3x+5)^2$.

221. $4x^6-20x^5+25x^4-12x^3+30x^2+9$. **R.** $(2x^3-5x^2-3)^2$.

222. $16-4x^2-4a^2+a^2x^2$. **R.** $(2-a)(2+a)(2-x)(2+x)$.

223. $3x^2-12+x^2-4$. **R.** $4(x-2)(x+2)$.

224. $x^4-9x^2-x^2+9$. **R.** $(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$.

225. $25a^2-a^4-25b^2+a^2b^2$. **R.** $(a-b)(a+b)(5-a)(5+a)$.

226. $9a^4+45a^2-4a^2-20$. **R.** $(3a-2)(3a+2)(a^2+5)$.

227. $36x-4xy^2+9-y^2$. **R.** $(4x+1)(3-y)(3+y)$.

228. $a^2b^2-36a^2+b^4-36b^2-b^2+36$. **R.** $(a^2+b^2-1)(b-6)(b+6)$.

229. $a^3b^2-100a-a^2b^3+100b+a^2b^2c-100c$. **R.** $(a-b+c)(ab-10)(ab+10)$.

230. $4a-16ac^2-a^2+4a^2c^2-4+16c^2$. **R.** $-(a-2)^2(1-2c)(1+2c)$.

231. $3a^6x^{10}+30a^4x^5y^2+75a^2y^4$. **R.** $3a^2(a^2x^5+5y^2)^2$.

232. $36a^{n+2}+16a^{n-2}b^2+48a^nb$. **R.** $4a^{n-2}(3a^2+2b)^2$.

233. $x^2+2xy+y^2-z^2$. **R.** $(x+y+z)(x+y-z)$.

234. $9-y^2-6yz-9z^2$. **R.** $(3+y+3z)(3-y-3z)$.

235. $25z^2-4x^2+12xy-9y^2$. **R.** $(5z+2x-3y)(5z-2x+2y)$.

236. $4y^2-20yz+25z^2-36.$ **R.** $(2y-5z+6)(2y-5z-6).$

237. $a^3+a^2b-ab^2-b^3.$ **R.** $(a+b)^2(a-b).$

238. $4a^2m^2-64a^2n^2-m^2+16n^2.$ **R.** $(2a-1)(2a+1)(m-4n)(m+4n).$

239. $3x^5-192x-4x^4+256.$ **R.** $(3x-4)(x^2-8)(x^2+8).$

240. $28x^3-8x^2y-7x+2y.$ **R.** $(2x+1)(2x-1)(7x-2y).$

241. $2ac+a^2+c^2-b^2.$ **R.** $(a+c-b)(a+c+b).$

242. $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2.$ **R.** $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$

243. $6a^3b+a^2-6ab^3-b^2.$ **R.** $(a+b)(a-b)(6ab+1).$

244. $8a^3-12a^2b-8a^2+12ab+2a-3b.$ **R.** $(2a-1)^2(2a-3b).$

245. $4a^2-24a^3+48a^4-32a^5-(1-2a)^3.$ **R.** $(2a+1)(2a-1)(1-2a)^3.$

246. $a^2-(a+b)^2-2a^2-ab.$ **R.** $-(a+b)(2a+b).$

247. $4x^2-(a^2+b^2)^2+2a^2b^2+b^4.$ **R.** $(2x-a^2)(2x+a^2).$

248. $x^4+y^4-(x^2-y^2)^2+x^2+v^2-(x-y)^2.$ **R.** $2xy(xy+1).$

249. $4x^4-y^2-4x^2+1.$ **R.** $(2x^2-1-y)(2x^2-1+y).$

250. $4x^3-12x^2+12x-4-y^2(x-1)^3.$ **R.** $(2-y)(2+y)(x-1)^3.$

251. $a^4-b^2(2a-b)^2.$ **R.** $(a-b)^2(a^2+2ab-b^2).$

252. $a^4-16c^2(c-a)^2.$ **R.** $(a-2c)^2(a^2+4ac-4c^2).$

253. $(a-2b)^2+2b(a-2b)+b^2.$ **R.** $(a-b)^2.$

254. $(2a-b)^2-2b(b-2a)+b^2.$ **R.** $4a^2.$

255. $(m^2+1)^2-4m^2.$ **R.** $(m+1)^2(m-1)^2.$

256. $36m^2-(m^2+9)^2.$ **R.** $-(m+3)^2(m-3)^2.$

257. $(p+q)^3-3(p+q)^2(p-q)+3(p+q)(p-q)^2-(p-q)^3.$ **R.** $8q^3.$

258. $ac^2-ab^2+b^2c-c^3.$ **R.** $(c+b)(c-b)(a-c).$

259. $(a-b)(a^2-c^2)-(a-c)(a^2-b^2).$ **R.** $(a-b)(a-c)(c-b).$

260. $a^2b^4c^2-a^2b^2c^4+a^4b^2c^2-a^4c^4.$ **R.** $a^2c^2(b+c)(b-c)(a^2+b^2).$

261. $a^2-ab-b-1.$ **R.** $(a+1)(a-b-1).$

262. $4(n-2)^2+9+12(n-2).$ **R.** $(2n-1)^2.$

IV.8. SIMPLIFICAREA FRACȚIILOR ALGEBRICE

La începutul acestui capitol se impune, din nou, următoarea recomandare: la toate exercițiile cu fracții algebrice (adică avînd litere la numitor) se va preciza, în primul rînd, mulțimea valorilor cu care se pot efectua operațiile, astfel ca fracțiile să aibă sens.

Să se simplifice:

263. $\frac{2x^4-8x^3y+8x^2y^2}{x^4-2x^3y}$. R. $\frac{2(x-2y)}{x}$.

264. $\frac{20a^5x^2+16a^3bx^2}{75a^4b+120a^2b^2+48b^3}$. R. $\frac{4a^3x^2}{3b(5a^2+4b)}$.

265. $\frac{25ab^2+15b^2-30bc}{20a^3b+12a^2b-24a^2c}$. R. $\frac{5b}{4a^2}$.

266. $\frac{65x^3y-60x^2y^2}{39x^2y^3-36xy^4}$. R. $\frac{5x}{3y^2}$.

267. $\frac{12x^5-27x^3y^2}{8x^3y-12x^2y^2}$. R. $\frac{3x(2x+3y)}{4y}$.

268. $\frac{72a^2b^2c+16ab^3c-24ab^2c}{27a^5c^2+6a^4bc^2-9a^4c^2}$. R. $\frac{8b^2}{3a^3c}$.

269. $\frac{3x^4c+5x^3yc-y^2x^3c^2}{2xy^2c^2-3x^2y^2c-5xy^3c}$. R. $\frac{-x^2}{y^2}$.

270. $\frac{12x^2-8xy-4x(3x-2y)}{9x^2+4y^2-12xy}$. R. 0.

271. $\frac{y+5}{7y+xy+35+5x}$. R. $\frac{1}{x+7}$.

272. $\frac{14x^2-7ax+2xy-ay}{4x^3-4ax^2+a^2x}$. R. $\frac{7x+y}{x(2x-a)}$.

273. $\frac{ax-6+3x-2a}{ax+6-3x-2a}$. R. $\frac{a+3}{a-3}$.

274. $\frac{1\frac{1}{8}a^4b^2-0,125a^4b^2-b^2}{a^2b-b}$. R. $b(a^2+1)$.

275. $\frac{3ac^2+3bc^2-3ab^2-3b^3}{6ac^2+6bc^2-6ab^2-6b^3}$. R. $\frac{1}{2}$.

276. $\dfrac{\left(\dfrac{2xy}{3}-2y^2\right)\left(2xy+\dfrac{2x^2}{3}\right)}{4xy}$. **R.** $\dfrac{x^2}{9}-y^2$.

277. $\dfrac{4\left(\dfrac{3x^2}{4}+1\dfrac{1}{2}xy+0{,}75y^2\right)}{3x+3y}$. **R.** $x+y$.

278. $\dfrac{18x^4-8x^6:4x^2-1}{(2x-1)(4x^2+1)}$. **R.** $2x+1$.

279. $\dfrac{\left[(4x^4-7x:14x^2)\left(4x^4+\dfrac{1}{2x}\right)\right]^2-\dfrac{1}{16x^4}}{32x^{10}-1}$. **R.** $8x^6$.

280. $\dfrac{4a^4-2a^4:a^2-2a^2+1-b^2}{2a^2-b-1}$. **R.** $2a^2+b-1$.

281. $\dfrac{(x^2y+xy^2)^2-(x+y)^2}{x^3y+2x^2y^2+xy^3+(x+y)^2}$. **R.** $xy-1$.

282. $(x^2-y^2):(xz-yz-xy+y^2)$. **R.** $(x+y):(z-y)$.

283. $\dfrac{(x^3-x^2-9x+9)(x^2-3x+xy-3y)}{(x^2-4x+3)(x+y)}$. **R.** x^2-9.

284. $\dfrac{x^2+2xy+y^2-z^2}{(x+y+z)a+(x+y+z)z}$. **R.** $\dfrac{x+y-z}{a+z}$.

285. $\dfrac{243a^6b^6-1\ 125b^9a^3}{9a^3b^6(9a^2+15ab+25b^2)}$. **R.** $3a-5b$.

286. $\dfrac{[(0{,}04x^2-0{,}25y^2):(0{,}2x+0{,}5y)]^2}{2x-5y}10$. **R.** $\dfrac{x}{5}-\dfrac{y}{2}$.

287. $\dfrac{\sqrt{0{,}(3)y^2+5y^2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{y}-9y^2+(2+3y)3y}{2+3y}$. **R.** 2.

288. $\dfrac{x^2+y^2+z^2-2xz+2xy-2yz}{x^2-y^2-z^2+2yz}$. R. $\dfrac{x+y-z}{x-y+z}$.

289. $\dfrac{(x+b)^2-(a+c)^2}{(a+x)^2-(b+c)^2}$. R. $\dfrac{x-a+b-c}{x+a-b-c}$.

290. $\dfrac{(ax-x)(x-a)}{a^3x-ax^3-a^2x+x^3}$. R. $\dfrac{-1}{a+x}$.

291. $\dfrac{a^2x^2-x^2b^2+2a^2x-2b^2x+a^2-b^2}{(a-b)(x+1)}$. R. $(x+1)(a+b)$.

292. $\dfrac{-a^2-ab-ac-bc}{ab+b^2+a(a+b)}$. R. $\dfrac{-(a+c)}{a+b}$.

293. $\dfrac{\left[\left(\frac{3}{5}a-0{,}625b\right)\left(\frac{5}{8}b+0{,}6a\right)\right]^2+\frac{9a^2b^2}{32}-\frac{626b^4}{64^2}}{\left(\frac{3a}{5}-\frac{b}{8}\right)\left(\frac{9a^2}{25}+\frac{b^2}{64}\right)}$. R. $\dfrac{24a+5b}{40}$.

294. $\dfrac{\left(20\frac{1}{25}x^2-\sqrt{401{,}6016}\right)\frac{y^2}{501}}{\frac{xy^2-y^2}{5}}$. R. $\dfrac{x+1}{5}$.

295. $\dfrac{\frac{4a^3b^4}{19}:\frac{2}{133ab^2}-10a^4b^6-1}{2a^2b^3+1}$. R. $2a^2b^3-1$.

296. $\dfrac{[(2ab-c)(2ab+c)]^2+8a^2b^2c^2-2c^4}{2ab-c}$. R. $(2ab+c)(4a^2b^2+c^2)$.

297. $\dfrac{(6x^2y^2-15x^2:5x)(2xy^2+1)}{12x^3y^4-3x}$. R. 1.

298. $\dfrac{3a^2x^2+3b^2-6abx+9a^2x-9ab}{(a^3x^3-ab^2x)(ax-b+3a)}$. R. $\dfrac{3}{ax(ax+b)}$.

299. $\dfrac{2a^3+3a^2b-2a-3b}{2a^2-2a+3b(a-1)}$. R. $a+1$.

300. $\dfrac{\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{2}{ab}\right)a^6b^2-a^6-a^5b}{a^4b}$. **R.** $a+b$.

301. $\dfrac{\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{x}{ab}+\dfrac{1}{b}\right)-\dfrac{1}{ab}(a+b+x)+\dfrac{x^2+1}{ab}}{abx-ab}$. **R.** $\dfrac{x-1}{a^2b^2}$.

302. $\dfrac{4a^2y^4-4ay^3+y^2+(2ay-1)^2}{(y^4-1)(2ay-1)^2}$. **R.** $\dfrac{1}{y^2-1}$.

303. $\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^5-2x^3+x}$. **R.** $\dfrac{1}{x(x+1)}$.

304. $\dfrac{x^2+4-4x}{x^3+2-2x^2-x}$. **R.** $\dfrac{x-2}{x^2-1}$.

305. $\dfrac{ax+1-a-x}{ax-1-a+x}$. **R.** $\dfrac{a-1}{a+1}$.

306. $\dfrac{xy^3+2x^2y^2+x^3y+xy^2(x+y)^2}{xy^2-x-y(1-y^2)}$. **R.** $\dfrac{xy(x+y)}{y-1}$.

307. $\dfrac{a^2-b^2+ac-bc}{a^2+b^2-c^2+2ab}$. **R.** $\dfrac{a-b}{a+b-c}$.

308. $\dfrac{2ac-a^2-c^2+b^2}{a^2+2ab-c^2+b^2}$. **R.** $-\dfrac{a-b-c}{a+b+c}$.

309. $\dfrac{0,125x^2a^2-a^2-\dfrac{x^2b^2}{8}+b^2}{(a+b)(0,125x^2-1)}$. **R.** $a-b$.

310. $\dfrac{ax^2-a\sqrt{0,0256}+\dfrac{4b}{25}-x^2b}{(0,4+x)(a-b)}$. **R.** $x-\dfrac{2}{5}$.

311. $\dfrac{ax^2+0,1(6)x^2-a-\dfrac{1}{6}}{(x-1)\left(a+\dfrac{1}{6}\right)}$. **R.** $x+1$.

312. $\dfrac{2(x^2+y^2)-4xy+6(x-y)^2}{2(x^2-y^2)(x-y)}$. **R.** $\dfrac{4}{x+y}$.

313. $\dfrac{4x^2+12x+9-2b^2x-3b^2}{2x+3-b^2}$. **R.** $2x+3$.

314. $\dfrac{a^3-a^2b-4a+4b}{(a^2-b^2)(a-2)}$. **R.** $\dfrac{a+2}{a+b}$.

315. $\dfrac{4x^2-1}{y(2x+1)-4x-2}$. **R.** $\dfrac{2x-1}{y-2}$.

316. $\dfrac{x^3+bx^2+ax+ab}{x^2-ax+bx-ab}$. **R.** $\dfrac{x^2+a}{x-a}$.

317. $\dfrac{a^4 : 25-0{,}04b^4-(a^2b^2-b^4): 25}{(a^3-a^2b):5}$. **R.** $\dfrac{a+b}{5}$.

318. $\dfrac{\frac{17}{12}x^2-1{,}41(6)-x^2+1}{\frac{x-1}{12}}$. **R.** $5(x+1)$.

319. $\dfrac{ac+ad+bc+bd-a(c+d)}{ac^2-ad^2+bc^2-bd^2}$. **R.** $\dfrac{b}{(a+b)(c-d)}$.

320. $\dfrac{a^2x-a^2-b^2x+b^2}{ax-a+bx-b}$. **R.** $a-b$.

321. $\dfrac{a^3-2a^2+9a-18+6a(a-2)}{a^2-2a+3a-6}$. **R.** $a+3$.

322. $\dfrac{7+x^3-7x^2-x}{(x-1)(x-7)}$. **R.** $x+1$.

323. $\dfrac{(1-ab)^2-(a-b)^2}{a^3b^2-a^5b^2}$. **R.** $\dfrac{1-b^2}{a^3b^2}$.

324. $\dfrac{3a^3+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5}$. **R.** $\dfrac{1}{3a^2-b^2}$.

325. $\dfrac{a^5-ba^4-ab^4+b^5}{a^4-ba^3-a^2b^2+ab^3}$. **R.** $\dfrac{a^2+b^2}{a}$.

326. $\dfrac{x^3+x^2y-x-y}{(x^2+2xy+y^2)(x-1)}$. **R.** $\dfrac{x+1}{x+y}$.

327. $\dfrac{a^4-b^4+2ab(a^2-b^2)}{(a^2+b^2+2ab)(a-b)}$. **R.** $a+b$.

328. $\dfrac{xy(a^2-b^2)+abx^2-aby^2}{abx^2+aby^2+xy(a^2+b^2)}$. **R.** $\dfrac{ax-by}{ax+by}$.

329. $\dfrac{2x^4+4x^3y+2x^2y^2+4x^2yz+2x^2z^2+4x^3z}{x^3-xy^2-xz^2-2xyz}$. **R.** $\dfrac{2x(x+y+z)}{x-y-z}$.

330. $\dfrac{2(x^2+y^2)+4xy-2z^2}{4z(z+2x)+4x^2-4y^2}$. **R.** $\dfrac{x+y+z}{2(x-y+z)}$.

331. $\dfrac{2ax^3+a^2x^2+x^4-b^4}{x^2(2b^2-a^2)+x^4+b^4}$. **R.** $\dfrac{x^2+ax-b^2}{x^2+b^2-ax}$.

332. $\dfrac{2b^2+a^2-3ab+ac-2bc}{2bc+a^2-b^2-c^2}$. **R.** $\dfrac{a-2b}{a+b-c}$.

333. $\dfrac{x^2(x^2+a^2)^2}{\dfrac{x^{10}-a^{10}}{x^2-a^2}-\dfrac{x^{12}+a^{12}}{x^4+a^4}}$. **R.** $\dfrac{1}{a^2}$.

334. $\dfrac{x^3+y^3}{2(x+y)}$. **R.** $\dfrac{x^2-xy+y^2}{2}$.

335. $\dfrac{a^3+b^3+(a+b)^3}{2(a+b)}$. **R.** $\dfrac{2(a^2+b^2)+ab}{2}$.

336. $\dfrac{(x^2-y^2)(x^3-y^3)}{(x-y)(x^3+y^3)}$. **R.** $\dfrac{x^3-y^3}{x^2-xy+y^2}$.

337. $\dfrac{3x^3+24}{2x+4-5(x+2)}$. **R.** $-x^2+2x-4$.

338. $\dfrac{x^2-3xy+xz+2y^2-2yz}{x^2-y^2+2yz-z^2}$. **R.** $\dfrac{x-2y}{x+y-z}$.

339. $\dfrac{a^3-3a^2b-b^3+3ab^2+x(a-b)^3}{(1+x)(a^2-2ab+b^2)}$. **R.** $a-b$.

340. $\dfrac{a^3x^3+b^3x^3+27(a^3+b^3)}{(x+3)(a+b)}$. **R.** $(x^2-3x+9)(a^2-ab+b^2)$.

341. $\dfrac{a^3x^2+b^3x^2+3abx^2(a+b)+(a+b)^3}{a^2x^2+2abx^2+b^2x^2+(a+b)^2}$. **R.** $a+b$.

342. $\dfrac{8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3-1}{(2a-3b)^2+2a-3b+1}$. **R.** $2a-3b-1$.

343. $\dfrac{a^5+b^5-a^2b^3-a^3b^2}{(a-b^2)(a^2+ab+b^2)}$. **R.** $a+b$.

344. $\dfrac{27a^3x+54a^2bx+36ab^2x+8b^3x-(3a+2b)^3}{(x^2-1)(3a+2b)^2}$. **R.** $\dfrac{3a+2b}{x+1}$.

345. $\dfrac{8ax^3+ay^3+8bx^3+by^3}{4x^2-2xy+y^2}$. **R.** $(2x+y)(a+b)$.

346. $\dfrac{(x^3-1-3x^2+3x)(x-1)^2(x-1)-1}{(x-1)^3+1}$. **R.** $(x-1)^3-1$.

347. $\dfrac{a^3x-a^3y-3a^2x^2+3a^2xy+3ax^3-3ax^2y+x^3y-x^4}{(x-y)(a-x)^2}$. **R.** $a-x$.

348. $\dfrac{0{,}125x^3-1+\dfrac{x^3y}{8}-y}{0{,}25(x^2+2x+4)(y+1)}$. **R.** $\dfrac{x-2}{2}$.

349. $\dfrac{0{,}027x^3+8-\dfrac{27x^3y^3}{1000}-8y^3}{(0{,}09x^2-0{,}6x+4)(y^2+y+1)}$. **R.** $(1-y)\left(\dfrac{3x}{10}+2\right)$.

350. $\dfrac{6a^2b^2-3a^3b-3ab^3+(a-b)(a^3-b^3)}{(b-a)(a^2+b^2-2ab)}$. **R.** $b-a$.

351. $\dfrac{x^3y^2-x^5y^2+y^2(1-x^2)}{[(1-xy)^2-(x-y)^2](x^2-x+1)}$. R. $\dfrac{y^2(x+1)}{1-y^2}$.

352. $\dfrac{x^4+ax^3-a^2x^4}{x^4-a^4x^4+2ax^3+a^2x^2}$. R. $\dfrac{x}{x+a+a^2x}$.

353. $\dfrac{a^2+2a+2}{(a+1)^4-1}\cdot\dfrac{a^2}{a+2}$. R. $\dfrac{a}{(a+2)^2}$.

354. $\dfrac{x^2+6x+5}{x^3+5x^2-x-5}$. R. $\dfrac{1}{x-1}$.

355. $\dfrac{x^4-7x^2+6}{(x^2-6)(x+1)}$. R. $x-1$.

IV.9. OPERAȚII CU FRACȚII ALGEBRICE

356. $\dfrac{a-b}{a}-\dfrac{a+b}{b}+\dfrac{3a^2+b^2}{2ab}$. R. $\dfrac{a^2-b^2}{2ab}$.

357. $\dfrac{a+b}{a}+\dfrac{a-b}{b}+2$. R. $\dfrac{(a+b)^2}{ab}$.

358. $\left(\dfrac{a+b}{a^2b}+\dfrac{a-b}{ab^2}+\dfrac{2ab}{a^2b^2}\right)\cdot\dfrac{a}{a+b}$. R. $\dfrac{a+b}{ab^2}$.

359. $\dfrac{1}{(a-b)^2}-\dfrac{b}{(b-a)^3}$. R. $\dfrac{a}{(a-b)^3}$.

360. $\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{2x}{x^2+4x+4}$. R. $\dfrac{x^2-20x-28}{(x+2)^2(x-2)}$.

361. $\dfrac{1}{p-3}-\dfrac{3}{2p+6}-\dfrac{p}{2p^2-12p+18}$. R. $\dfrac{-2p^2+15p-45}{2(p-3)^2(p+3)}$.

362. $\dfrac{a+b}{ab}+\dfrac{b+c}{bc}+\dfrac{c+a}{ac}$. R. $\dfrac{2(ab+bc+ca)}{abc}$.

363. $\left(\dfrac{c^2-b^2-a^2}{2ab}+1\right)\cdot\dfrac{2a}{a+c-b}$. R. $\dfrac{c-a+b}{b}$.

364. $\dfrac{a^2-x^2-y^2}{2xy}-1.$ **R.** $\dfrac{(a+x+y)(a-x-y)}{2xy}.$

365. $\dfrac{[(2a-3)(2a+3)]^2+72a^2-82}{8}:\dfrac{4a^2+1}{4}:\dfrac{2a-1}{2}-2a.$ **R.** 1.

366. $\left(\dfrac{2a-1}{4}-\dfrac{a+1}{3}+\dfrac{a^2+8}{12}\right):\dfrac{a+1}{6}+\dfrac{a^2+a}{2}.$ **R.** $\dfrac{(a+1)^2}{2}.$

367. $\left(\dfrac{4a^3-8a^2}{8a^2}-\dfrac{a^2-4}{4a}\right):\dfrac{a-2}{2}+0,5.$ **R.** $\dfrac{a-1}{a}.$

368. $\left(\dfrac{4a^2-16}{6}:\dfrac{a+2}{3}-\dfrac{a-4}{4}\right)\cdot\dfrac{4}{7a-12}.$ **R.** 1.

369. $\left\{\dfrac{[(2a-3)(2a+3)]^2+72a^2-85}{8}:\dfrac{2a^2+1}{4}-3a^2+1\right\}\cdot\dfrac{1}{(a+1)^2}.$ **R.** $\dfrac{a-1}{a+1}.$

370. $\left[\dfrac{(19^2:21^3)\cdot(21^2:19^3)\cdot 399}{4}-a^2\right]:\left(\dfrac{1}{2}+a\right)+a.$ **R.** $\dfrac{1}{2}.$

371. $\left[\dfrac{(3^2\cdot 5^6\cdot a^2):(5^4\cdot b^2\cdot 3^4)}{5^2}-\dfrac{3^2}{b^2}\right]:\left(\dfrac{a}{3b}-\dfrac{3}{b}\right)-\dfrac{3}{b}.$ **R.** $\dfrac{a}{3b}.$

372. $\left(0,1(6)x^2-\dfrac{a^2}{6}\right):\dfrac{x-a}{3}+\dfrac{a-x}{2}.$ **R.** $a.$

373. $\dfrac{25x^2-7x:28x^3}{5x-\dfrac{1}{2x}}-\dfrac{10x^2-1}{2x}-\dfrac{1}{x}.$ **R.** 0.

374. $\left\{\dfrac{\left[4x^2-1,1(3)+\dfrac{2}{15}\right]:(2x+1)}{2x}+\dfrac{1}{2x}-x^2\right\}:(1-x)-x.$ **R.** 1.

375. $\dfrac{6x^2-4x^2:6x^3+\dfrac{2}{3x}+3x^2-1}{6x-2}-\dfrac{2x-2}{4}.$ **R.** $x+1.$

376. $\left[\left(\frac{72x^3-2x}{48x^2+8x}\right)^2+\frac{3x}{4}-\frac{1}{8}\right]:\frac{(6x-1)}{4}-\frac{3x}{2}.$ **R.** $\frac{1}{4}$.

377. $\left(\frac{4x^2-8xy}{x}+\frac{2x^4-8x^3y+8x^2y^2}{x^4-2x^3y}\right):\frac{x-2y}{x}-4x.$ **R.** 2.

378. $\left(\frac{65x^3y-60x^2y^2}{39x^2y^2-36xy^3}\cdot\frac{5x}{3y^2}-1\right):\frac{5x-3y^2}{3y^2}-\frac{5x}{3y^2}.$ **R.** 1.

379. $\left[\frac{x^2+xy}{2x}+\frac{4(3x^2+3xy+0,75y^2)}{2x+y}\right]\cdot\frac{2}{13x+7y}.$ **R.** 1.

380. $\left(\sqrt{\frac{27\cdot 8a^3}{3^4\cdot 2^2}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2a}\cdot\frac{3}{2}}-x^2\right):\left(\frac{a-x}{2}\right)-2x-a.$ **R.** a.

381. $\left[\frac{ax^2+x^2-4a-4}{4a+4}\cdot\frac{16}{x+2}-x^2(x-2)\right]:(x^2-4)+x.$ **R.** 2.

382. $\left[\left(\frac{\sqrt{343}}{11}\cdot\frac{\sqrt{847}}{7}\right)^2-\frac{x^2}{25}\right]:\left(7+\frac{x}{5}\right)+\frac{x}{5}.$ **R.** 7.

383. $\left(\frac{a^2x-a^2y-b^2x+b^2y}{4(ax-ay+bx-by)}\cdot\frac{a-b}{4}-1\right):\left(\frac{a-b}{4}+1\right)-\frac{a-b}{4}.$ **R.** –1.

384. $\left[\left(\frac{a^2x^2-4a^2+x^2-4}{a^2x^2+x^2}\cdot\frac{x}{x+2}\right)^2-1\right]:\left(\frac{x-1}{x}\right)+\frac{4}{x}.$ **R.** 0.

385. $\left[\frac{a^4+2a^3+a^2}{(a+1)^2}-9\right]\cdot\frac{1}{3a-9}-\frac{a}{3}.$ **R.** 1.

386. $\left[\left(\frac{9a^2-x^2-2x-1}{3a-x-1}-3a\right)^2+2(x+1)+1\right]:(x+2).$ **R.** $x+2$.

387. $\left(\frac{b^2-2b+1-4a^2}{2a+b-1}+2a\right)^2+2(b-1)+1-b^2.$ **R.** 0.

388. $\frac{4a^2-4ax+x^2-(2b+x)^2}{2a+2b}\cdot\frac{1}{a-x-b}-2.$ **R.** 0.

389. $\left(\frac{x^2+3x-x^4-3x^3}{x^2+3x}\cdot\frac{1}{1-x}\right)^2+2(x+1)+1]:(x+2)^2-1.$ **R.** 0.

390. $\left[\left(\frac{3x^2-2xy-y^2}{3x+y}\right)^2-(x-y)^2+x^2+y^2\right]:(x^2+y^2)^2.$ **R.** $9\frac{1}{x^2+y^2}.$

391. $\frac{1}{b^3c^2a}+\frac{1}{c^3a^2b}+\frac{1}{a^3b^2c}.$ **R.** $\frac{a^2c+b^2a+c^2b}{a^3b^3c^3}.$

392. $\frac{a-b-c}{bc}+\frac{b+c+a}{ca}+\frac{c+a-b}{ab}.$ **R.** $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}.$

393. $\frac{a^2+ab+b^2}{ab}+\frac{b^2+bc+c^2}{bc}+\frac{c^2+ac+a^2}{ac}-1.$ **R.** $\frac{(b+c)(a+b)(c+a)}{abc}.$

394. $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2}+\frac{a^2-ab-b^2}{ab}+\frac{a^2-ab-b^2}{b^2}-\frac{b^2}{a^2}.$ **R.** $\frac{a^2-b^2}{b^2}.$

395. $\frac{a+2b}{a+b}-\frac{(3a+2b)b}{(a+b)^2}.$ **R.** $\frac{a^2}{(a+b)^2}.$

396. $\frac{7}{2n-m}-\frac{6}{m+2n}-\frac{12m}{4n^2-m^2}.$ **R.** $\frac{1}{2n-m}.$

397. $\frac{3x+2}{x^2-2x+1}-\frac{6}{x^2-1}-\frac{3x-2}{x^2+2x+1}.$ **R.** $\frac{10(x^2+1)}{(x-1)^2(x+1)^2}.$

398. $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}+\frac{2ab}{a^2-b^2}.$ **R.** $\frac{a+b}{a-b}.$

399. $\frac{ax}{a^2-x^2}+\frac{a-x}{a+x}+\frac{a+x}{a-x}.$ **R.** $\frac{2(a^2+x^2)+ax}{a^2-x^2}.$

400. $\frac{x}{x+y}-\frac{y}{x-y}-\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}.$ **R.** $\frac{2y}{y-x}.$

401. $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+b}+\frac{2a-b}{a^2+ab}.$ **R.** $\frac{4}{a+b}.$

402. $\frac{1}{x-y}+\frac{x+2y}{x^2-xy}+\frac{x-y}{x^2}$. R. $\frac{3x^2+y^2}{x^2(x-y)}$.

403. $\frac{a+x}{a-x}+\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}-\frac{a-x}{a+x}$. R. $\frac{a^2+4ax+x^2}{a^2-x^2}$.

404. $\frac{x^2+y^2}{xy}-\frac{x^2}{xy+y^2}-\frac{x^2}{x^2+xy}$. R. $\frac{y}{x}$.

405. $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{ab}}(a+b)^2$. R. $(a+b)^3$.

406. $\left[\left(\frac{a}{2}-1\right)^2+a\right]\left(\frac{a^2}{4}-1\right)$. R. $\frac{a^4}{16}-1$.

407. $\left[\left(\frac{2a}{b}-\frac{b}{2a}\right)^2+2\right]\left(\frac{ab}{16a^4+b^4}\right)$. R. $\frac{1}{2ab}$.

408. $\left[\left(\frac{a^2x}{2}-\frac{3}{ax^2}\right)^2-\frac{a^4x^2}{4}\right]\cdot\frac{x}{a^3x^3-3}:\frac{3}{a^2x^3}$. R. -1.

409. $\frac{1-a}{3b^2}\,\frac{b^3}{1-a^2}+1-a-\frac{b}{3(1+a)}$. R. $1-a$.

410. $\frac{x+y}{4y^2}\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}(2xy-2y^2)$. R. $\frac{x^2+y^2}{2y}$.

411. $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cdot\left(-\frac{3a^2}{4a-4b}\right)\frac{4}{a^2+ab}$. R. $-\frac{3a}{a^2+b^2}$.

412. $\left[\left(\frac{a}{m+1}-d+\frac{a}{m-1}\right)(m^2-1)-2am\right]:(m+1)$. R. $-d(m-1)$.

413. $-\frac{b^2-a^2}{a}\cdot\left(-\frac{b^2+a^2}{5a+5b}\right)$. R. $\frac{(b-a)(b^2+a^2)}{5a}$.

414. $\left(\frac{2ab}{a^2-b^2}+\frac{b}{a^2+ab}-\frac{a+b}{a^2-ab}+\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{a^2-b^2}{2a^2-a-3b}.$ **R.** $\frac{b}{a}.$

415. $\left(\frac{1}{1-a}-1\right):\left(a-\frac{1-2a^2}{1-a}+1\right).$ **R.** $\frac{1}{a}.$

416. $\left(m+1-\frac{1}{1-m}\right):\left(m-\frac{m^2}{m-1}\right).$ **R.** $-m.$

417. $\left(a-\frac{1}{1-a}\right):\frac{a^2-a+1}{a^2-2a+1}.$ **R.** $a-1.$

418. $\left(\frac{4c^2+21}{2-2c}-6\right):\frac{2cn+3n-4c-6}{2-2c^2}.$ **R.** $\frac{(2c+3)(1+c)}{n-2}.$

419. $\left(\frac{2ab+4b-3a-6}{2-2b^2}\right):\left(\frac{4b^2+21}{2+2b}-6\right).$ **R.** $\frac{a+2}{(1-b)(2b-3)}.$

420. $\frac{3x^2y^3-12x^2y^5}{3(1-4y^2\ )}-x^2y^3+\frac{0{,}04x^2-1}{\frac{x}{5}+1}.$ **R.** $\frac{x}{5}-1.$

421. $\left[\frac{3}{2}\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{6}\right):(2a+b)-0{,}125\right]:0{,}25a^2.$ **R.** $\frac{1}{2a^2}.$

422. $\frac{\left(\frac{5x}{2a}-\frac{4x}{3a}+\frac{x}{a}\right)6a}{9ax}.$ **R.** $\frac{13}{9a}.$

423. $\left(\frac{4a}{9b^3}-\frac{5b}{6a^3}+\frac{c}{10a^2b^2}\right)\left(\frac{90a^3b^3}{40a^4-75b^4+9abc}\right).$ **R.** 1.

424. $\left(\frac{20a^2b+c^2}{10a^3b^2}+2ab^2-\frac{3}{2ab}\right)\cdot\frac{10a^2b^2}{5a^2b(1+4a^2b^3)+c^2}.$ **R.** 1.

425. $\frac{\frac{6-a^2}{6a}+\frac{a}{2}+\frac{2}{a}-\left(\frac{a}{3}+\frac{3}{a}\right)}{12a^2b^3}+2.$ **R.** 2.

426. $\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{2}{a+b}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]:\frac{(a+b)^2}{ab}$. **R.** $\frac{1}{ab}$.

427. $\left[\frac{p-q}{pq}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\right]:\left[\frac{p^2+q^2}{pq}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\right]$. **R.** $\frac{-(p+q)}{p^2+q^2}$.

428. $\left(\frac{a+1}{2a-2}+\frac{16}{2a^2-2}-\frac{a+3}{2a+2}\right)\cdot\frac{4a^2-4}{3}$. **R.** $13\frac{1}{3}$.

429. $\left(\frac{3a}{1-3a}+\frac{2a}{3a+1}\right):\frac{6a^2+10a}{1-6a+9a^2}$. **R.** $\frac{1-3a}{2(1+3a)}$.

430. $\left(\frac{5a}{a+x}+\frac{5x}{a-x}+\frac{10ax}{a^2-x^2}\right):\left(\frac{a}{a+x}+\frac{x}{a-x}+\frac{2ax}{a^2-x^2}\right)$. **R.** 5.

431. $\left(\frac{b}{a^2+ab}-\frac{2}{a+b}+\frac{a}{b^2+ab}\right):\left(\frac{b}{a}-2+\frac{a}{b}\right)$. **R.** $\frac{1}{a+b}$.

432. $\left(\frac{a^2}{a+n}-\frac{a^3}{a^2+n^2+2an}\right):\left(\frac{a}{a+n}-\frac{a^2}{a^2-n^2}\right)$. **R.** $\frac{a(n-a)}{n+a}$.

433. $\left(\frac{2a}{a+1}+\frac{2}{a-1}+\frac{4a}{a^2-1}\right):\left(\frac{2a}{a+1}+\frac{2}{a-1}-\frac{4a}{a^2-1}\right)$. **R.** $\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2$.

434. $\left(\frac{2ab}{4a^2-9b^2}+\frac{b}{3b-2a}\right):\left(1-\frac{2a-3b}{2a+3b}\right)$. **R.** $\frac{b}{2(3b-2a)}$.

435. $\left(\frac{p}{p^2-4}+\frac{2}{2-p}+\frac{1}{p+2}\right):\left(p-2+\frac{10-p^2}{p+2}\right)$. **R.** $\frac{1}{2-p}$.

436. $\left(\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right):\left(\frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}\right)$. **R.** $\frac{2a(b-2a)}{b+2a}$.

437. $\left(\frac{8+a^3}{x^2-y^2}:\frac{4-2a+a^2}{x-y}\right):\left(x+\frac{xy+y^2}{x+y}\right)$. **R.** $\frac{a+2}{(x+y)^2}$.

438. $\left(x-\frac{4xy}{x+y}+y\right):\left(\frac{x}{x+y}-\frac{y}{y-x}-\frac{2xy}{x^2-y^2}\right).$ **R.** $x-y$.

439. $\left(\frac{b^2}{a^3-ab^2}+\frac{1}{a+b}\right):\left(\frac{a-b}{a^2+ab}-\frac{a}{b^2+ab}\right).$ **R.** $\frac{b}{b-a}$.

440. $\left(\frac{3a+2}{3a^2+1}-\frac{18a^3-a-9}{9a^4-1}+\frac{3a-2}{3a^2-1}\right):\frac{a^2+10a+25}{9a^4-1}.$ **R.** $\frac{1}{a+5}$.

441. $\left(\frac{x+1}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}-\frac{4x^2}{x^2-1}\right):\left[-2\left(\frac{1}{x^3+x^2}-\frac{1-x}{x^2}-1\right)\right].$ **R.** $\frac{2(x+1)}{1-x}$.

442. $\left(\frac{1+2n}{4+2n}-\frac{n}{3n-6}+\frac{\frac{2}{3}n^2}{4-n^2}\right)\frac{24-12n}{6+13n}.$ **R.** $\frac{2}{2+n}$.

443. $\left[\frac{a+b}{2(a-b)}-\frac{a-b}{2(a+b)}-\frac{2b^2}{b^2-a^2}\right]\cdot\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right).$ **R.** $\frac{2}{a}$.

444. $\left(\frac{5}{2a+3}+\frac{2}{3-2a}+\frac{2a+9}{4a^2-9}\right):\frac{8}{4a^2+12a+9}.$ **R.** $a+1{,}5$.

445. $\left(\frac{1}{2a-b}+\frac{3b}{b^2-4a^2}-\frac{2}{2a+b}\right):\left(\frac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2}+1\right).$ **R.** $-\frac{1}{4a}$.

446. $\left(\frac{1}{p-2q}+\frac{6q}{4q^2-p^2}-\frac{2}{p+2q}\right):\left(\frac{p^2+4q^2}{p^2-4q^2}+1\right).$ **R.** $-\frac{1}{2p}$.

447. $\left[\frac{a^2}{a^2-b^2}-\frac{a^2b}{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{ab+b^2}+\frac{b}{a^2+ab}\right)\right]:\frac{b}{a-b}.$ **R.** $\frac{a}{a+b}$.

448. $\left(a-\frac{4ab}{a+b}+b\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}-\frac{2ab}{a^2-b^2}\right).$ **R.** $a-b$.

449. $\left(\frac{a^2+b^2}{ab}-2\right):\left(\frac{2a^2+2ab}{a^2+2ab+b^2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}\right).$ **R.** $\frac{2}{b}$.

450. $\left[\frac{(a+b)^2+2b^2}{a^3-b^3}-\frac{1}{a-b}+\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}\right]\cdot\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right).$ **R.** $\frac{1}{ab}$.

451. $2\frac{a^2x-ax^2}{a^2-x^2}+\frac{a^3+a^2x}{a^2+2ax+x^2}+\frac{ax^2-x^3}{a^2-x^2}$. **R.** $a+x$.

452. $\frac{1}{x^2-ax+a^2}+\frac{1}{x^2+ax+a^2}+\frac{2ax}{x^4+a^2x^2+a^4}$. **R.** $\frac{2}{x^2-ax+a^2}$.

453. $1-\frac{8}{a^2-4}\left[\left(1-\frac{a^2+4}{4a}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right)\right]$. **R.** $\frac{a-2}{a+2}$.

454. $\left(\frac{1+a^2}{1-a^2}-\frac{1-a^2}{1+a^2}\right):\left(\frac{1+a}{1-a}-\frac{1-a}{1+a}\right)$. **R.** $\frac{a}{1+a^2}$.

455. $\left(\frac{a+b}{b}-\frac{2b}{b-a}\right)\cdot\frac{b-a}{a^2+b^2}+\left(\frac{a^2+1}{2a-1}-\frac{a}{2}\right):\frac{2+a}{1-2a}$. **R.** $-\frac{2+b}{2b}$.

456. $\frac{4a^2}{a^4+a^3+a+1}:\left(\frac{1}{a^2+2a+1}-\frac{2}{a+1}\cdot\frac{1}{1-a}+\frac{1}{a^2-2a+1}\right)$. **R.** $\frac{(a-1)^2}{a^2-a+1}$.

457. $\frac{a-2n}{a^3+n^3}-\frac{a-n}{a^2n-an^2+n^3}-\frac{1}{an+n^2}$. **R.** $-\frac{2}{n(a+n)}$.

458. $\frac{1}{n-x}-\frac{3nx}{n^3-x^3}+\frac{x-n}{n^2+nx+x^2}$. **R.** 0.

459. $\frac{a}{b+x}-\frac{bx}{b^2+x^2}+\frac{x^2}{b^2-x^2}-\frac{2bx^3}{b^4-x^4}$. **R.** $\frac{a-x}{b+x}$.

460. $\left[\frac{a-1}{3a+(a-1)^2}-\frac{1-3a+a^2}{a^3-1}-\frac{1}{a-1}\right]:\frac{a^2+1}{1-a}$. **R.** $\frac{1}{a^2+a+1}$.

IV.10 VALOAREA NUMERICĂ A UNEI EXPRESII ALGEBRICE

461. Se dau expresiile: $E_1=\frac{1-\frac{3x^2}{1-x^2}}{1+\frac{x}{1+x}}$; $E_2=\left(\frac{2x^3+2x}{4x^2}-1\right)\cdot\frac{2x-2}{x^2-x}$.

a) Să se calculeze valoarile lui E_1 şi E_2 pentru $x=\frac{1}{4}$.

b) Să se calculeze valoarea lui E_1 pentru $x=1{,}41(6)$.

c) Să se calculeze media proporțională a valorilor lui E_1 și E_2 aflate la a).

R. a) $E_1=\frac{2}{3}$; $E_2=9$; b) $E_1=\frac{22}{5}$; c) media proporțională a lui E_1 și E_2 este $\sqrt{6}$.

462. Se dau expresiile:

$$a=4x^2+(8x^3-1)\cdot\left(\frac{2x+4x^2}{4x^2-1}-\frac{2x+1}{2x-1}\right) \text{ și } b=\left(\frac{x^2-x}{x^2+1}+\frac{2x^2}{x^3-x^2+x-1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right).$$

1) Să se aducă la forma cea mai simplă. 2) Să se arate apoi că: $ab-a+b+1=0$, pentru orice valoare a lui x pentru care a și b au sens.

R. $-2x-1$; $\frac{x+1}{x}$.

463. Se dau expresiile:

$$A=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{\frac{1}{x}-1};\ B=\frac{\frac{x+1}{2}}{\frac{x+1}{2}-1};\ C=x-\frac{1-2x^2}{1-x}+1.$$

a) Să se aducă la forma cea mai simplă. b) Să se calculeze media lor aritmetică.
c) Să se calculeze valoarea numerică a mediei aritmetice găsite pentru:

$$x=\frac{1,5-\frac{1}{4}}{\sqrt{1,5625}}\cdot 1,1(6).$$

R. a) $A=\frac{1+x}{1-x}$; $B=\frac{x+1}{x-1}$; $C=\frac{x^2}{1-x}$; b) $\frac{x^2}{3(1-x)}$; c) $-\frac{49}{18}$.

464. Se dă expresia: $\frac{x^4-y^4}{x^2+2xy+y^2}:\frac{x^3+xy^2}{x+y}$.

Să se aducă la forma cea mai simplă și apoi să se calculeze valoarea numerică pentru:

$$x=\left(1,75:\frac{2}{3}-1,75\cdot 1\frac{1}{8}\right):\frac{7}{16} \text{ și } y=\frac{8}{5}\sqrt{\frac{225}{4\ 096}}.$$

R. $\frac{x-y}{x}$; $\frac{3}{4}$.

465. Să se afle valoarea numerică a expresiei:

$$\frac{2(7,125+x)-\frac{1}{21}\sqrt{7\ 056}}{\left(3x+1\frac{7}{8}\right):3} \text{ pentru } x=\frac{\left(\frac{5}{8}\cdot 3+3\frac{5}{8}\right):\frac{4}{19}}{2^2\cdot 3^2-5^2}.$$

R. 5.

PROBLEME PENTRU CLASELE a VIII–a ŞI a IX–a.

IV.11. VALOAREA ABSOLUTĂ A UNUI NUMĂR REAL

470. Să se reprezinte grafic funcţiile: $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=|2x-1|+2|x|$; $g:\mathbf{R}-\{0\}\to\mathbf{R}$, $g(x)=\dfrac{|x|}{x}$.

471. Fie $f, g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=|x-1|+3$, $g(x)=|2x-1|+|x|$. Să se calculeze $f(\mathbf{R})\cap g(\mathbf{R})$.

472. Dacă $a\leq x\leq b$, să se arate că $|x|\leq \max(|a|, |b|)$.

473. Să se gasească regiunea din plan în care se află punctele $M(x,y)$ ştiind că

$$|x-y|=|x|+|y|.$$

474. Dacă $x,y\in\mathbf{R}$, să se arate că $|x+y|=|x|+|y|\Leftrightarrow|xy|=xy$.

475. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $x+2|2x-3|=3$; b) $|2x+1|+|x|=1$; c) $2|3x-2|+3|3-2x|=13$;

d) $|x-1|+|x-2|=|x-3|$; e) $|x^2-1|+|x-3|=2$.

IV.12. INECUAŢII

476. Să se găsească punctele din plan pentru care

a) $3x-y+6\geq0$; b) $2x-y<2$; c) $3x>y$; d) $x+y-4\geq0$; şi $x-y\leq0$;

e) $2x-y-2\geq0$ şi $x+2y\geq1$; f) $x+y\geq1$; $2x+3\leq3$; $x+2y=4$;

g) $x-2y+1\leq0$; $2x-y-1<0$; $x-y+1\geq0$; h) $x-y\geq0$; $2x-y-1\leq0$; $x+y\geq2$.

477. Să se rezolve sistemele de inecuaţii:

a) $2x>5x-3$; $4(x-1)\leq(2x+1)$; b) $(x-1)(x-3)\geq(x-1)(x+2)$; $(x-2)(x-3)\leq(x+2)(x+3)$;

c) $\dfrac{x-2}{2}+\dfrac{x+3}{3}\geq\dfrac{x-4}{4}+\dfrac{x-5}{5}$; $(x-1)^2>(x-2)^2$; d) $x-2>2(x-5)$; $\dfrac{x-1}{x+1}\geq2$;

e) $\dfrac{x-m}{x-2}\geq1$; $\dfrac{x-m}{x-1}\leq2$.

IV.13. ECUAŢII DE GRADUL II

Să se rezolve următoarele ecuaţii :

478. $7x^2+21x-28=0$. **R.** $x_1=1, x_2=-4$.

479. $25x(x+1)=-4$. **R.** $x_1=-\frac{1}{5}$, $x_2=-\frac{4}{5}$.

480. $4(x^2-1)=4x-1.$ R. $x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=-\frac{1}{2}$.

481. $\frac{2x}{x+2}+\frac{x+2}{2x}=2$, $(x\neq-2,\ x\neq0)$. R. $x_1=x_2=2$.

482. $\frac{2x-1}{x+1}=\frac{x+1}{x-2}$, $(x\in\mathbf{R}-\{-1,2\})$. R. $x_1=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$.

483. $\frac{x+8}{x-8}-\frac{24}{x-4}=2$, $(x\in\mathbf{R}-\{4,8\})$. R. $x_1=12$, $x_2=-8$.

484. $\frac{x}{x-6}-\frac{1}{2}=\frac{x}{6}+\frac{x+6}{6-x}$, $(x\in\mathbf{R}-\{6\})$. R. $x_1=18$, $x_2=-3$.

485. $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{2x+13}{x+1}$, $(x\in\mathbf{R}-\{-1,1,2\})$. R. $x_1=5$, $x_2=\frac{6}{5}$.

486. $\frac{20+x}{2x-2}-\frac{9x^2+x+2}{6x^2-6}=\frac{5-3x}{x+1}-\frac{10-4x}{3x+3}$, $(x\in\mathbf{R}-\{-1,1\})$. R. $x_1=-2$, $x_2=-8\frac{1}{2}$.

487. $\frac{x+36}{x^3-1}=\frac{x+6}{x-1}-\frac{x^2-x+16}{x^2+x+1}$, $(x\in\mathbf{R}-\{1\})$. R. $x_1=2$, $x_2=-\frac{7}{9}$.

488. $\frac{x+11}{x^2-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{2(x+7)}{x+1}-4$, $(x\in\mathbf{R}-\{-1,1\})$. R. $x_1=4$, $x_2=5$.

489. $\frac{(x-12)^2}{6}-\frac{x}{9}+\frac{x(x-9)}{18}=\frac{(x-14)^2}{2}+5.$ R. $x_1=18$, $x_2=15{,}8$.

490. $\frac{x}{2x-1}+\frac{25}{4x^2-1}=\frac{1}{27}-\frac{13}{1-2x}$, $\left(x\in\mathbf{R}-\left\{-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\}\right)$. R. $x_1=13$, $x_2=\frac{2}{1}$ nu are sens.

491. $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-5}+\frac{3x^2}{4(x-2)(x-5)}=0$, $(x\in\mathbf{R}-\{2,5\})$. R. $x_1=-\frac{14}{3}$, $x_2=2$ nu are sens.

492. $ax^2-2(a-1)x+m=0$, $m\in\mathbf{R}$, $m\neq0$. Pentru ce valori ale lui m ecuaţia: a) nu are soluţii; b) are soluţii.

R. a) $m\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$; b) $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ două soluţii, $m=1/2$ o soluţie.

493. $\sqrt{3}x^2-2\sqrt{2}=0.$

494. $36x^2=\sqrt{5}+1.$

495. $144x^2=1$.

496. $2x^2-(2-\sqrt{2})^2=0$.

497. $6x^2+a^2+b^2=2ab$; $(x-1)^2-25=0$.

498. Să se arate că următoarele ecuaţii nu au rădăcini pe mulţimea numerelor reale: $3x^2+5x+20=0$, $x^2-x+1=0$, $4x^2-x+5=0$.

Să se rezolve ecuaţiile:

499. $x^2-(m+n)x+mn=0$. R. $x_1=m, x_2=n$.

500. $x^2-2ax+a^2-b^2=0$. R. $x_1=a+b, x_2=a-b$.

501. $mnx^2-(m^2+n^2)x+mn=0$ $(m,n\neq 0)$. R. $x_1=\frac{m}{n}, x_2=\frac{n}{m}$.

502. $m^2x^2+(pm-qm)x-pq=0$, $(m\,p\neq 0)$. R. $x_1=\frac{q}{m}$, $x_2=-\frac{p}{m}$.

503. $x^2-4bx+4b^2-a^2=0$. R. $x_1=2b+a$, $x_2=2b-a$.

504. $x^2-2a^2bx+a^4b^2-a^2b^4=0$. R. $x_1=ab(a+b)$, $x_2=ab(a-b)$.

505. $a^2x^2-2a^3x+a^4-1=0$, $(a\neq 0)$. R. $x_1=\frac{a^2+1}{a}$, $x_2=\frac{a^2-1}{a}$.

506. $x^2-2a^2bx+a^2b^2(a^2-4b^2)=0$. R. $x_1=ab(a+2b)$, $x_2=ab(a-2b)$.

507. $c^2x^2-2acx+a^2-4b^2=0$, $(c\neq 0)$. R. $x_1=\frac{a+2b}{c}$, $x_2=\frac{a-2b}{c}$.

508. $(m^2-n^2+x)^2=4m^2x$. R. $x_1=(m+n)^2$, $x_2=(m-n)^2$.

509. $x^2-2(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)^2=0$. R. $x_1=(a+b)^2$, $x_2=(a-b)^2$.

510. $\frac{(a-x)(x-b)}{(a-x)(x-b)}=x$, $\left(x\neq\frac{a+b}{2},\ ab>0\right)$. R. $x_1=+\sqrt{ab}$, $x_2=-\sqrt{ab}$.

511. $4a^2x^2-4abx+b^2-1=0$, $(a\neq 0)$. R. $x_1=\frac{b+1}{2a}$, $x_2=\frac{b-1}{2a}$.

512. $(a^2-4b^2)x^2+2(a^3+2b^3)x+a^4-b^4=0$, $(a^2-4b^2\neq 0)$. R. $x_1=\frac{b^2-a^2}{a+2b}$, $x_2=-\frac{a^2+b^2}{a-2b}$.

513. $\frac{a}{x}+\frac{a-1}{x-1}=2$, $(x\in\mathbf{R}-\{0,1\})$. R. $x_1=a$, $x_2=\frac{1}{2}$.

514. $(a^2-b^2)x^2-2ax+1=0,\ (a\neq b,\ a\neq -b).$ **R.** $x_1=\frac{1}{a-b},\ x_2=\frac{1}{a+b}.$

515. $\frac{x-a}{a}=\frac{2a}{x-a},\ (a\neq 0,\ x\in R-\{a\}).$ **R.** $x_1=a(1+\sqrt{2}),\ x_2=a(1-\sqrt{2}).$

516. $\frac{m}{n}x^2-m^2x+m=\frac{x}{n},\ (m,n\neq 0).$ **R.** $x_1=mn,\ x_2=\frac{1}{m}.$

517. $(a-b)x^2+(b-c)x+c-a=0,\ (a\neq b).$ **R.** $x_1=1,\ x_2=\frac{c-a}{a-b}.$

IV.14. PROBLEME CARE SE REZOLVĂ CU AJUTORUL ECUAŢIEI DE GRADUL II

Etapele de rezolvare a problemelor cu ajutorul ecuaţiei de gradul doi sînt:
1) Alegerea necunoscutei. 2) Punerea problemei în ecuaţie.
3) Rezolvarea ecuaţiei. 4) Verificarea soluţiilor şi interpretarea lor (dacă ele convin problemei respective sau nu).

Problemă rezolvată. O asociaţie de tractorişti trebuie să însămînţeze 200 ha într–un anumit număr de zile. Insămînţînd cu 5 ha în plus pe zi, au terminat însămînţarea cu 2 zile mai devreme. In cîte zile şi–au propus iniţial să termine însămînţatul şi cîte hectare au fost însămînţate pe zi?

Rezolvare. 1) Alegem necunoscuta x=numărul de ha propuse a fi însămînţate pe zi. In acest caz, numărul de zile în care ar fi trebuit să fie terminată însămînţarea este $\frac{200}{x}$.

2) In problemă se arată că lucrînd 5 ha în plus pe zi, numărul zilelor în care s–a făcut lucrarea este mai mic cu 2 decît cel planificat. Obţinem astfel ecuaţia

$$\frac{200}{x+5}=\frac{200}{x}-2,$$

în care expresiile din cele două părţi sînt definite pe $\mathbf{R}\setminus\{-5,0\}$.

3) Rezultă $200x=200(x+5)-2x(x+5)$, ecuaţie ale cărei rădăcini sînt $x_1=20$, $x_2=-25$.

4) Ambele rădăcini verifică ecuaţia? Ţinînd seama că x= numărul hectarelor, din cele două soluţii, 20 şi –25, nu putem admite decît pe cea pozitivă, $x=20$.

Probleme propuse ce se rezolvă cu ajutorul ecuaţiei de gradul doi.

1. Două automobile pornesc în acelaşi timp din oraşul A spre oraşul B. Distanţa dintre aceste două oraşe este de 560 km. Primul automabil are viteza cu 10 km/ oră mai mare decît al doilea şi din această cauză ajunge cu o oră mai devreme în B. Să se afle vitezele celor două automobile.

R. $v_1=80$ km/h; $v_2=70$ km/h.

2. O gospodărie agricolă de stat trebuia să însămînţeze 400 ha într–un anumit număr de zile. Insămînţînd pe zi cu 10 ha mai mult, lucrarea s–a terminat cu 2 zile mai

devreme. Cîte ha trebuiau însămînțate zilnic?

R. $x_1=40, x_2=-50$ nu convine problemei.

3. Două familii pot termina seceratul unui lan, în 12 zile. Dacă ar lucra fiecare dintre ele singură, una din ele ar termina lucrul cu 10 zile mai repede decît cealaltă. In cîte zile ar putea secera lanul, singură, fiecare familie?

R. $x_1=20, x_2=30$.

4. Salariul săptămînal al unui muncitor era de 800 lei. După două măriri succesive cu același procent, salariul a devenit 1 058 lei. Cu ce procent s–a mărit salariul de fiecare dată?

R. 15%.

5. Prețul de cost al unei piese era de 100 lei. După două reduceri succesive ale prețului cu același procent, prețul piesei a devenit 77,44 lei. Cu ce procent a scăzut prețul de cost de fiecare dată.

R. 12%.

6. Un grup de elevi și–a propus să facă o excursie de 20 km într–un anumit număr de ore. Dar făcînd, în medie, cu 1 km mai mult pe oră, ei au ajuns la destinație cu o oră mai devreme. Cu ce viteză și–au propus să meargă acești elevi?

R. 4 km; –5 km nu convine problemei.

7. Un grup de copii ar putea amenaja un teren de sport într–un anumit număr de zile, un alt grup de copii ar putea realiza același lucru cu 5 zile mai devreme. Lucrînd împreună, au amenajat terenul în 6 zile. In cîte zile ar fi terminat amenajarea fiecare grup, dacă ar fi lucrat singur?

R. 10 zile; 15 zile.

8. Să se afle un număr pozitiv, știind că $\frac{2}{3}$ din număr micșorat cu 2 și înmulțit cu $\frac{3}{5}$ din același număr mărit cu 3, este egal cu 1 482.

R. 60.

9. Numărătorul unei fracții este cu 3 mai mic decît numitorul. Dacă se adună această fracție cu inversa ei se obține $\frac{29}{10}$. Să se calculeze termenii acestei fracții.

R. $\frac{2}{5}$.

10. Numitorul unei fracții este cu 2 mai mare decît numărătorul. Dacă adunăm această fracție cu inversa ei obținem $\frac{34}{15}$. Să se calculaze termenii acestei fracții.

R. $\frac{3}{5}$.

11. Un triunghi dreptunghic are ipotenuza de 25 m și suma dintre o catetă și proiecția ei pe ipotenuză egală cu 24 m. Să se afle aria triunghiului.

R. 150 m^2.

12. Un romb are perimetrul de 52 m și suma diagonalelor de 34 m. Să se calculeze diagonalele rombului.

R. 24 m, 10 m.

13. Un trapez isoscel are baza mare de două ori și jumătate mai mare decît baza mică, înălțimea egală cu baza mică și aria egală cu 2 800 m^2. Să se calculeze perimetrul trapezului.

R. 240 m.

14. Intr–un trapez baza mică este egală cu $\frac{2}{3}$ din baza mare, înălțimea cu 10 m mai mică decît baza mică și aria de 1 500 m.p. Se prelungesc laturile neparalelele pînă se

întîlnesc într–un punct, să se calculeze distanţa de la acel punct la baza mare.

R. 90 m.

15. Se consideră un dreptunghi $ABCD$ cu dimensiunile de 9 m şi 5 m. Pe laturile AB, BC, CD, DA se iau segmentele $AA_1=BB_1=CC_1=DD_1=x$. Se cere să se afle mărimea acestor segmente astfel încît aria paralelogramului $A_1B_1C_1D_1$ să fie egale cu 25 m^2.

R. 2 m; 5 m.

16. Să se calculeze raza cercului circumscris unui triunghi dreptunghic, ştiind că are o catetă de 30 cm şi proiecţia celeilalte catete pe ipotenuză egală cu 32 cm.

R. 25 cm.

17. Suma pătratelor a trei numere cu soţ consecutive este 116. Să se afle numerele.

R. 4, 6, 8.

18. Intr–o clasă, fiecare elev dă la toţi colegii săi cîte o fotografie a sa, exceptînd trei colegi care stau în aceleşi rînd cu el. In total, trebuie 780 fotografii. Cîţi elevi sînt în clasă?

R. 30 elevi.

19. Să se afle un număr de două cifre, ştiind că cifra zecilor este cu 2 mai mare decît cifra unităţilor, iar produsul numărului cu suma cifrelor sale este 640.

R. 64.

20. Să se afle un număr de două cifre, astfel încît cifra zecilor să fie de două ori mai mare decît cifra unităţilor, iar pătratul sumei cifrelor sale să fie egal cu 81.

R. 63.

21. Două robinete umplu un bazin în 6 ore. Primului robinet, singur, îi trebuie cu 5 ore mai puţin decît celui de–al doilea, ca să umple bazinul. In cît timp poate umple fiecare robinet singur bazinul?

R. 10 ore; 15 ore.

22. Un obiect se vinde cu 39 lei, cîştigîndu–se atît la sută cît a costat obiectul. Cît a costat obiectul?

R. 30 lei.

23. Distanţa dintre două oraşe este de 28 km. Doi turişti parcurg acest drum, viteza primului fiind cu 0,5 km pe oră mai mare decît viteza celui de al doilea. Ei pleacă în acelaşi timp, dar unul din ei ajunge la destinaţie cu o oră mai devreme decît celălalt. Cu ce viteză merge fiecare din aceşti doi turişti?

R. 4 km pe oră şi 3,5 km pe oră.

24. O echipă de brigadieri trebuia să treiere 960 căpiţe de secară şi ovăz. Treierînd în fiecare zi cu 40 căpiţe mai mult decît era prevăzut în plan, lucrul se termină cu 4 zile mai devreme. Cîte căpiţe trebuiau treierate pe zi după plan şi cîte s–au treierat de fapt?

R. 80 şi 120.

25. Alegem un număr întreg şi pozitiv, scriem la dreapta sa cifra 7 şi înmulţim numărul astfel format cu numărul ales la început. Produsul este 111. Să se afle numărul iniţial.

R. 3.

26. Dintr–o tablă de fier în formă de dreptunnghi, s–a făcut o cutie fără capac, avînd volumul de 750 cm^3. Pentru aceasta s–a tăiat din fiecare colţ al tablei cîte un pătrat cu latura de 5 cm şi marginile obţinute s–au îndoit. Să se afle dimensiunile tablei, ştiind că una din laturile ei este cu 5 cm mai mare decît cealaltă.

R. 25 cm; 20 cm.

27. Preţul de cost al unui obiect este la început de 25 lei; după două reduceri

consecutive cu acelaşi număr de procente, preţul a scăzut la 20,25 lei. Cu cît la sută a scăzut preţul de cost de fiecare dată?

R. 10%.

28. Intr–un birou de copiat acte, s–a adus pentru copiere un manuscris de 480 pagini. Fiindcă 16 dactilografe erau ocupate cu o altă lucrare, fiecare dintre celelalte a copiat cu cîte 8 pagini mai mult decît se cuvenea. Cîte dactilografe erau în total?

R. 40.

29. O oglindă, împreună cu rama, este înaltă de 75 cm şi lată de 40 cm. Rama are peste tot aceeaşi lăţime şi suprafaţa ei este egală cu suprafaţa oglinzii. Să se afle lăţimea ramei.

R. 7,5 cm.

30. Perimetrul bazei unei clădiri dreptunghiulare este de 70 m. Clădirea este înconjurată de un gard, care este pretutindeni la aceeaşi depărtare de clădire. Suprafaţa înconjurată de gard este cu 74 m.p. mai mare decît suprafaţa ocupată de clădire. Să se afle depărtarea de la gard la clădire.

R. 1 m.

31. Două corpuri se mişcă pe laturile unui unghi drept, plecînd în acelaşi timp din vîrful unghiului. Unul are o viteză de 24 m pe minut, celălalt are o viteză de 10 m pe minut. Peste cît timp distanţa dintre ele va fi de 806 m?

R. 31 minute

32. Prin ce număr trebuie să–l împărţim pe 136, pentru ca la cît să obţinem un număr cu 3 mai mic, iar la rest, cu 7 mai mic decît împărţitorul?

R. 13.

33. Pe o foaie de hîrtie sînt date n puncte $n \in N$, $n \geq 4$, printre care nu se găsesc trei în linie dreaptă. Dacă unim toate punctele acestea cîte două prin linii drepte, obţinem 780 linii drepte. Cîte puncte sînt date?

R. 40 puncte.

34. Intr–un triunghi dreptunghic, ipotenuza este cu 9 cm mai mare decît o catetă şi cu 18 cm mai mare decît cealaltă. Să se afle laturile acestui triunghi dreptunghic.

R. 36 cm; 45 cm.

35. Laturile unui triunghi dreptunghic se exprimă prin trei numere cu soţ consecutive. Să se afle aceste laturi.

R. 6, 8, 10.

36. Circumferinţa roţii dinapoi a unei trăsuri este de două ori mai mare decît circumferinţa roţii dinainte. Dacă micşorăm circumferinţa roţii dinapoi cu 2 dm şi mărim circumferinţa roţii dinainte cu 4 dm, atunci, la o distanţă de 120 m roata dinapoi face cu 20 de învîrtituri mai puţin decît roata dinainte. Să se afle circumferinţele celor două roţi.

R. Fie ℓ circumferinţa roţii dinainte, atunci: $\frac{120}{\ell+4}+20=\frac{120}{2\ell-2} \Rightarrow \ell=-8$ şi $\ell=2$. Deci şi $\ell=2$ dm.

37. O ştafetă care pleacă din localitatea A trebuie să ajungă în localitatea B peste 5 ore. In acelaşi timp o altă ştafetă pleacă din localitatea C şi pentru a ajunge în B în acelaşi timp cu prima, trebuie ca timpul în care ea parcurge 1 km să fie cu $1\frac{1}{4}$ minute mai scurt decît timpul în care prima ştafetă parcurge 1 km. Distanţa de la C la B este cu 20 km mai mare decît distanţa de la A la B. Să se afle distanţa AB.

R. 60 km.

38. Intr–un solar pentru copii se construieşte un bazin în formă de dreptunghi. Perimetrul dreptunghiului este 28 m iar suprafaţa de 48 m.p. Care sînt dimensiunile dreptunghiului?

R. 6 m; 8 m.

IV.15. EXERCIŢII ŞI PROBLEME RECAPITULATIVE

Să se efectueze:

1. $\left[\left(\sqrt{(867)^3}\right)^2:\left(\sqrt{27\cdot17^{12}}\right)\cdot\frac{(\sqrt{289})^3}{3\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{15}}{2601}+4\frac{1}{3}\right]\cdot(-2)^0\cdot(-5)^0$ **R.** 10.

2. $\left[\left(\sqrt{0,625}\right)^2:\frac{5^6}{2^{20}}\right]^3\cdot\frac{8}{125}\cdot\frac{1}{5^{36}}:\left(\frac{2}{5}\right)^{54}+(13)^0-3.$ **R.** –1.

3. $\left\{\frac{\left[\left(\frac{16}{125}\right)^5\cdot(0,4)^8\right]^3}{\left(\frac{2}{5}\right)^{69}}-2^{15}+\left(\sqrt{0,125}\right)^4:\frac{1}{16}\right\}:\frac{1}{2^{10}}-(-1).$ **R.** 2.

4. $\left[\sqrt{(0,75)^5}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}+0,125\right]^5\cdot\frac{125}{8}:\left(\frac{5}{2}\right)^8\cdot\frac{2^5}{5^7}+\frac{4}{5^7}-\frac{6}{5^6}.$ **R.** $-\frac{1}{5^5}$.

5. $\left\{\left[\frac{2(x-y)^2-5y(y-x)}{2x+3y}\right]^2(x+y)\right\}:(x-y)-2xy+2y^2.$ **R.** $(x-y)^2$.

6. $\left\{\left[\frac{x(y-1)+z(1-y)-y+1}{x-z-1}\right]^2(y+1)\right\}:(y-1)+2y+2.$ **R.** $(y+1)^2$.

7. $\left\{\left[\frac{y(2-x^2)+z(x^2-2)-2+x^2}{y-z-1}(x^2+2)\right]^2-16-x^4\right\}:(x^4-3x^2).$ **R.** x^4+3x^2.

8. $\left[\frac{9(a^3+a^2-a)+a^3+a^2-a}{a^2+a-1}-a^2-2a-16\right]:(a-4).$ **R.** $4-a$.

9. $\left\{\left[\frac{x(1-y+y^2)-1+y-y^2}{1-y+y^2}\right]^2(x+1)\right\}:(x-1)+2(x+1).$ **R.** $(x+1)^2$.

10. $$\left\{\left[\frac{(x^2+4x)^2-4}{x^2+4x+2}+6\right]-xy-2y+x^2+2x\right\}:[2(x+1)-y].$$ **R.** $x+2$.

11. $$\left\{\left[\frac{9a^2-(2a+3b)^2}{5a+3b}(a+3b)\right]^2+18a^2b^2+a^4x^2+81b^4x^2\right\}:(1+x^2).$$ **R.** a^4+81b^4.

12. $$\left\{\left[\frac{(x+3y)^2-4(y-x)^2}{5y-x}-3x^3-x^2y\right]:(1-x)\right\}:(3x+y).$$ **R.** $1+x$.

13. $$\left\{\left\{\left[\frac{a(x-1)^2-x^2+x+ax-a}{a-1}\right]^2+2x^3\right\}\cdot[x^2(x^2-1)]+x^9-x^5\right\}:(x^8-x^4).$$ **R.** $x+1$.

14. $$\left\{\left[\frac{(x+3y)^2-12(xy+3x^2)}{5x+3y}\right]^2-9y^2\right\}:(7x-6y).$$ **R.** $7x$.

15. $$\left\{\left[\frac{(4x^2+8x+4)(2x-2)}{8(x+1)}\right]^2+2x^2\right\}:(x^4+1).$$ **R.** 1.

16. $$\left\{\left[\frac{(4x^2-12xy+9y^2)(2x+3y)}{2x-3y}\right]^2+72x^2y^2-82y^4\right\}:(4x^2+y^2).$$ **R.** $4x^2-y^2$.

17. $$\left\{\left[\frac{(27x^5y^2-36x^4y+12x^3)(3x^2y+2x)}{9x^5y-6x^4}\right]^2+72x^2y^2-17\right\}:(9x^2y^2+1).$$ **R.** $9x^2y^2-1$.

18. $$\left\{\left[\frac{(75x^4y^2-30x^2y+3)(5x^2y+1)}{25x^4y^2-1}\right]^2+90x^2y\right\}:9.$$ **R.** $25x^4y^2+1$.

19. $$\left\{\left[\frac{(98x^5y^2-56x^4y+8x^3)(7x^2y+2x)}{14x^5y-4x^4}\right]^2+392x^2y^2-20\right\}:(49x^2y^2+2).$$ **R.** $49x^2y^2-2$.

20. $$\left\{\left[\frac{(27x^6y^2+36x^5y+12x^4):3x^2}{3x^2y+2x}\right](2x^2y-2x)\right\}^2+72x^6y^2-17x^4.$$ **R.** $81x^8y^4-x^4$.

21. $$\left\{\left[\frac{[(16x^6y^4-8x^4y^3+x^2y^2):x^2y^2](4x^2y+1)}{4x^2y-1}\right]^2-257x^8y^4+32x^4y^2\right\}:(1-x^4y^2)$$ **R.** $1+x^4y^2$.

22. $\left\{\left[\frac{(3x^2-6x+3)(x+1)}{3x-3}\right]^2+2x^2-2\right\}:(x^2+1)-2x+2.$ **R.** $(x-1)^2$.

23. $\frac{[(12x^2y-8)(3x^2y+2):4+4-x^2]^2+18x^6y^2-2x^4}{9x^4y^2-x^2-9x^2y^2+1}\cdot\frac{x^2-1}{x^4}.$ **R.** $9x^2y^2+1$.

24. $\left\{\left[\frac{2(x-y)^2+8y(y-x)}{2x-10y}\right]^3:(x-y)\right\}+2x-2y+1.$ **R.** $(x-y+1)^2$.

25. $E=\left[\frac{x^2(y-1)+2x(1-y)+y-1}{x-1}\right]^2:[(y-1)^2(x-1)]:8.$

Pentru ce valori întregi date lui x, E este un număr întreg?

R. $x=8k+1$; $k\in\mathbb{Z}$.

26. $\frac{6x^2+5xy+y^2}{2x+y}.$ **R.** $3x+y$.

27. $\frac{3-x^2-2x}{x+3}.$ **R.** $1-x$.

28. $\frac{3x^2+2xy-y^2}{3x-y}.$ **R.** $x+y$.

29. $\frac{x^4+2x^3+4x^2+6x+3}{x^5+x^4-9x-9}+\frac{x^2+x}{x^2-3}.$ **R.** $\frac{(x+1)^2}{x^2-3}$.

30. $\frac{x^2+y^2+1-2xy+2x-2y}{x^2-y^2-1+2y}.$ **R.** $\frac{x-y+1}{x+y-1}$.

31. $\frac{a^6+2a^4-2a^5-2a^3+a^2}{a^5-a^4+a^3-a^2}.$ **R.** $(a-1)$.

32. $\frac{a^4-8a^3+13a^2-6a}{(a^2-6a)(a-1)}+a^2-3a+2.$ **R.** $(a-1)^2$.

33. $\left[\frac{x^4+x^2+1}{x^2-x+1}\cdot(x-1)\right]:(x^3-1).$ **R.** 1.

34. $a^2b^2+\frac{a^8-3a^4b^4+b^8}{a^4+a^2b^2-b^4}-a^4.$ **R.** $-b^4$.

35. $\frac{x^2+2ax+a^2-(b+c)^2}{(x+b)^2-(a+c)^2}-1.$ **R.** $\frac{2(a-b)}{x-a+b-c}$.

36. $\dfrac{[(1+x-y-xy-yz+z):(1+x+z)(1+y)]^3-3y^2(y^2-1)}{(1-y)(1+y^2+y)}$. **R.** $1+y^3$.

37. $\left[\dfrac{(x-xy+xy^2-y^2+y-1)(y+1)}{x-1}+3y^2+3y-1\right]:(3+3y+y^2)$. **R.** y.

38. $\left\{\left[\dfrac{2(x-y)^2-5y^2+3xy}{2x-3y}\right]^3-3xy(x+y)\right\}:(x^2+y^2-xy)$. **R.** $x+y$.

39. $\left[\left(\dfrac{3x^6-x^{12}-1}{x^3-x^6+1}-x^3\right):(x^3+1)-3x^2+3x\right]:(1-2x+x^2)$. **R.** $x-1$.

40. $\dfrac{2x^5+4ax^4+2x^3(a^2+b)+4abx^2+2a^2bx}{x^6+ax^5-b^2x^2-b^2ax}:\dfrac{2}{x^2-b}$. **R.** $a+x$.

41. $\left[1+\dfrac{(a^4+a^2b^2+b^4)(a-b)}{a^2+b^2-ab}+b^3\right](a^3-1)-a^6$. **R.** -1.

42. $\dfrac{ax^2+bx^2-bx-ax+cx^2-cx}{a+b+c}+3x+1$. **R.** $(x+1)^2$.

43. $\dfrac{a^2-3ab+ac+2b^2-2bc}{a^2-b^2+2bc-c^2}:(a-2b)$. **R.** $\dfrac{1}{a+b-c}$.

44. $\dfrac{x^4+2x^3+4x^2+6x+3}{x^5+x^4-9x-9}$. **R.** $\dfrac{x+1}{x^2-3}$.

45. $\dfrac{a^3c-2a^2c^2+ac^3-ab^2c}{(a^2+c^2-b^2)^2-4a^2c^2}$. **R.** $\dfrac{ac}{(a+c)^2-b^2}$.

46. Să se aducă expresia la forma cea mai simplă, apoi să se afle pentru ce valoare a lui x expresia are valoarea 3/5.

$$\left\{\left[\left(\frac{x}{x+1}-\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{x^2-1}\right)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)-\frac{2x-2}{x+1}+1\right]-1\right\}:\frac{x+3}{x+1}.$$

R. $\dfrac{1-x}{1+x}$; $\dfrac{1}{4}$.

47. Să se aducă expresia la forma cea mai simplă, apoi să se afle pentru ce valoare a lui x expresia este egală cu 4.

$$\frac{x^4+3x^2+4}{x^2-x+2}+x-1.$$

R. $(x+1)^2$; 1 şi -3.

48. $\dfrac{x^9+x^5+x}{x^5+x^3+x}(x^2+1)$. **R.** x^6+1.

49. $\dfrac{x^4-3x^2y^2+y^4}{x^4-x^2y^2-x^3y+x^2-y^2-xy}$. R. $\dfrac{x^2-y^2+xy}{x^2+1}$.

50. $\dfrac{x^3-8-6x^2+12x}{x^2-4x+4}(x+2)$. R. x^2-4.

51. $\dfrac{a^2+1+b^2-2ab+2a-2b}{a^2-1-b^2+2b}:\dfrac{(a-b+1)^2}{-a+b-1}$. R. $\dfrac{-1}{a+b-1}$.

52. $\left\{\left[\left(\dfrac{6a^4-5a^3x+a^2(6a-5x)}{6(a^3x+a^2x)-6a^2-6a}\cdot\dfrac{6}{a}\cdot\dfrac{ax-1}{6a-5x}\right)-3x\right]^3+9x-27x^2\right\}:(1+3x+9x^2)$. R. $1-3x$.

53. Să se figureze în raport cu două axe ortogonale punctele următoare: $A(3,2)$; $B(3,1)$; $C(-1,2)$; $D(5,3)$; $M(5,0)$; $N(-5,0)$; $P(0,-4)$; $Q(0,3)$; $O(0,0)$; $L(-3,-2)$; $E(4,4)$; $G(-6,6)$.

54. Se consideră punctele $A(3,4)$, $B(1,0)$, $C(-3,-4)$, $D(0,-2)$, $E(-1,0)$. Să se figureze aceste puncte şi simetricele lor în raport cu axa xx', cu axa yy' şi în raport cu originea.

55. Să se calculeze distanţa de la origine pînă la punctul $M(3,4)$.

56. Să se figureze, prin diagrame, funcţiile definite pe E cu valori în F:

a) $E=\{a,b,c\}$, $F=\{1,5\}$;
b) $E=\{1,3,4,8\}$, $F=\{1,3,4,8\}$;
c) $E=\{m,n\}$, $F=\{x,y,z,t\}$.

57. Care dintre punctele mulţimii: $M=\{(1,5);\ (0,1);\ (-2,-4);\ (-1,6)\}$ se află pe dreapta $y=3x+2$.

58. Se dă $f(x)=-2x+5$. Determinaţi coordonatele a trei puncte pe dreapta dată.

59. Se consideră următoarele puncte într–un sistem de axa ortogonale: $A(3,0)$, $B(1,5)$, $C(0,6)$, $D(-4,-1)$. Care dintre ele aparţin dreptei reprezentate prin funcţia

$$f(x)=-x+6?$$

60. Să se reprezinte grafic:
$y=x+1$; $y=3+x$; $x=y+3$; $y=2x-3$; $x+y=6$; $y=\frac{1}{2}x+3$; $y=x-1$;
$y=\frac{3}{5}x-\frac{3}{8}$; $y=-2x+1$; $y=0{,}7x+2$; $x-y=6$.

61. Să se construiască dreptele:
$3x+y=0$; $y=\frac{1}{2}x-2$; $y=\frac{1}{2}x-1$; $y=\frac{1}{2}x+1$; $y=\frac{1}{2}x+2$; $x+y+3=0$; $4x+3y=18$.

62. Să se verifice pe cale grafică dacă dreptele ce au ecuaţiile: $5x-y=7$, $x-4y+10=0$, $2x+3y=13$ sînt concurente.

63. Fie f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ prin relaţia $f(x)=ax+b$. Să se determine a şi b, ştiind că punctele $A(2,7)$ şi $B(1,5)$ aparţin graficului funcţiei $f(x)$.

R. $a=2$, $b=3$.

64. Se consideră funcția f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ dată prin $f(x)=ax+b$, a, $b\in\mathbf{R}$.

1) Să se determine a și b astfel că: $f(1)=2$ și $f(-1)=6$.

2) Să se reprezinte grafic funcția f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ dată prin $f(x)=-2x+4$.

R. 1) $a=-2$; $b=4$.

65. Se consideră funcția f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ dată prin $f(x)=-2x+4$. Care sînt valorile lui x pentru care $f(x)$ aparține intervalului $(4,6)$.

R. $-1<x<0$.

66. Să se afle punctele de intersecție cu axele de coordonate ale dreptei ce trece prin punctele $A(2,3)$ și $B(-1,-3)$.

R. $(0,-1)$, $(\frac{1}{2}, 0)$

67. Se consideră funcția f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ unde $f(x)=ax+b$; a, $b\in\mathbf{R}$. Se cere să se determine a și b astfel ca $f(1)=1$, $f(-2)=7$.

R. $a=-2$, $b=3$.

68. Folosind tabelul de variație, să se studieze monotonia funcției $y=2x-4$, apoi să se afle valorile funcției la extremitățile intervalului $[-1,3]$.

R. (funcția este strict crescătoare) -6; 2.

69. Să se studieze semnul funcției $y=-3x+1$, folosind tabelul de variație. Același lucru pentru $f(x)=5x-6$.

70. Să se determine a și b din $f(x)=ax-b$, știind că dreapta corespunzătoare are ordonata la origine de 2 unități și măsura unghiului pe care îl face cu xx' este de 30°. Aceeași întrebare dacă unghiul are măsurile de: 45°; 60°; 0°.

R. Pentru 30°: $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $b=2$; pentru 45°: $a=1$, $b=2$; pentru 60°: $a=\sqrt{3}$, $b=2$; pentru 0°: $a=0$, $b=2$.

71. Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, de forma $f(x)=\frac{1}{5-x}$. a) Este această exprimare corectă? b) Să se studieze monotonia acestei funcții pentru $x\in\{1, 2, 3, 4\}$ și $x\in\{8, 9, 10\}$.

72. Fie funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, de forma $f(x)=\frac{8x-2}{4x+1}$. a) Este această exprimare corectă ? b) Pentru ce valori reale ale lui x, $f(x)$ devine 0 ? c) Pentru ce valori reale ale lui x, $f(x)\in\mathbf{Z}$?

R. b) $x=\frac{1}{4}$, c) $x=\left\{-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right\}$.

73. Se consideră $f(x)=\frac{3}{4x^{2}-9}$. a) Să se afle domeniul de definiție al acestei funcții. b) Pentru ce valoare a variabilei x funcția $f(x)$ devine zero ?

R. a) $E=\mathbf{R}\setminus\left\{\pm\frac{3}{2}\right\}$; b) $\emptyset$.

74. In tabelul următor se află corespondența dintre două valori ale lui x și două valori ale lui y printr-o funcție $f(x)=ax+b$. 1) Să se determine $f(x)$. 2) Să se completeze tabelul.

x	-2	0	1	4	5
y	-11	-5			

R. $f(x)=3x-5$.

75. Se consideră $f(x)=ax-3$, $(a\in\mathbb{R})$. a) Să se arate că dreapta corespunzătoare lui $f(x)$ trece prin punctul $(0,-3)$, oricare ar fi a. b) Pentru ce valori ale lui a dreapta trece prin punctul $(1,8)$?

R. b) $a=11$

76. Intr–un triunghi dreptunghic ABC cu ipotenuza $BC=12$ cm se duc paralele cu ipotenuza la distanțe de cîte 1 cm. Să se înscrie într–un tabel corespondența dintre distanțele variabile și lungimile paralelelor (mărginite la catetele triunghiului dreptunghic).

77. Să se reprezinte grafic variația lungimii unui cerc în funcție de raza cercului ($\pi=3,14$), luînd pentru R valorile 1, 2, 3, 4, 5, cm.

78. Un dreptunghi are baza de 3 m și înălțimea variabilă. Să se reprezinte grafic variația ariei dreptunghiului în funcție de înălțime.

79. Un pieton a plecat din oraș la ora 12 și a mers cu o viteză constantă de 3 km pe oră. La ora 14 pleacă pe același drum un alt pieton care merge cu o viteză de 4,5 km pe oră. La ce oră și la ce distanță de oraș ajunge al doilea pieton pe cel dintîi? (Soluție grafică.)

80. Un triunghi ABC are vîrfurile în punctele $A(2,0)$, $B(6,0)$, $C(x,5)$. Știind că $0\le x\le 6$ și $x\in\mathbb{Z}$, să se studieze: a) variația înălțimii triunghiului dusă din vîrful C; b) variația ariei triunghiului ABC (unitățile în cm).

R. a) $h=5$ cm (constantă); b) $A=10$ cm^2.

81. Intr–un sistem de axe rectangulare se consideră punctele: $M(x+1,0)$, $N(x+4,0)$, $P(2,4)$. Dacă $x\in[0,3]$ și $x\in\mathbb{N}$, să se afle: a) cum variază baza triunghiului MNP; b) care este variația înălțimii duse din vîrful P al triunghiului; c) care este variația ariei acestui triunghi (dimensiunile în dm).

R. a) baza triunghiului $=3$ dm (constantă); b) înălțimea triunghiului $=4$ dm (constantă); c) Aria $=6$ dm^2 (constantă).

Ecuații de gradul I cu o necunoscută

Să se rezolve următoarele ecuații de gr.I sau care conduc la ecuații de gr.I.

82 $\dfrac{1}{x^2+2x+1}+\dfrac{4}{x+2x^2+x^3}=\dfrac{5}{2x+2x^2}$. R. $x=1$.

83. $\dfrac{7}{x^2-1}+\dfrac{8}{x^2-2x+1}=\dfrac{37-9x}{x^3-x^2-x+1}$. R. $x=1\frac{1}{2}$.

84. $(x-1)(x-2)=(x-3)(x-4)$ R. $x=2\frac{1}{2}$.

85. $\dfrac{x-\dfrac{1}{0,3}}{2+\dfrac{1}{0,5}}-\dfrac{1-x}{3+\dfrac{1}{5}}=\dfrac{3-\dfrac{x}{0,2}}{0,6}+7\dfrac{19}{96}$. R. $x=1\frac{1}{2}$.

86. $\dfrac{x-3}{2}-\dfrac{2(1-3x)}{0,2}+1=\dfrac{3\left(1-\dfrac{x}{2}\right)}{2}-7$. R. $x=\frac{4}{23}$.

87. $x+\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{2(x+1)}{3}+\dfrac{4(x+2)}{5}\right]=\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{2}{3}\left[\dfrac{3(x-1)}{4}-\dfrac{6(x-1)}{5}\right]$. R. $x=-\frac{20}{23}$.

88. $\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\right)-1\right]-1\right\}-1=0.$ R. $x=30.$

89. $\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-1\frac{1}{2}\right)-1\frac{1}{2}\right]-1\frac{1}{2}\right\}-1\frac{1}{2}=0.$ R. $x=45.$

90. $\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-2\frac{1}{2}\right)-2\frac{1}{2}\right]-2\frac{1}{2}\right\}-2\frac{1}{2}=0.$ R. $x=75.$

91. $\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x+2\right)+2\right]+2\right\}-1=0.$ R. $x=3.$

Să se rezolve ecuaţiile următoare în care necunoscuta este x

92. $\frac{16a^2x^2-48ax+36}{8ax-12}-\frac{ax-5}{5}-\frac{3ax}{2}-\frac{3ax}{10}=2-x.$ R. $x=4.$

93. $\frac{36-x^2}{x+6}-\frac{12x^2+36x+27}{3(2x+3)}=\frac{2x-1}{5}.$ R. $x=\frac{16}{17}.$

94. $\left(\frac{a^2+x^2}{2ax}-1\right):(a-x)=\frac{1}{2x}-\frac{2}{a}+\frac{1}{ax}.$ R. $x=\frac{2}{3}.$

95. $\left(\frac{x^2+b^2}{2bx}-1\right):(x-b)=\frac{1}{2b}-\frac{1}{2x}+\frac{4}{2bx}-\frac{4}{2ab}-\frac{4a-8}{2abx}$ R. $x=2.$

96. $\frac{1-36x^2}{6x+1}\cdot\frac{1-6x}{0,25(4x^2-16)}:\frac{1-12x+36x^2}{x-2}=1.$ R. $x=-1.$

97. $\frac{108-3x^2}{18+3x}-\frac{12x^2+36x+27}{12x+18}=\frac{2x+3}{2}.$ R. $x=1.$

98. $\frac{x^2+2ax}{x^3-a^3}+\frac{x}{(x+a)^2-ax}=\frac{1}{x-a},\ x\neq a.$ R. $x=-a.$

99. **Să se rezolve ecuaţia în care necunoscuta este a.**

$\frac{4a^2-1}{1+2a}+\frac{a^2+9+6a}{(3+a)^2}=8.$ R. $a=4.$

100. $\frac{x^3+x^2+x+1}{x+1}-\frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}=\frac{1,5x-2}{x^2-1}.$ R. $x=1\frac{1}{3}.$

101. $-4x-\{5x-[6x-(7x-(8x-9))]\}=-10.$ R. $x=\frac{1}{2}.$

102. $\frac{2x^2+2x+1}{(x+1)(x+2)}+\frac{2x^2+2x+3}{(x+1)(x+3)}=\frac{2x^2+2}{(x+2)(x+3)}+2.$ **R.** $x=-\frac{1}{2}.$

103. $\frac{1}{9}\left\{\frac{1}{7}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}(x+2)+4\right)+6\right]+8\right\}=1.$ **R.** $x=1.$

104. $\frac{3x}{a^2+4n(a+n)}-\frac{2(a-n)x-a^2+4n^2}{a^3+4a^2n+4an^2}=\frac{1}{a}.$ **R.** $x=4n.$

105. $\frac{x+a}{a-b}+\frac{x-a}{a+b}=\frac{x+b}{a+b}+\frac{2(x-b)}{a-b}.$ **R.** $x=3b.$

106. $\frac{x-a}{x+b}=\frac{x-2a-b}{x+a+2b}.$ **R.** $x=\frac{a-b}{2}.$

107. $(a+b+c)x-\frac{a^2+b^2}{a-b}=\frac{2abx}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}c.$ **R.** $x=\frac{a+b}{a-b}.$

108. $\frac{3abc}{a+b}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}+\frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}=3cx+\frac{bx}{a}.$ **R.** $x=\frac{ab}{a+b}.$

109. $x\left(\frac{x-2a}{x+a}\right)^3+a\left(\frac{2x-a}{x+a}\right)^3=x^2-a^2.$ **R.** $x=1-a.$

110. $\frac{(a-x)^2+(x-b)^2}{(a-x)^2-(x-b)^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$ **R.** $x=\frac{2ab}{a+b}.$

111. $\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}=\frac{a(x-b^2)+b(a^2-x)}{a(x-b^2)-b(a^2-x)}.$ **R.** $x=a^2+b^2.$

112. $\frac{a^2-x}{x-2a}=\frac{2a+x}{a^2-x}+\frac{a^4}{a^2x+2ax-2a^3-x^2}.$ **R.** $x=2.$

113. $\frac{a^2+x}{b^2-x}-\frac{a^2-x}{b^2+x}=\frac{4abx+2a^2-2b^2}{b^4-x^2}.$ **R.** $x=\frac{a+b}{a-b}.$

114. $\frac{a^2+ax+x^2}{a^3+a^2x+ax^2+x^3}-\frac{a^2-a^2x-ax^2-x^3}{a^4-x^4}=\frac{1}{a-x}.$

R. Nu are soluţie în R, dar are în C, $x_1=a+\frac{a\sqrt{-3}}{2}, x_2=a-\frac{a\sqrt{-3}}{2}.$

115. $\frac{2(x-a)}{a^2-c^2-2ax+x^2}+\frac{c-x}{a^2-ac+cx-2ax+x^2}=\frac{1}{x-a}$. R. $x=\frac{a(a-c)}{a-2c}$.

Să se verifice identităţile:

116. $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=ab$.

117. $\pi h\left(\frac{R+r}{2}\right)^2+\frac{\pi h}{3}\left(\frac{R-r}{2}\right)^2=\frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr)$.

118. $(a+b+c)^2+(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=3(a^2+b^2+c^2)$.

119. $\left(\frac{m^2-1}{m^2+1}\right)^2+\left(\frac{2m}{m^2+1}\right)^2=1$.

120. $\frac{1-ax+(a+x)x}{2ax-a^2x^2-1}:\left[1+\frac{a^2+2ax+x^2}{(1-ax)^2}\right]=-\frac{1}{1+a^2}$.

Indicaţie. Avem succesiv: $\frac{1-ax+ax+x^2}{-(a^2x^2-2ax+1)}:\frac{1-2ax+a^2x^2+a^2+2ax+x^2}{(1-ax)^2}=-\frac{1}{1+a^2}$.

121. $x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x+1)^2$.

122. $(1+y+y^2+y^3)^2=1+2y+3y^2+4y^3+3y^4+2y^5+y^6$.

Inegalităţi şi inecuaţii

123. O brigadă de tractorişti trebuie să are cîte 50 ha pe zi. Cu cît trebuie să-şi mărească norma zilnică pentru a ara în trei zile mai mult de 210 ha ?

Rezolvare. Dacă notăm cu x creşterea zilnică a normei, în cele trei zile brigada va ara $3(50+x)$ ha şi trebuie ca $3(50+x)>210$. Rezolvăm inecuaţia. Impărţim ambii membrii cu 3 şi găsim:

$50+x>70$, de unde $x>70-50$; $x>20$.

Brigada va trebui să are zilnic cu mai mult de 20 ha peste normă.

Exerciţii cu inegalităţi

124. Să se adune inegalităţile următoare:

$5>-3$; $8>5$.

$2<5; -7<-3.$ **R.** $-5<2.$

$x^2>a+1; 2x>a-5.$ **R.** $x^2+2x>2a-4.$

$3x+y<2a+1; 3y-2x<14-2a.$ **R.** $4y+x<15.$

125. In exemplele următoare, să se scadă inegalitatea a doua din prima:

$16>13; 2<5.$ **R.** $14>0.$

$-8<-5;\quad -2>-7.$ **R.** $-6<2.$

$2x>b^2; a^2<9-x.$ **R.** $x-a^2>b^2-9.$

$(a-b)^2<2;\quad (a+b)^2>8.$ **R.** $2ab>3.$

126. Să se înmulţească ambii membrii ai inegalităţilor următoare cu factorul indicat:

$5>-2$ cu 5. **R.** $25>-10.$

$-7<-5$ cu -2. **R.** $14>10.$

$a^2>b$ cu $-b$. **R.** Dacă $b>0, -a^2b<-b^2$.
Dacă $b<0, -a^2b>-b^2$.

$a-1<b$ cu $-m$. **R.** Dacă $m>0, m-ma>-mb$.
Dacă $m<0, m-ma<-mb$.

127. Să se împartă ambii membrii ai inegalităţilor următoare cu numărul indicat:

$-6<9$ cu 3. **R.** $-2<3.$

$-15>-35$ cu -5. **R.** $3<7.$

$a^3<a^2$ cu $-a$. **R.** Dacă $0<a<1, -a^2>-a$.
Dacă $a<0, -a^2<-a$.

$(a-b)^3>(a-b)^2$ cu $(a-b)$. **R.** Dacă $a-b>1,\ (a-b)^2>a-b$.

Să se rezolve inecuaţiile următoare:

128. $x+4>2-3x.$ **R.** $x>-\frac{1}{2}$ sau $x\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right).$

129. $4(x-1)>2+7x.$ **R.** $x<-2$ sau $x\in(-\infty,-2).$

130. $\frac{3x}{2}-\frac{3}{5}\le 4x-3.$ **R.** $x\ge\frac{24}{25}$ sau $x\in\left[\frac{24}{25},+\infty\right).$

131. $\frac{37-2t}{3}+9<\frac{3t-8}{4}-t.$ **R.** $t>56$ sau $t\in(56,+\infty).$

132. $(x-1)^2+7>(x+4)^2.$ **R.** $x<-\frac{4}{5}$ sau $x\in\left(-\infty,-\frac{4}{5}\right).$

133. $\frac{7-6x}{2}+12\le\frac{8x+1}{3}-10x.$ **R.** $x\le-3,5$ sau $x\in(-\infty,\ -3,5].$

134. $\frac{y-2}{2} \geq \frac{1-3y}{3}$. R. $y \geq \frac{8}{9}$ sau $y \in \left[\frac{8}{9}, +\infty\right)$.

135. $\frac{7x+5}{3} > 4x + \frac{1}{5}$. R. $x < \frac{22}{25}$ sau $x \in \left(-\infty, \frac{22}{25}\right)$.

136. $\frac{z}{8} + \frac{1}{2} \geq \frac{5(z+4)}{8}$. R. $z \leq -4$ sau $z \in (-\infty, -4]$.

137. $\frac{x}{3} - 2 \geq \frac{3-5x}{4} + 2$. R. $x \geq 3$ sau $x \in [3, +\infty)$.

138. $(3a-8)(5-a) > 0$. R. $2\frac{2}{3} < a < 5$ sau $a \in \left(2\frac{2}{3}, 5\right)$.

139. $(2-3a)(2a+7) > 0$. R. $-\frac{7}{2} < a < \frac{2}{3}$ sau $a \in \left(-\frac{7}{2}, \frac{2}{3}\right)$.

Să se afle valorile lui $y \in \mathbf{Z}$ care fac fracția pozitivă :

140. $\frac{3y-7}{2-5y}$. R. Soluțiile sînt 1 și 2.

Să se afle pentru ce valori ale lui a fracțiile următoare sînt negative (soluția grafică):

141. $\frac{8-3a}{7a-2}$. R. $a < \frac{2}{7}$ și $a > \frac{8}{3}$ sau $a \in \left(-\infty, \frac{7}{2}\right) \cup \left(\frac{8}{3}, +\infty\right)$.

142. $\frac{5a+8}{3a-7}$. R. $-1\frac{3}{5} < a < 2\frac{1}{3}$ sau $a \in \left(-1\frac{3}{5}, 2\frac{1}{3}\right)$.

143. Pornind de la inegalitatea $(a-b)^2 > 0$, să se demonstreze că suma pătratelor a două numere neegale este totdeauna mai mare decît dublul produsului acelorași numere.

144. Să se arate că într-un triunghi oarecare jumătatea perimetrului este mai mare decît orice latură.

Indicație. a, b și c fiind laturile unui triunghi, se folosește relația $a < b+c$ și se ține seama că se poate aduna a în ambii membrii ai inegalității.

145. Să se arate că în orice triunghi dreptunghic cu catetele neegale înălțimea coborîtă pe ipotenuză este mai mică decît jumătate din ipotenuză.

146. Intr-un vas sînt 4 l de apă cu temperatura de 13°C. Pînă la ce temperatură t trebuie să încălzim 5 l de apă pentru ca, prin amestecul cu apa din primul vas, să obținem apă cu o temperatură de cel puțin 25°C și cel mult 30°C ?

R. $34{,}6^{\circ} < t < 43{,}6^{\circ}$ sau $t \in (34{,}6^{\circ}; 43{,}6^{\circ})$.

147. Să se arate pentru ce valori ale lui $x \in \mathbf{N}$ expresiile următoare sînt: pozitive, negative, n-au sens.

$$\frac{3}{x+4};\ \frac{x+8}{8};\ \frac{-6}{x+5};\ \frac{2x-4}{-9};\ \frac{-(x+4)}{-8}.$$

Sisteme de ecuații de gradul întîi cu două sau trei necunoscute

Să se rezolve următoarele sisteme de două ecuații cu două necunoscute:

148. $\begin{cases} 2(x+1)=3(y-1)+14 \\ 4x-3(2x+y-1)=2(-x+y)+8 \end{cases}$ **R.** (3;-1).

149. $\begin{cases} 2(x+2y)-3(x+3y)=5 \\ x=1-2y \end{cases}$ **R.** (5;-2).

150. $\begin{cases} 4(0,1x+1)+5=1,1y \\ \dfrac{11+0,3y-x}{5}-5=4\left(\dfrac{1}{5}-1\right) \end{cases}$ **R.** (5;10).

151. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y+2}=5 \\ 3(2x-5)-4(3y+4)=5 \end{cases}$ **R.** (4;-1).

152. $\begin{cases} \dfrac{2x+3}{3y-2}=1 \\ x(2y-5)-2y(x+3)=2x+1 \end{cases}$ **R.** (-1;1).

153. $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3}-\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{2(x-y)}{5} \\ \dfrac{x-3}{4}-\dfrac{y-3}{3}=2y-x \end{cases}$ **R.** (11;6).

Să se rezolve cu ajutorul proporțiilor derivate următoarele sisteme:

154. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{4} \\ y-x=7,2 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{4} \\ 2x+3y=246 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{2,25} \\ x+4y=14 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=8 \\ x-y=1 \end{cases}$;

Să se rezolve grafic sistemele:

155. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=1 \\ \dfrac{2x-1}{2}-\dfrac{3y-1}{3}=\dfrac{5}{6} \end{cases}$ **R.** (4;3).

156. $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{5}+3y-4=15 \\ \dfrac{3y-5}{6}+2x-8=\dfrac{23}{3} \end{cases}$ **R.** (7;5).

157. $\begin{cases} 2x+y=-\dfrac{2a}{3} \\ x-\dfrac{y}{2}=-\dfrac{2a}{3} \end{cases}$ **R.** $\left(-\frac{a}{2};\ \frac{a}{3}\right)$.

158. $\begin{cases} 2x+y+2=0 \\ \dfrac{(x-3)^2}{2}=10+\dfrac{(1-x)^2}{2}-y \end{cases}$ **R.** (–2;2).

Să se rezolve următoarele sisteme de ecuaţii în care *a* şi *b* sînt numere date:

159. $\begin{cases} \dfrac{x-a}{b}+\dfrac{y-b}{a}=0 \\ \dfrac{x+y-b}{a}+\dfrac{x-y-a}{b}=0 \end{cases}$ **R.** $(a;b)$.

160. $\begin{cases} (a+b)x-(a-b)y=4ab \\ (a-b)x+(a+b)y=2a^2-2b^2 \end{cases}$ **R.** $(a+b)$; $(a-b)$.

161. $\begin{cases} \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=2a \\ \dfrac{x-y}{2ab}=\dfrac{x+y}{a^2+b^2} \end{cases}$ **R.** $(a+b)^2$; $(a-b)^2$.

162. $\begin{cases} (a+b)x+(a-b)y=2ab \\ (a+c)x+(a-c)y=2ac \end{cases}$ **R.** $(a;-a)$.

163. $\begin{cases} (a+2b)x-(a-2b)y=6ac \\ (a+3c)y-(a-3c)x=4ab \end{cases}$ **R.** $(a-2b+3c)$; $(a+2b-3c)$.

164. $\begin{cases} \dfrac{x+a}{y-b}=\dfrac{2a+b}{a-2b} \\ \dfrac{x+5-y}{y-x+3}=\dfrac{2b+5}{3-2b} \end{cases}$ **R.** $(a+b)$; $(a-b)$.

165. $\begin{cases} \dfrac{a-x}{b}-\dfrac{b-y}{a}=\dfrac{a^2-b^2}{ab} \\ \dfrac{a-x}{b}+\dfrac{b-y}{a}=\dfrac{(a-b)^2}{ab} \end{cases}$ **R.** $(b;a)$.

166. $\begin{cases} \dfrac{a^2-b^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}=a \\ \dfrac{a+b}{x}+\dfrac{b}{y}=2 \end{cases}$ **R.** $(a+b;b)$.

167. $\begin{cases} ax+by=2(a^2-b^2) \\ \dfrac{y}{a-b}-\dfrac{x}{a+b}=\dfrac{a^2+b^2}{ab} \end{cases}$ **R.** $\dfrac{a^2-b^2}{a}$; $\dfrac{a^2-b^2}{b}$.

168. $\begin{cases} \dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{y+b}=\dfrac{a+b}{ab} \\ \dfrac{a}{x-a}-\dfrac{b}{y+b}=\dfrac{a^2-b^2}{ab} \end{cases}$ **R.** $(a+b)$; $(a-b)$.

Indicație. Se vor lua ca necunoscute $\dfrac{1}{x-a}$ și $\dfrac{1}{y+b}$.

169. $\begin{cases} x-a(1-y)=0 \\ a(x-a)+y=\dfrac{1}{a} \end{cases}$ **R.** $\left(\dfrac{a^3-a+1}{a^2-1};\ \dfrac{1}{a(1-a^2)}\right)$.

170. $\begin{cases} a\left(x-\dfrac{1}{b}\right)=b\left(y+\dfrac{1}{a}\right) \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2} \end{cases}$ **R.** $\left(\dfrac{a+b}{ab};\ \dfrac{a-b}{ab}\right)$.

171. $\begin{cases} \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=a+b \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2a \end{cases}$ **R.** $a(a+b)$; $b(a-b)$.

172. $\begin{cases} \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=\dfrac{1}{a-b} \\ \dfrac{x}{a+b}-\dfrac{y}{a-b}=\dfrac{1}{a+b} \end{cases}$ **R.** $\dfrac{a}{a-b}$; $\dfrac{b}{a+b}$.

Indicație. Luăm ca necunoscute $\dfrac{x}{a+b}$ și $\dfrac{y}{a-b}$.

173. $\begin{cases} \dfrac{x}{a-b}+\dfrac{y}{a}=a \\ \dfrac{x}{b}-\dfrac{y}{a-b}=-b \end{cases}$ **R.** $b(a-b)$; $a(a-b)$.

174. $\begin{cases} \dfrac{x}{a-b}+\dfrac{y}{a+b}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \\ \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=1 \end{cases}$ **R.** $\dfrac{a+b}{2}$; $\dfrac{a-b}{2}$.

175. $\begin{cases} \dfrac{x}{2a-b}-\dfrac{y}{2a+b}=\dfrac{8ab}{4a^2-b^2} \\ \dfrac{x}{2a-b}+\dfrac{y}{2a+b}=\dfrac{8a^2+2b^2}{4a^2-b^2} \end{cases}$ **R.** $2a+b$; $2a-b$.

Indicație. Se vor lua ca necunoscute $\dfrac{x}{2a-b}$ și $\dfrac{y}{2a+b}$.

Să se rezolve prin metoda reducerii

176. $\begin{cases} 2x+3y+4z=61 \\ 3x+2y+z=54 \\ 5x-4y+3z=44 \end{cases}$ **R.** (12,7;4).

Să se rezolve prin metoda substituției

177. $\begin{cases} 5x-3y+2z=-7 \\ 7x+5y-4z=-5 \\ x+y-z=-1 \end{cases}$ **R.** (–1;2;2).

Să se rezolve sistemele următoare

178. $\begin{cases} 2x-3z-4y=-1 \\ 3y+z-x=6 \\ 5z-3x+2y=-13 \end{cases}$ **R.** (–2;3–5).

179. $\begin{cases} x+y-z=-6 \\ z-3x+2y=1 \\ 3y+2z-x=-5 \end{cases}$ **R.** (–2;–3;1).

180. $\begin{cases} x-y+2z=6 \\ z-y-2x=-\dfrac{1}{2} \\ 2x+3y-z=-\dfrac{11}{2} \end{cases}$ **R.** $\left(2;-3;\ \dfrac{1}{2}\right)$.

181. $\begin{cases} x-y+z=7 \\ x+y-z=1 \\ y+z-x=3 \end{cases}$ **R.** (2;4;5).

182. $\begin{cases} 2x+5y+4z=17 \\ 3x+2y-z=2 \\ 5x+3y-2z=2 \end{cases}$ **R.** (–1;3;1).

183. $\begin{cases} x+y-6z=9 \\ x-y+4z=5 \\ 3y-2x-z=4 \end{cases}$ **R.** (8;7:1).

184. $\begin{cases} 2x+3y-z=13 \\ 3x+2y-2z=13 \\ 5x-4y-2z=11 \end{cases}$ **R.** (5;2;3).

185. $\begin{cases} 4x-3y+2z=28 \\ 3x+2y-5z=16 \\ 2x+y-3z=10 \end{cases}$ **R.** (10;8;6).

186. $\begin{cases} 2x+3y+4z=53 \\ 3x+5y-4z=2 \\ 4x+7y-2z=31 \end{cases}$ **R.** (3;5;8).

187. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=8 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=13 \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=11 \end{cases}$ **R.** $\left(\frac{1}{5};\frac{1}{3};\frac{1}{8}\right)$.

188. $\begin{cases} \frac{xy}{x+y}=\frac{1}{5} \\ \frac{xz}{x+z}=\frac{1}{6} \\ \frac{yz}{y+z}=\frac{1}{7} \end{cases}$ **R.** $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right)$.

189. $\begin{cases} x+y+z=99 \\ \frac{x}{y}=\frac{5}{3} \\ \frac{y}{z}=\frac{3}{1} \end{cases}$ **R.** (55;33;11).

190. $\begin{cases} \frac{1}{x+y}=1 \\ \frac{2}{x+z}=1 \\ \frac{3}{x+y}=1 \end{cases}$ **R.** (0;1;2).

191. $\begin{cases} \frac{3x+y}{z+1}=2 \\ \frac{3y+z}{x+1}=2 \\ \frac{3z+x}{y+1}=2 \end{cases}$ **R.** (1;1;1).

192. $\begin{cases} \frac{xy}{4y-3x}=20 \\ \frac{xz}{2x-3z}=15 \\ \frac{yz}{4y-5z}=12 \end{cases}$ **R.** (5;4;3).

193. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{20} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{15} \end{cases}$ **R.** (20;80;60).

Indicaţie. Se foloseşte substituţia $\frac{1}{x}=u$; $\frac{1}{y}=v$; $\frac{1}{z}=t$.

194. $\begin{cases} \frac{x}{6}=\frac{y}{3}=\frac{z}{18} \\ 3x+5y+z=34 \end{cases}$ **R.** (4;2;12).

Indicaţie. Se amplifică primul raport cu 3, al doilea cu 5 şi se aplică apoi proprietatea şirului de rapoarte egale.

195. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{32}{15} \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{17}{15} \end{cases}$ **R.** $\left(\dfrac{3}{4};\ 3;\ 1\dfrac{1}{4}\right)$

196. $\begin{cases} 2x+\dfrac{3}{y}-\dfrac{4}{z}=4 \\ \dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=\dfrac{17}{12} \\ x+\dfrac{4}{y}=\dfrac{10}{3} \end{cases}$ **R.** $(2;3;4)$.

197. $\begin{cases} (x+2)(2y+1)=(2x+7)y \\ (x-2)(3z+1)=(x+3)(3z-1) \\ (y+1)(z+2)=(y+3)(z+1) \end{cases}$ **R.** $(7;3;1)$.

Să se determine x, y şi z din sistemele:

198. $\begin{cases} x+y-z=a \\ x+z-y=b \\ y+z-x=c \end{cases}$ **R.** $\left(\dfrac{1}{2}(a+b);\ \dfrac{1}{2}(c+a);\ \dfrac{1}{2}(b+c)\right)$

199. $\begin{cases} ax+by-bz=c \\ ay+bx-bz=c \\ az+by-bx=c \end{cases}$ **R.** $\left(\dfrac{c}{a};\ \dfrac{c}{a};\ \dfrac{c}{a}\right)$.

200. $\begin{cases} x-3y+z=b \\ x-y+3z=c \\ 3x-y+z=a \end{cases}$ **R.** $\left(\dfrac{4a-b-c}{10};\ \dfrac{-4b+c+a}{10};\ \dfrac{4c-a-b}{10}\right)$.

201. $\begin{cases} ax+by-cz=2ab \\ by+cz-ax=2bc \\ cz+ax-by=2ac \end{cases}$ **R.** $(b+c;\ c+a;\ a+b)$.

202. $\begin{cases} ax+by-cz=b^2 \\ bx-cy+az=a^2 \\ cx+ay-bz=c^2 \end{cases}$ **R.** $(c;\ b;\ a)$.

203. $\begin{cases} a^2x+b^2y+c^2z=3abc \\ abx-bcy=b^2c-ac^2 \\ bcy-acz=ac^2-a^2b \end{cases}$ R. $\left(\frac{bc}{a}; \frac{ca}{b}; \frac{ab}{c}\right)$.

204. $\begin{cases} ax+by=a^2+b(a+c) \\ ay-cz=0 \\ z-x=-b \end{cases}$ R. $(a+b; c; a)$.

205. $\begin{cases} \frac{x-2(z-1)}{(a+b)^2}=\frac{1}{ab} \\ x-y+z=5 \\ \frac{a}{b}-\frac{1}{2}(x+y)+\frac{b}{a}=0 \end{cases}$ R. $\left(\frac{(a+b)^2}{ab}; \frac{(a-b)^2}{ab}; 1\right)$.

Sisteme de inecuații de gradul I

Să se rezolve următoarele sisteme de inecuații de gradul I:

206. $\begin{cases} \frac{x+0,5}{9}+\frac{1}{2}<3x+1 \\ 12x-1>10x+3 \end{cases}$ R. $x>2$ sau $x\in(2,+\infty)$.

207. $\begin{cases} \frac{1+x}{\frac{1}{2}}<\frac{x}{3}+1 \\ \frac{3x+2}{2}\le\frac{2x+1}{4}+\frac{3}{2} \end{cases}$ R. $x<-\frac{3}{5}$ sau $x\in\left(-\infty, -\frac{3}{5}\right)$.

208. $\begin{cases} \frac{2x-1}{5}\ge\frac{x+1}{2}-\frac{23}{5} \\ \frac{3x+2}{7}<\frac{x}{3,5}+6 \end{cases}$ R. $x\le 39$ sau $x\in(-\infty,39]$.

209. $\begin{cases} \frac{3-x}{2}<\frac{x}{5} \\ 4x<3x+1 \end{cases}$ R. Nu are soluții.

210. $\begin{cases} 5a-3>1+a \\ \frac{1}{2}-3a\le\frac{2}{3}a-5 \end{cases}$ R. $a\ge\frac{3}{2}$ sau $a\in\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

211. $\begin{cases} 2(x-3)-1<5 \\ \frac{3x}{8}-7>\frac{x}{12} \end{cases}$ **R.** Nu are soluţii.

Să se rezolve următoarele inecuaţii simultane cu metoda grafică:

212. $\begin{cases} 2x>4x+6 \\ 4x+3>5x+1 \end{cases}$ **R.** $x<-3$ sau $x\in(-\infty,-3)$.

213. $\begin{cases} 5x-3>1+x \\ 0,5-3x\leq\frac{2}{3}x-5 \end{cases}$ **R.** $x\geq 1,5$ sau $x\in[1,5,+\infty)$.

214. $\begin{cases} 4x+7>2x+13 \\ 3x-18\leq 2x+1 \end{cases}$ **R.** $3<x\leq 19$ sau $x\in(3,19]$.

215. $\begin{cases} 6x-7>5x-1 \\ 3x+6>8x-4 \end{cases}$ **R.** Nu are soluţii.

Să se afle valorile întregi ale lui x care satisfac simultan inecuaţiile

216. $\begin{cases} 3x+7>7x-9 \\ x-3>-3x+1 \end{cases}$ **R.** $x\in(1,4)$ deci soluţiile sînt 2 şi 3.

Să se afle pentru ce valori ale lui a produsul următor este pozitiv. Să se folosească metoda grafică.

217. $(2a-3)(3a-2)$. **R.** $a<\frac{2}{3}$ şi $a>\frac{3}{2}$ sau $a\in\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$.

218. Fie mulţimea $M=\{0;1;2;3\}$.

a) Să se determine mulţimile: $A=\{x\in\mathbb{N}\,|\,x=143a-17,\ a\in M\}$; $B=\{x\in\mathbb{N}\,|\,x=139b-13,\ b\in M\}$; $C=\{x\in\mathbb{N}\,|\,x=126-12c,\ c\in M$ şi $c<1\}$.

b) Să se arate că $A\cap B=C$.

R. a) $A=\{126;269;412\}$; $B=\{126;265;404\}$; $C=\{126\}$.
b) $A\cap B=\{126\}\Rightarrow A\cap B=C$.

219. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$E=\frac{1+3\left[\frac{x^2-y^2}{(x+y)^2}\right]^2-\left[\frac{x^2-y^2}{(x+y)^2}\right]^3-3\frac{x^2-y^2}{(x+y)^2}}{3\frac{x+y}{x-y}-3\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^3-1}.$$

R. $\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^3$.

220. Să se aducă expresia la forma cea mai simplă, apoi să se afle pentru ce valoare a lui x expresia devine egală cu 3.

$$E=\frac{x^5+x^3+x}{x^3-x^2+x}.$$

R. (x^2+x+1); $x\in\{-2;\ 1\}$.

221. Să se arate în care sistem de numerație există relația: $\left(\frac{4}{14}+\frac{1}{10}\right)\cdot\frac{140}{104}=1.$

Indicație. $\left(\frac{4}{x+4}+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x^2+4x}{x^2+4}=1.$ **R.** 5.

222. Se dă polinomul $E_1=9x^3+18x^2-3x-7$. a) Să se afle restul împărțirii prin $x+2$ fără a efectua împărțirea. b) Cu ce polinom a fost împărțit E_1 știind că s–a obținut cîtul $x+2$ și restul $x+1$?

R. a) -1; b) $9x^2-4$.

223. Să se determine mulțimea M și să se afle cardinalul ei:

$$M=\{x\in\mathbf{N}\,|\,x=2y, y\in\mathbf{N}, 5<x<9\}.$$

R. $M=\{6;8\}$; Card $M=2$.

224. Se consideră fracția algebrică: $\frac{ax^2+x^2-2ax-2x+a+1}{x-1}$.

1) a fiind număr real să se afle domeniul de existență a fracției privitor la variabila x.

2) Să se simplifice fracția.

3) Să se determine valoarea lui x pentru ca expresia simplificată să devină $a+1$.

R. 1) $x\in\mathbf{R}-\{1\}$; 2) $(x-1)(a+1)$; 3) 2.

225. Se consideră fracția algebrică: $\frac{a^5+2a^3-2a^4-2a^2+a}{a(2a^2-2)(a^2+1)}$.

1) Pentru ce valori ale lui a fracția are sens?

2) Să se simplifice fracția.

3) Să se determine valoarea lui a pentru care fracția ia valoarea -1.

R. 1) $a\in\mathbf{R}-\{-1;\ 0;\ 1\}$; 2) $\frac{a-1}{2(a+1)}$; 3) $a=-\frac{1}{3}$.

226. Se dă expresia:

$$\left[\left(\frac{8x^3-1}{2x-1}-6x\right)\frac{4x^2-1}{2x+1}-(8x^2-1)\right]\cdot\frac{1}{1-2x}.$$

1) Pentru ce valori ale lui x expresia are sens?

2) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.

3) Să se afle valoarea numerică a expresiei pentru

$$x=\frac{\sqrt{1,0404}+\frac{49}{50}-1,1(6)\cdot\frac{3}{7}}{1:(394\cdot19+2606\cdot19-2999\cdot19)}\cdot\frac{1}{19}.$$

R. 1) $x\in R-\left\{-\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\right\}$; 2) $E=6x$; 3) 9.

227. Fie mulțimea $A=\{x\in N|x<11\}$. Să se determine mulțimile

a) $M=\{x\in N|x=2n,n\in A\}$; b) $P=\{x\in N|x=3p,p\in A\}$.

R. $A=\{0; 1; 2; 3...10\}$. a) $M=\{0; 2; 4..,20\}$ (numere pare)
b) $P=\{0; 3; 6..,30\}$ (multipli de 3).

228. Se consideră expresia:

$$E=\left[(2+2x)\left(\frac{4x^2+21}{2+2x}-6\right)+\frac{8x^3-27}{4x^2+6x+9}\right]\frac{1}{2x-2}.$$

a) Pentru ce valori ale lui x expresia are sens?

b) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.

c) Să se calculeze valoarea expresiei pentru: $x=\dfrac{\sqrt{1,0816}+\frac{24}{25}+1}{\frac{1}{2}+\frac{3}{8}:0,25-0,1(6)\cdot\frac{3}{2}+0,75}$.

R. a) $x\in R-\{-1,+1\}$; b) $2x-3$; c) $-\frac{3}{5}$.

229. Se consideră expresia:

$$E=\left[\left(\frac{125x^3+1}{1+5x}-5x-\frac{15x-75x^2}{5x-1}-15x\right)+2(5x-1)\right]\cdot\frac{1}{5x-1}.$$

a) Pentru ce valori atribuite lui x expresia dată are sens?

b) Să se simplifice expresia.

c) Să se calculeze valoarea expresiei pentru: $x=\dfrac{\sqrt{1,1025}+\frac{19}{20}-1,0(5)+\frac{1}{18}}{120:20\cdot 5\cdot 0,04-1,18}$.

R. 1) $x\in R-\left\{-\frac{1}{5},+\frac{1}{5}\right\}$; 2) $5x+1$; 3) 251.

230. Se dă expresia: $\left\{\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a^3-b^3-3ab(a-b)}{a^2-ab+b^2}\right]\right\}:\frac{ab}{a^2-ab+b^2}$ în care a și b îndeplinesc condițiile $a\neq b$ și $a\neq -b$. Se cere:

1) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.

2) Să se calculeze valoarea numerică a expresiei, dacă:

$$a=\frac{(8^4\cdot3^5\cdot9^7):(9^6\cdot8^3\cdot3^6)+16:3-\frac{1}{3}+1}{\sqrt{1,004004}+\frac{499}{500}+28};\ b=-10.$$

R. 1) $\frac{1}{a+b}$; 2) $-\frac{1}{9}$

231. $\left(\dfrac{x^2-xy}{x^2y+y^3}-\dfrac{2x^2}{y^3-xy^2+x^2y-x^3}\right)\left(1-\dfrac{y-1}{x}-\dfrac{y}{x^2}\right)\cdot xy\cdot(x-5).$

a) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.

b) Pentru ce valori ale lui x expresia este negativă?

R. a) $(x+1)(x-5)$; b) $-1<x<5$ sau $x\in(-1,5)$.

232. Fie $E=\dfrac{x^2-2x+6}{x^2-2x+4}$. Să se arate că $\forall x\in\mathbf{R}$, E este pozitivă.

Indicație: $E=1+\dfrac{2}{(x-1)^2+2}$.

233. Se dau expresiile: $A(x)=1+\dfrac{2x}{3+\dfrac{4x}{5}}$; $B(x)=9-\dfrac{4-\dfrac{15}{x}}{2}$. Să se calculeze:

a) $E_1=\left(\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}\right)A$; b) $E_2=\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)B$.

c) Să se rezolve ecuația: $\left(2E_1-E_2+\dfrac{15}{4x+15}\right)=1$.

R. 1) $E_1=\dfrac{15+6x}{15+4x}$; 2) $E_2=\dfrac{15+2x}{2x}$, 3) $8x^2-30x-225=0$; $x_1=\dfrac{15}{2}$; $x_2=-\dfrac{15}{4}$ (nu convine).

234. Se dă ecuația:

$$\left[\left(\frac{a+2}{a-2}\right)^3:\frac{a^3+4a^2+4a}{{}^2-12a+12}\cdot\frac{a}{3}\right]x+\left[\left(6a+\frac{a}{a-2}-\frac{a}{a+2}\right):\frac{4a}{a^4-2a^3+8a-16}\right]x=a^3+6a^2+12a+\frac{a+2}{a-2}x.$$

1) Ce valoare trebuie să aibă a ca ecuația propusă să aibă sens?

2) Să se rezolve ecuația.

R. 1) $a\neq-2$; 0; 2; 2) $x=\dfrac{a(a^2+6a+12)}{(a+2)^2}$.

235. Fie $F=\dfrac{x^2+6x+5}{x^2+4x-5}$. Pentru ce valori ale lui $x\in\mathbf{N}$, F este un număr natural?

R. (2,3).

236. Se dau expresiile: $m_1=\dfrac{ax^4-4ax^2-3ax^3+12ax}{ax}$; $m_2=\dfrac{a^2x^5-9x^3a^2+2a^4x^4-18a^2x^2}{a^2x^2}$;

$m_3=\dfrac{a^3x-4x^4a^3+3x^5a^3-12a^3x^3}{a^3x^3}$.

1) Să se găsească: c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c.

2) Să se determine x din ecuația: $\left[\dfrac{m_1}{m_2}+\dfrac{m_2}{m_3}(2-x)\right](x+3)-1=0$.

R. 1) $x+2$; $(x^2-9)(x^2-4)$; 2) $x_1=-2$; $x_2=3$.

237. Se dă fracţia: $\dfrac{x^2-4x+6x\sqrt{y}+9y-12\sqrt{y}}{x^2-2x+3x\sqrt{y}-6\sqrt{y}}$.

1) Să se aducă la forma cea mai simplă.

2) Ce valoare numerică are fracţia dată pentru $y=\dfrac{4}{9}$? R. 1) $\dfrac{x+3\sqrt{y}-4}{x-2}$; 2) 1.

238. Se dau expresiile: $f(x)=x^2+2x-15$; $f_1(x)=x^2-6x+9$; $f_2(x)=x^2+10x+25$.

1) Să se arate că $f(x)$ este medie proporţională între $f_1(x)$ şi $f_2(x)$.

2) Să se simplifice fracţia: $E=\dfrac{f_2(x)+f(x)}{f_2(x)-f(x)}$. R. $\dfrac{x+1}{4}$.

239. Să se simplifice fracţia: $\dfrac{3x^2+2xy-y^2}{6x^3+x^2y-4xy^2+y^3}$.

Dacă $y=6$, să se arate pentru ce valori ale lui x expresia nu are sens.

R. $\dfrac{1}{2x-y}$; $x\neq 2$; 3; -6.

Indicaţie. Se va ţine seamă de factorii obţinuţi la numărător şi scriind unul din termenii de la numitor sub formă de sumă a trei termeni se obţine uşor gruparea termenilor, sau se va scrie: $-4xy^2=-5xy^2+xy^2$ şi $6x^3$ sub formă de sumă a doi termeni şi apoi gruparea termenilor este evidentă.

240. Se dau mulţimile: $A=\{x\in N \mid x<6\}$; $B=\{x\in N \mid x\leq 4\}$.

a) Să se enumere elementele celor două mulţimi.

b) Sînt echipotente mulţimile A şi B ?

c) Să se determine mulţimea: $M=\{x\in A \mid y\in B$ astfel încît $x<y\}$.

R. a) $A=\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$; $B=\{0; 1; 2; 3; 4\}$

b) Nu, căci Card $A=6$ şi Card $B=5$. c) $M=\{0; 1; 2; 3\}$.

241. Perimetrul bazei unui paralelipiped dreptunghic este $8a$, iar raportul dimensiunilor bazei este: $\dfrac{x}{y}=\dfrac{2a+b}{2a-b}$ $(a>0; b>0)$.

1) Să se calculeze aria bazei.

2) Să se afle înălţimea paralelipipedului ştiind că $V=8a^2b-4a^3+ab^2-2b^3$.

3) Să se calculeze diagonala paralelipipedului cînd $a=4$ şi $b=3$.

R. 1) $4a^2-b^2$; 2) $2b-a$; 3) $5\sqrt{6}$.

242. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{4x^2-4}{x^3-2x^2-x+2}-\frac{(x^3+8)(x^2-1)}{x^4-5x^2+4}=0.$$ R. 0.

243. Să se rezolve ecuaţia:

$$\left[\frac{x^2-6xy+y^2}{(x+y)^2-8xy}-x^3\right]:(1-x)+x=9.$$ R. $x_1=2$; $x_2=-4$.

244. Se dau expresiile: $E_1=x^4-4x^3+12x-9$, $E_2=\dfrac{(x-1)(x-3)}{x^2-3}$.

1) Să se descompună în factori E_1.

2) Să se arate că $E_1\cdot E_2$ şi $\dfrac{E_1}{E_2}$ sînt pătrate perfecte.

R. 1) $E_1=(x^2-3)(x-3)(x-1)$; 2) $E_1E_2=(x-1)^2(x-3)^2$; $\dfrac{E_1}{E_2}=(x^2-3)^2$.

245. Se dă expresia:

$$E_1=\left(\frac{2x^4+x^5-2x^2y+x^3-2y-4xy}{4(4x^3-8y)}+1+\frac{2x+2}{4}\right):(x+5).$$

1) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.

2) Pentru ce valori întregi ale lui x expresia E_1 este un număr întreg ?

3) Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} E_1\cdot\sqrt{256}<2x-3,\\ \dfrac{x}{3}-2>\dfrac{3-5x}{4}+2 \end{cases}$

R. 1) $\dfrac{x+5}{16}$; 2) $x=k16-5$ $(k\in\mathbb{Z})$; 3) $x\in(8;\ +\infty)$.

246. Se dă expresia: $f(x)=\dfrac{7x+6}{8x+5}$ şi mulţimile $A=\{2;\ 3;\ 13;\ 14\}$; $B=\{5;\ 6;\ 13\}$. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiei p: $A\cap B$ conţine elemente prin care $f(x)$ se simplifică, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}$. **R.** adevărată.

247. Se dau expresiile: $E_1=\dfrac{a^4+4a^3+6a^2+5a+2}{(a^2+a+1)(a+1)^2}$; $E_2=\dfrac{a^4-2a^3+a}{(a^2-1)(a^2-a-1)}$.

1) Să se aducă expresiile la forma cea mai simplă.

2) Pentru ce valoare a lui a avem $\dfrac{E_1+E_2}{a+1}<2$.

3) Să se rezolve ecuaţia: $\dfrac{E_1}{E_2}=a+2$.

R. 1) $E_1=\dfrac{a+2}{a+1}$; $E_2=\dfrac{a}{a+1}$; 2) $a\in(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$; 3) $a_1=-2$, $a_2=1$.

248. Se dau expresiile: $E_1=\left\{\left[\dfrac{(8+x^3)(x-2)}{x^4-2x^3+4x^2}\right]^2+\dfrac{2x^2-8}{x^2}+1\right\}:\dfrac{2x^2-4}{x^4}$

$$E_2=\left\{\left(\frac{1-8x^3}{4x^4+2x^3+x^2}\cdot\frac{1+2x}{x^2}\right)^3+\frac{12x^2-48x^4}{x^{12}}\right\}\cdot\frac{x^{12}}{1+4x^2+16x^4}.$$

1) Să se aducă E_1 şi E_2 la forma cea mai simplă.

2) Să se rezolve inecuaţia: $\frac{E_1+E_2+2x^2+x}{x+2} < -4$.

3) Să se rezolve ecuaţia: $\frac{E_2}{E_1}\cdot\frac{2}{1-2x}-1=0$.

R. $E_1=2x^2-4$; $1-4x^2=E_2$; 2) $-2<x<-1$; 3) $x_1=3; x_2=-1$.

249. Se dă polinomul $E=1+x+x^2+2x^3$. Prin ce polinom a fost împărţit E, ştiind că s–a obţinut cîtul $11+5x+2x^2$ şi restul 23.

R. $x-2$.

250. Se dau expresiile:

$$E_1=\left[\left(\frac{x^2-2x+4}{x^3-2x^2-x+2}-\frac{x^2+x+1}{x^3+x^2-4x-4}\right):\frac{9}{(x^2-4)(x-1)}\right]^2-\frac{2}{x+1}+1;$$

$$E_2=\left\{\left[\frac{64-8x^3}{4x^2+8x+16}\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right):\frac{2}{x}\right]^2+\frac{2x-2x^2+4}{x}+1\right\}\cdot\frac{x}{2x-x^2+2}+x.$$

1) Să se aducă E_1 şi E_2 la forma cea mai simplă.

2) Care sînt valorile lui x pentru care E_1 şi E_2 au sens (studiul se face pe forma simplificată).

3) Să se rezolve ecuaţia: $(E_1\cdot E_2-1)\cdot(x+1)=0$.

R. 1) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2$; $\frac{2(x+1)}{x}$; 2) $x\neq-1$; $x\neq0$; 3) $x=1$.

251. Se dă mulţimea: $P=\{x\in\mathbf{N}\,|\,x=2y-4,\ y\in\mathbf{N},\ 12<x\leq18\}$. Să se determine mulţimea şi să se afle cardinalul acestei mulţimi.

R. $P=\{14; 16; 18\}$; 3.

252. Se dau expresiile:

$$E_1=\left[\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2+1+\frac{2x-2}{x+1}\right]\cdot\frac{(x+1)^3}{16x^2};\ E_2=\frac{(x^3-1-3x^2+3x)(x-1)^2(x-1)-1}{x^4+3x^2-3x^3-2x}.$$

1) Să se aducă E_1 şi E_2 la forma cea mai simplă.

2) Pentru ce valori (numere întregi) atribuite lui x, expresia E_1 devine număr întreg?

3) Să se rezolve ecuaţia: $\frac{E_1E_2}{x-1}=0$.

R. 1) $E_1=\frac{x+1}{4}$; $E_2=x^2-3x+3$; 2) $x=4k-1$, $k\in\mathbf{Z}$; 3) $x=-1$.

253. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{3}{2}, \\ x - y = 6 \end{cases}$. R. $x=8; y=2$.

254. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{x^3-4ax^2+5a^2x-2a^3}{x^2-3ax+2a^2},\ E_2 = \frac{x^3+ax^2-a^2x-a^3}{x+a}.$$

1) Să se aducă E_1 şi E_2 la forma cea mai simplă.

2) Să se rezolve ecuaţia: $\dfrac{E_1+E_2}{1+a+x}(x+b)=0$ (după ce în prealabil s–a simplificat ecuaţia).

R. 1) $E_1=x-a$; $E_2=x^2-a$. 2) $x_1=a; x_2=-b$.

Să se simplifice fracţia: $\dfrac{2x^3-6x^2+6x-4}{2x^2-2x+2}$. R. $x-2$.

256. Se dă mulţimea $A=\{2; 3; 4\}$. Care sînt numerele de pe tricourile unor sportivi, care se pot forma, folosind elementele mulţimii A, dacă fiecare număr are numai două cifre?

Indicaţie. Se foloseşte scrierea elementelor produsului cartezian $A\times A$.

R. 22; 23; 24; 32; 33; 34; 42; 43; 44.

257. Se dau expresiile:

$$E_1 = \frac{x^3-4ax^2+5a^2x-2a^3}{(x-a)(x-2a)};\ E_2 = \frac{x^3-2ax^2-a^2x+2a^3}{x-2a}.$$

1) Să se aducă la forma cea mai simplă E_1 şi E_2.

2) Să se găsească valorile întregi atribuite lui x astfel ca expresia:

$\left(\dfrac{E_1-E_2}{E_1}+ax^2\right):(1-a-ax)\left(-\dfrac{2}{9}\right)$ să fie număr întreg.

R. 1) $E_1=x-a$, $E_2=x^2-a^2$. 2) $x=\dfrac{9k+2}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

258. Se dau polinoamele:

$E_1=2x^3+7x^2-2x^2y-7xy+6x-6y$; $E_2=2x^3-x^2-2x^2y+xy-6x+6y$.

1) Să se transforme E_1 şi E_2 într–un produs de factori.

2) Să se efectueze: $\dfrac{E_1}{E_2}\cdot\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+2x+4}-\dfrac{x^3+9}{x^3-8}$.

3) Pentru ce valoare a lui x avem $\dfrac{E_1}{E_2}>1$.

R. 1) $E_1=(x-y)(x+2)(2x+3)$, $E_2=(x-2)(2x+3)(x-y)$;

2) $\dfrac{-1}{x^3-8}$; 3) $x>2$

259. Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile:

$$E_1=\frac{\left(1-\frac{2y}{x}+\frac{y^2}{x^2}\right)\left(\frac{y^3}{x^2}+\frac{2y^2}{x}+y\right)\cdot\frac{x^4}{y}+2(x^2-y^2)+1}{x^2-y^2+1},\quad E_2=\frac{x^2-y^2+2y-1}{x-y+1}.$$

Să se rezolve sistemul: $\begin{cases}\dfrac{E_1^2-E_2^2}{(x^2-y^2-x-y+2)(x-y+1)}=6\\ x^2-y^2=60\end{cases}$

R. $E_1=x^2-y^2+1$; $E_2=x+y-1$; $x=8$; $y=-2$.

260. Se dau expresiile:

$$E_1=\frac{4x^2-20x+9}{(2x-1)^2+(1-2x)}\cdot\frac{x-1}{2x-9}.$$

$$E_2=\left[\frac{z-y}{(x-y)(x-z)}+\frac{y+z}{(y-z)(y-x)}+\frac{y+z}{(z-x)(z-y)}\right]\cdot\frac{z-x}{y}.$$

1) Să se aducă la forma cea mai simplă E_1 şi E_2

2) Pentru ce valori ale lui $x\in Z$: $\left(E_1\cdot E_2+\frac{1}{x+y}\right)\frac{x^2-y^2}{x(x+2)}$ este întreg.

R. 1) $E_1=\frac{1}{2}$; $E_2=\frac{2}{x-y}$; $x\in\{-1, -3, -4\}$.

261. Se dă mulţimea $A=\{x\in N \mid 0<x<8\}$.

a) Să se determine mulţimile $M=\{x\in A \mid$ există $y\in A$, $x+y=6\}$.

b) Să se scrie C_AM.

c) Să se scrie $M\cap C_AM$.

d) Să se găsească Card A–Card M.

R. a) $A=\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$; $M\subset A=\{1; 2; 4; 5\}$.
b) $\{3; 6; 7\}$; c) $\emptyset$; d) Card $C_AM=3$.

262. Se dau expresiile: $A=4yz$; $B=x^2-y^2-4z^2$; $C=x^2-y^2+4z(z+x)$.

1) Să se calculeze A^2-B^2 şi să se descompună expresia obţinută în factori.

2) Să se simplifice fracţia: $\dfrac{\frac{A^2-B^2}{C^2}}{(x+y-2z)}$.

R. 1) $(x+y+2z)(x-y+2z)(x+y-2z)(-x+y+2z)$; 2) $y+2z-$

263. Să se rezolve ecuația (după simplificarea fracțiilor):

$$\frac{2x-1+(1-2x)^2+(2x-1)^3}{8x^3+1}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

Să se determine valoarea numerică a lui x pentru:

$$a=\sqrt{\frac{125}{108}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}+1,1(6)-\frac{2}{3}};\quad b=\left(\sqrt{1,0201}+\frac{9}{100}\right):\frac{1}{10}.$$

R. $\frac{a^2}{2b^2}$; $\frac{9}{242}$.

264. c,m.m.d.c. al două numere naturale este 2, c.m.m.m.c. al acestor numere este 60, iar raportul lor este $\frac{5}{6}$. Să se găsească aceste numere.

R. {10; 12}.

265. Să se determine x din ecuația:

$$\frac{x^2-x-2}{x^3-2x^2-x+2}-\frac{x^3-x^2-4x+4}{x^4-5x^2+4}+\frac{3-2x-x^2}{(x+3)(x^2-1)}=\frac{1}{x-1}.$$

R. Nu are soluție.

266. Să rezolve ecuația:

$$\left\{\left[\left(\frac{3x+6}{3x-6}\right)^2-\frac{2x+4}{x-2}+1\right]-1\right\}:\frac{1}{(x-2)^2}=0.$$

R. $x_1=-2$, $x_2=6$.

267. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases}(x-2)(y-3)=1\\(x-2):(y-3)=1\end{cases}$

R. $x=3, y=4$.

268. Să se determine mulțimea A ale cărei elemente sînt valorile lui $x\in\mathbf{N}$ pentru care fracția $\frac{3x+2}{2x-3}$ se simplifică.

R. $A=\{M13-5;\ 1;\ 2\}$.

269. Se dă expresia: $E=\dfrac{(2x-3)^2+4x^2+4x-15}{8x^3-12x^2-12x(2x-3)+18x-27}$.

1) Să se aducă expresia la forma cea mai simplă.

2) Pentru ce valori ale lui x se obține: $\frac{4(2x-3)}{2x+1}<3$.

3) Pentru ce valori întregi ale lui x expresia $\frac{E\cdot 4(2x-3)}{2x+1}$ este un număr întreg.

R. 1) $E=\frac{2(2x+1)}{(2x-3)^2}$; 2) $x\in\left(-\frac{1}{2},\ \frac{15}{2}\right)$; 3) 1,2.

270. Să se determine mulțimea $A=\{(x,y)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}\mid xy=8\}$.

271. Se dă fracţia : $E=\dfrac{6x^2(y+z)^2-24x^2yz}{3y^4-6y^3z-6yz^3+6y^2z^2+3z^4}$.

1) Să se aducă la forma cea mai simplă.
2) Să se arate că dacă $E=2$, atunci x, y, z, pot fi laturile unui triunghi dreptunghic.

R. $E=\dfrac{2x^2}{y^2+z^2}$.

272. Dacă numerele a şi b sînt prime între ele, să se cerceteze dacă sumele $a+b$ şi a^2+b^2 sînt prime între ele.

Indicaţie. Putem scrie $a^2+b^2=(a+b)(a+b)-2ab$. In baza acestei egalităţi, orice număr care divide pe a^2+b^2 şi pe $(a+b)$ trebuie să dividă şi pe $2ab$. Intrucît a şi b sînt numere prime între ele suma lor $a+b$ şi produsul lor ab sînt prime între ele, deci 2 este singurul divizor al lui $2ab$, comun pentru a^2+b^2 şi $a+b$.

273. Să se simplifice fracţia: $E=\dfrac{x^3+6x^2+12x+7}{x^2+5x+7}$.

Să se determine valorile lui x (numere întregi) ca să avem: $\dfrac{E}{x-2}\geq 3$.

R. $E=x+1$; $x=3$. $x\in\left(2;\ \dfrac{7}{2}\right]$.

274. Se dau expresiile:

$$E_1=\left\{\left[\frac{m^2x+2mx+x-3m^2-6m-3}{(m+1)(9-6x+x^2)}\right]^2-1\right\}:\frac{m+x-2}{x-3}.$$

$$E_2=\frac{x^3-3x^2+2x(x-3)+x-3}{(x^3-27)(x+1)}.$$

1) Să se aducă la forma cea mai simplă E_1 şi E_2.

2) Pentru ce valoare a lui x expresia $(E_1+1)\cdot\dfrac{x+2}{m+1}$ este negativă?

3) Pentru ce valoare a lui x expresiile E_1 şi E_2 nu au sens?

R. 1) $E_1=\dfrac{m-x+4}{x-3}$, $E_2=\dfrac{x+1}{x^2+3x+9}$; 2) $-2<x<3$ sau $x\in(-2,3)$; 3) $x=-1$ şi $x=3$.

275. Se consideră mulţimea $A=\{x\in\mathrm{N}\,|\,x=2n+1, n\in\mathrm{N}\}$. Să se scrie din această mulţime primele cinci elemente.

R. $\{1; 3; 5; 7; 9\}$.

276. Se dă expresia

$$f(x)=\frac{ax^2+x^2-2ax+a-2x+1}{a+1},\ a\neq-1.$$

Să se arate că oricare ar fi $x\in R$, $f(x)$ este pozitivă.

277. Se dau expresiile:

$$E_1=\left[\left(\frac{27-125x^3}{50x^2+30x+18}\right)^2-\frac{10x-6}{2}+1,1(6)-\frac{1}{6}\right]\cdot\frac{4}{25},$$

$$E_2=\frac{\left[\left(\frac{4x^2+4x}{4x^2}\right)^2+\frac{4x^2+4x}{2x^2}+\sqrt{4,1616}-1\frac{1}{25}\right]-1}{\frac{3x+1}{x}}.$$

1) Să se aducă E_1 şi E_2 la forma cea mai simplă.

2) Pentru ce valori întregi ale lui x expresia $E_1 \cdot E_2 \cdot \frac{-2x}{3-3x^2}$ este un număr întreg?

R. 1) $E_1=(1-x)^2$, $E_2=\frac{x+1}{x}$; 2) $x=\frac{3k+2}{2}$; $k\in\mathbb{Z}$.

278. Se dau expresiile:

$$E_1=\frac{\left(\frac{1}{a^3-ab^2}+\frac{1}{a^2b+2ab^2+b^3}\right):\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{a^2}{b}-2a+b\right)}{(a-b)^2:(a+b)^2}$$

$$E_2=\left[\frac{1}{b^4}+\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a-b^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b^2}\right)\right]:\frac{2ab^2-a^2-b^4}{ab^2}.$$

1) Să se aducă E_1 şi E_2 la forma cea mai simplă.

2) Pentru ce valori ale lui a expresia $E_1 \cdot E_2 \cdot \frac{b^2(b-a)(a-2)}{8}$ este negativă ?

R. 1) $E_1=\frac{a}{a-b}$; $-\frac{1}{ab^2}=E_2$; 2) $a<2$ sau $a\in(-\infty,\ 2)$.

279. Se dă expresia:

$$\frac{a^3+a^2(1-b)-b^2(1+a)+b^3}{a^3+a^2(1+b)-b^2(1+a)-b^3}=\frac{A}{B}.$$

1) Să se simplifice fracţia $\frac{A}{B}$.

2) Să se rezolve sistemul: $A=\frac{2y+x}{x}$, $B=\frac{2x+y}{y}$,

în care A şi B sînt termenii fracţiei, iar necunoscutele sînt a şi b.

R. 1) $\frac{A}{B}=\frac{a-b+1}{a+b+1}$. 2) $a=\frac{x^2+y^2}{xy}$; $b=\frac{x^2-y^2}{xy}$.

280. Se dă expresia:

$$E=\left(\frac{x^4-2x^2+2x^2y^2-2y^2+y^4+1}{x^2+y^2-1}-x^2y\right):(x^2-y-1).$$

1) Să se aducă E la forma cea mai simplă.

2) Să se rezolve inecuaţia: $\frac{E}{y+1}<-3.$ **R.** 1) $E=1-y$; 2) $y\in(-2,-1)$.

281. Se dau expresiile:

$$E_1=x^4+2x^3+2x^2+2x+1;\ E_2=x^3-8x^2+13x-6.$$

1) Să se descompună în factori E_1 şi E_2.

2) Să se simplifice expresia $\frac{E_1}{E_2}\cdot\frac{x-6}{x^2+1}$.

R. 1) $E_1=(x^2+1)(x+1)^2; E_2=(x-1)^2(x-6)$. 2) $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$.

282. Să se arate că dacă x, y, z sînt laturile unui triunghi, atunci avem:

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{x}{z}\right)<3+\frac{x+y}{z}+\frac{x+z}{y}.$$

283. Să se aducă la forma cea mai simplă fracţia:

$$E=\frac{\left[\left(\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}\right)\cdot\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}+1\right)\frac{xy}{x^2+y^2}\right]^2+\frac{2x+2y}{x-y}+1}{\frac{4x^2}{(x-y)^2}}.$$ **R.** 1.

284. Se dă expresia $f(x)=\frac{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}{x^2+1}$.

a) Să se arate că oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}$, $f(x)$ este pozitivă.

b) Se dă mulţimea $A=\{x\in\mathbb{Z}|-3<x<5\}$. Să se arate că ecuaţia $f(x)=9$, are soluţii în mulţimea A.

285. Să se simplifice fracţia: $\frac{3x^2+1+2x^3+3x}{x^2+x+1}$. **R.** $2x+1$.

286. Se dau expresiile:

$$E_1=\frac{x^3-6ax^2+12a^2x+56a^3}{x^2+28a^2-8ax};\ E_2=\frac{x^3+6ax^2+12a^2x+72a^3}{x^2+12a^2}.$$

1) Să se aducă E_1 şi E_2 la forma cea mai simplă.

2) Să se rezolve ecuaţia (după ce s-a simplificat fracţia):

$$\frac{E_1\cdot E_2+4a^2+2x+8a+1}{(x+4a+1)^2}=x^2.$$

R. 1) $E_1=x+2a$, $E_2=x+6a$. 2) $x_1=1, x_2=-1$.

287. Se dau expresiile:

$$E_1=\frac{x(x+1)^2\cdot(x^2+1)+1}{x^3+x^2+1};\ E_2=\frac{x^6+2x^5+x^3-2x^2-2}{x^3+2x^2+2}.$$

1) Să se aducă la forma cea mai simplă E_1 şi E_2.

2) Să se rezolve ecuaţia: $\left[\frac{E_1(x-1)}{E_2}+x\right](2-x)=0.$

R 1) $E_1=x^2+x+1$; $E_2=x^3-1$. 2) $x_1=-1$; $x_2=+2$.

288. Se dau expresiile:

$$E=\frac{(x-1)^3+(x+y)^2+(y-1)^3-4}{x^2+y^2-xy+3};\ E_1=\frac{x^3+x^2y-2x^2-x-y+2}{x^2-1}.$$

1) Să se aducă la forma cea mai simplă E şi E_1.

2) Pentru ce valoare a lui x expresia: $\left(\frac{E}{E_1}-x^3\right):(x^2+x+1)(x+3)$ este negativă?

3) Să se rezolve sistemul: $\begin{cases}\dfrac{E\cdot E_1-2xy-4-2y^2}{x-y-4}=1\\ x^2-y^2=7\end{cases}$.

R. 1) $x+y-2=E$, $x+y-2=E_1$; 2) $x\in(\infty;-3)\cup(1;\infty)$;
3) $x_1=4; y_1=-3$; $x_2=\frac{23}{8}; y_2=-\frac{9}{8}$.

289. Să se simplifice fracţia: $\frac{x^6+6x^5+9x^4-9x^2-6x-1}{x^4+6x^3+10x^2+6x+1}$. R. x^2-1.

290. Se dau expresiile:

$$E_1=\frac{(x^4-x^3+8x^2-2x+12)(x+2)}{(-8x^2-16)(x^2-x+6)};\ E_2=\frac{6+6x+5x^2+3x^3+x^4}{(x^2+2)(x^2+3x+3)}.$$

1) Să se aducă E_1 şi E_2 la fotrma cea mai simplă.

2) Pentru ce valori ale lui x expresia $E_1\cdot\frac{E_2}{x-1}$ este negativă?

3) Care sînt numerele întregi atribuite lui x pentru ca E_1 să fie număr întreg?

R. 1) $E_1=\frac{x+2}{-8}$; $E_2=1$; 2) $x\in(-\infty;-2)\cup(1,\infty)$;
3) $x=8k-2$, $(k\in\mathbb{Z})$.

291. 1) Să se aducă fracţia $E(x)=\frac{4x^2-4x-15}{8x^2-24x+10}$ la forma ireductibilă.

296. Se dau expresiile:

$$E_1=\frac{2(x-y)^2-5y^2+3xy}{2x-3y}+\frac{3x^2+2xy-y^2}{3x-y};\quad E_2=\left[\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2+1+\frac{2x+2y}{x-y}\right]\cdot\frac{(x-y)^2}{-16x^2}.$$

1) Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile E_1 şi E_2.

2) Pentru ce numere întregi atribuite lui x expresia: $E_1\cdot E_2\cdot\frac{x+1}{x+y}$ este număr întreg?

3) Pentru ce valoare a lui x se obtine: $E_1\cdot E_2:(x+y)\cdot\frac{x+1}{x-1}<-4$?

R. 1) $E_1=2(x+y)$; $E_2=\frac{-1}{4}$; 2) $x=2k-1 (k\in\mathbb{Z})$; 3) $1<x<\frac{9}{7}$.

GEOMETRIE IN SPAŢIU

IV.16. DREPTE ŞI PLANE

1. Fie triunghiul echilateral cu aria de $692/cm^2$ ce are ca proiecţie pe un plan un triunghi isoscel cu aria 346 cm^2. Ştiind că două din vîrfurile triunghiului echilateral sînt situate în plan, să se afle distanţa vîrfului al treilea al triunghiului echilateral la planul de proiecţie (se va lua $\sqrt{3}=1,73$).

R. 3o cm.

2. Catetele unui triunghi dreptunghic ABC au lungimile de 12 cm şi 16 cm. Din vîrful unghiului drept A este dusă pe planul triunghiului perpendiculara AD, lungă de 28 cm. Să se afle aria triunghiului BCD.

Indicaţie: Inălţimea triunghiului BCD se poate afla folosind teorema celor trei perpendiculare.

R. Aria $BCD=296$ cm^2.

3. O placă în formă de triunghi isoscel ABC stă înclinată faţă de un plan, astfel că BC (baza triunghiului) lungă de 50 cm se află în plan, iar vîrful A se găseşte la distanţa de 24 cm de plan. Să se afle aria acestei plăci, ştiind că distanţa de la piciorul perpendicularei coborîte din vîrful A al triunghiului pe plan la baza BC a triunghiului este de 10 cm.

Indicaţie: Prin teorema celor trei perpendiculare se află înălţimea triunghiului.

R. 650 cm^2.

4. In vîrful A al unui triunghi dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A)=90^\circ$; $m(\sphericalangle C)=15^\circ$ şi $BC=4a$ cm, se ridică o perpendiculară AM astfel încît planele MBC şi BCA formează un unghi diedru de 45°. Să se determine distanţa de la punctul M la BC.

R. $a\sqrt{2}$ cm.

5. In triunghiul dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A)=90^\circ$ bisectoarea CN ($N \in AB$) intersectează înălţimea dusă din A pe BC în O. In punctul N se ridică perpendiculara ND egală cu AO, egală cu a. Să se determine distanţa dusă din D pe AC.

R. $a\sqrt{2}$.

6. In paralelogramul $ABCD$, laturile au lungimile egale cu 30 cm şi 24 cm. In vîrful B al unghiului mai mare, pe planul paralelogramului se ridică o perpendiculară $BM=12$ cm. Să se determine distanţa de la punctul M la latura mică a paralelogramului, dacă M este depărtat de latura mare a paralelogramului la 20 cm .

R. $4\sqrt{34}$ cm.

7. Diagonalele unui romb au lungimile de 30 cm şi 40 cm. Vîrful unghiului mare al rombului este piciorul unei perpendiculare pe planul rombului a cărei lungime este de 7 cm. Să se determine lungimea de la a doua extremitate a perpendicularei la latura rombului.

R. 25 cm.

8. In triunghiul ABC, $AB=6$ cm, $BC=6\sqrt{2}$ cm, $AC=4$ cm. In vîrful C pe planul triunghiului se ridică o perpendiculară $CM=3$ cm. Se uneşte M cu B şi A. Să se afle aria triunghiului MBA.

R. $10\sqrt{2}$ cm^2.

9. Triunghiul dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle B)=90^{\circ}$, este inclus în planul P. Latura AB a triunghiului este de 5 cm iar $m(\sphericalangle BAC)=60^{\circ}$. Din punctul M situat în afara planului dat, se duce perpendiculara MO, $O\in AC$ pe planul triunghiului astfel ca $MA=MC=10$ cm. Se cere: 1) Distanţa de la punctul M la planul triunghiului ABC. 2) Să se arate că $[MB]\equiv[AC]$. 3) Să se calculeze raza cercului înscris în triunghiul AOB. 4) Să se arate că ariile triunghiurilor AOB şi MAC sînt în raportul 1/4.

R. 1) $5\sqrt{3}$ cm, 3) $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ cm.

10. In paralelogramul $ABCD$ cu latura mică $AD=6$ cm, bisectoarele interioare ale unghiurilor consecutive A şi B se intersectează în $M\in DC$. Unghiul diedru format de planul determinat de DC şi un punct N exterior planului a cărui proiecţie pe planul $ABCD$ este punctul O are măsura de 60°. Cunoscînd că $NC=12$ cm: a) să se determine distanţa de la punctul N la planul $ABCD$, ştiind că planul NAB este perpendicular pe $ABCD$ şi că O este mijlocul lui AB; b) să se determine $m(\sphericalangle ANO)$, $(AO>OB)$.

R. a) 9 cm, b) 45°.

11. Fie in planul P reprezentat prin pătratul $ABCD$ cu latura de $4a\sqrt{2}$ cm. La extremităţile diagonalei AC se duc perpendicularele $AN=4a\sqrt{2}$ cm, respectiv $CM=a\sqrt{2}$ cm. Unghiul diedru al planelor MBD şi NBD are măsura de 90°?

R. Nu.

12. Suma lungimilor bazelor unui trapez isoscel cu baza mică AB circumscris unui cerc O cu raza de 4,8 cm este de 20 cm. In punctul O se ridică o perpendiculară $OM=6$ cm. Să se determine proiecţia dreptei MB din planul MBC pe dreapta BC.

R. 3,6 cm.

IV.17. PRISMA

13. Un paralelipiped dreptunghic are volumul de 480 dm^3, lungimea şi lăţimea bazei respectiv de 8 dm şi 6 dm. Să se calculeze:

1) aria totală ; 2) diagonala paralelipipedului; 3) măsura unghiului dintre diagonala bazei şi diagonala paralelipipedului.

R. 376 dm^2; $10\sqrt{2}$ dm; 45°.

14. Un perete are forma unui paralelipiped dreptunghic lung de 12 m, înalt de 3 m şi

gros de 0,3 m. Acest perete are o uşă largă de 1,20 m şi înaltă de 1,90 m. Să se afle volumul zidăriei peretelui.

Indicaţie: $V_{zid}=V_1-V_2$, unde am notat: V_1 – volumul prismei cu dimensiunile 3 m; 12 m; 0,30 m, V_2 – volumul prismei cu dimensiunile 1,20 m; 1,90m; 0,30 m.

R. Volumul peretelui $=10{,}116\ m^3$.

15. Dintr–o groapă de var adîncă de 3 m, lungă de 5,2 m şi lată de 4,5 m se scoate varul şi se transportă cu o căruţă avînd forma unei prisme cu baza un trapez. Căruţa e lungă de 2 m, bazele trapezului sînt de 0,8 m şi 0,4 m şi înălţimea bazei de 0,5 m. Cîte căruţe sînt necesare?

R. 117 căruţe.

16. Dintr-un trunchi de arbore, lung de 4 m, avînd secţiunea un cerc cu diametru de 3 dm, s-a cioplit un paralelipiped avînd ca bază un pătrat cu diagonala cît diametrul trunchiului. Să se afle volumul paralelipipedului, ştiind că din lungimea trunchiului nu s-a cioplit nimic.

R. 180 dm^3.

17. Dintr-un bazin prismatic cu baza în formă de hexagon regulat cu latura de 2 m, plin cu petrol pînă la o înălţime de 1,8 m, se scurge petrolul în alt bazin în formă de paralelipiped cu baza un pătrat, avînd latura de 2,4 m. Pînă la ce înălţime se va ridica petrolul în bazinul al doilea ?

R. $1{,}875\sqrt{3}$ m.

18. Cele trei dimensiuni *AB*, *BC* şi *CC'* ale unui paralelipiped dreptunghic sînt proporţionale cu numerele 5; 2 şi 4, iar suma lor este de 27,5 cm. Să se afle aria laterală şi volumul lui.

R. $Al=350\ cm^2$; $V=625\ cm^3$.

19. Care este masa unei grinzi de fier în formă de prismă, lungă de 1,50 m şi avînd secţiunea un pătrat cu diagonala de $4\sqrt{2}$ cm ? Densitatea fierului este de 7800 kg/m^3.

R. 18,72 kg.

20. O prismă hexagonală regulată are înălţimea de 3 m şi latura bazei de 2 m. Să se afle lungimea celei mai mari diagonale a prismei, aria totală şi volumul ei.

R. diagonala=5 m; aria bazei$=6\sqrt{3}\approx 10{,}38\ m^2$; aria totală$=36+2\cdot 10{,}38=56{,}76m^2$; volumul$=18\sqrt{3}\ m^3$.

21. Să se afle raportul între volumele a două paralelipipede cu baza pătrată, ştiind că fiecare are înălţimea cît latura bazei celuilalt. Aceeaşi problemă pentru prisme hexagonale regulate.

R. Raportul $\frac{\ell_1}{\ell_2}$ al laturilor.

22. O cutie are formă de prismă hexagonală regulată. Latura hexagonului este de 2 dm, iar muchia laterală este de 5 dm. Să se afle aria laterală şi volumul cutiei.

R. 60 dm^2 şi $30\sqrt{3}\ dm^3$.

23. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sînt: 15 m, 50 m şi 36 m. Să se afle muchia cubului echivalent lui (avînd acelaşi volum).

Indicaţie: Se află volumul paralelipipedului, se observă că rezultatul este un cub perfect.

R. $L=30$ m.

24. O prismă hexagonală regulată are latura bazei de 18 cm, înălţimea prismei fiind $\frac{2}{3}$ din apotema poligonului de bază. Care este volumul prismei ?

R. 8 748 cm^3.

25. O prismă hexagonală regulată are aria aterala de $480\sqrt{3}$ cm^2, iar înălţimea de $10\sqrt{3}$ cm. Să se afle volumul prismei.

R. 2 880 cm^3.

26. Volumul unei prisme hexagonale regulate este de $2160\sqrt{3}$ cm^3, iar latura bazei de 12 cm. Să se afle aria laterală

R. 720 cm^2.

27. O prismă triunghiulară regulată are aria laterală de $144\sqrt{3}$ cm^2 iar înălţimea de 8 cm. Să se afle volumul prismei.

R. $V=216\sqrt{3}$ cm^3.

28. O plută este formată din 16 grinzi cu secţiunea dreptunghiulară, fiecare avînd lungimea de 3,6 m, lăţimea de 2 dm şi grosimea de 25 cm. Care sînt volumul şi masa plutei, ştiind că densitatea lemnului este de 600 kg/m^3 ?

R. $V=2{,}88$ m^3; $m=1\ 728$ kg.

29. Pe o suprafaţă dreptunghiulară cu lungimea de 4,5 m şi lăţimea de $\frac{2}{3}$ din lungime se instalează un rezervor pentru apă cu o capacitate de 540 hl. Să se afle înălţimea rezervorului.

R. $I=4$ m.

30. O prismă de lemn are ca bază un pătrat cu diagonalele de $12\sqrt{2}$ cm. Ştiind că masa prismei este de 30,240 kg, iar densitatea sa este de 600 kg/m^3, să se afle înălţimea prismei.

R. $I=3{,}5$ m.

31. O prismă dreaptă are ca bază un triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 26 cm şi o catetă de 10 cm. Ştiind că aria laterală a prismei este de 1 800 cm^2, să se afle volumul prismei.

R. 3 600 cm^3.

32. Un vas de fier are forma unei prisme hexagonale regulate. Latura bazei este de 0,6 m, iar înălţimea bazei de $0{,}25\sqrt{3}$ m. Printr-un orificiu făcut la baza prismei, se scurge lichidul din el. Dacă în fiecare minut se scurg în medie 5 litri, în cît timp se goleşte vasul (presupus plin) ?

R. 81 min.

33. Un jgheab are secţiunea în formă de trapez cu bazele de 20 cm şi de 30 cm, iar înălţimea de 40 cm. Să se calculeze debitul maxim de apă al acestui jgheab în metri cubi pe minut, ştiind că viteza maximă a apei în jgheab este de 2 m/s.

Indicaţie. Jgheabul varsă pe secundă un volum de apă egal cu volumul unei prisme a cărei bază este egală cu secţiunea jgheabului şi a cărei înălţime este distanţa parcursă de apă pe secundă.

R. 12 m^3/min.

34. Cîţi lucrători sînt necesari pentru a săpa în şase ore un şanţ de scurgere a apei lung de 25 m, avînd drept secţiune un trapez cu bazele de 1,10 m şi 0,70 m, iar înălţimea de 0,60 m, dacă un lucrător sapă într-o oră 0,75 m^3 ?

R. 3 lucrători.

35. Un vagonet pentru cărat cărbuni cu lungimea de 2,75 m are secţiunea în formă de trapez isoscel cu bazele de 0,60 m şi 1,15 m, iar înălţimea de 1m. Ce cantitate de cărbuni poate transporta, dacă 1 m^3 de cărbune are masa de aproximativ 700 kg ?

R. 1 684 kg.

IV.18. PIRAMIDA

36. Acoperişul unui turn are forma unei piramide regulate hexagonale, cu latura bazei de 4 m, iar muchia laterală de 4,8 m. Pentru a înveli acoperişul se folosesc foi de tablă dreptunghiulare, cu dimensiunile de 80 cm şi 60 cm; ştiind că pierderea (deşeurile) reprezintă 25% din suprafaţa acoperişului, să se afle cîte foi de tablă sînt necesare.

R. 137 de foi.

37. O piramidă regulată are ca bază un triunghi înscris într-un cerc cu raza de 12 cm, iar aria laterală este de 1 080 cm^2. Să se afle volumul piramidei.

R. $216\sqrt{97}$ cm^3.

38. O piramidă triunghiulară regulată are latura bazei de 6 dm. Inălţimea piramidei este cît înălţimea triunghiului de bază. Să se calculeze volumul acestei piramide.

Indicaţie: Inălţimea triunghiului de bază $=3\sqrt{3}$ dm. Aria bazei $9\sqrt{3}$ dm^2.

R. Volumul piramidei $=27$ dm^3.

39. O piramidă regulată are ca bază un pătrat cu diagonala de $30\sqrt{2}$ cm, iar înălţimea de două ori cît apotema bazei. Să se afle volumul piramidei.

R. $V=9\ 000$ cm^3.

40. O piramidă regulată hexagonală are latura bazei de 8 cm. Ştiind că înălţimea este triplul apotemei bazei, să se afle volumul piramidei.

R. $V=1\ 152$ cm^3.

41. O piramidă are ca bază un pătrat înscris într-un cerc cu raza $15\sqrt{2}$ cm, iar aria ei laterală este de 1 500 cm^2. Să se afle volumul piramidei.

R. $V=6\ 000$ cm^3.

42. Intr-o piramidă regulată pătratică, latura bazei este de 1 m, iar aria laterală este de 260 dm^2. Se cere: 1) apotema; 2) muchia; 3) volumul piramidei.

R. apotema $=13$ dm, muchia $=13{,}92$ dm, volumul $=400$ dm^3.

43. Latura unei piramide triunghiulare regulate este de $6\sqrt{3}$ cm, iar muchia laterală formează cu planul bazei un unghi de 45°. Să se afle volumul piramidei.

Indicaţie: Se va calcula raza cercului circumscris. Se va considera triunghiul dreptunghic format de muchia, înălţimea piramidei şi raza cercului circumscris.

R. $V=54\sqrt{3}$ cm^3.

44. Intr-o piramidă patrulateră regulată aria laterală este de 960 cm^2, iar aria totală de 1 536 cm^2. Să se calculeze volumul piramidei.

R. V=3 072 cm^3.

45. Intr-o piramidă patrulateră regulată muchia laterală este de 25 m, iar latura bazei de 30 m. Să se afle aria laterală şi volumul ei.

R. Al=1 200 m^2; $V=1\,500\sqrt{7}$ m^3.

46. O piramidă patrulateră regulată are volumul de $18\,432\sqrt{7}$ cm^3, iar latura bazei de 48 cm. Să se afle aria laterală.

R. $Al=4\,608\sqrt{2}$ cm^2.

47. Un cort militar are forma unei prisme patrulatere regulate, iar deasupra o piramidă regulată. Latura bazei este de 4 m, înălţimea piramidei de 1,5 m. Pînza folosită pentru acest cort are lăţimea 0,80 m. Cîţi metri de pînză se vor folosi ?

R. 89 m.

48. Latura unei piramide hexagonale regulate este de 6 cm. Unghiul diedru format de o faţă laterală cu baza este de 45°. Să se afle volumul piramidei.

R. V=162 cm^3.

49. Baza unei piramide este un romb cu latura de 25 dm şi diagonala mică de 30 dm. Inălţimea piramidei cade în centrul rombului şi este egală cu diagonala mare a rombului. Să se afle volumul piramidei.

R. V=8 m^3.

50. Se dă o prismă hexagonală regulată. Diagonala unei feţe laterale este egală cu $2a$ cm şi face cu muchia laterală un unghi cu măsura de 30°. a) Să se calculeze volumul prismei. b) Să se calculeze aria laterală şi volumul piramidei înscrise în prismă, care are ca bază una din bazele prismei, iar vîrful în centrul celeilalte baze. c) Se duce un plan P de secţiune, paralel cu bazele, la o distanţă egală cu $\frac{2}{3}$ din înălţimea prismei faţă de baza piramidei. Să se afle raportul dintre ariile obţinute prin secţiunea prismei şi a piramidei cu planul P.

R. a) $V_{prismă}=\frac{9a^3}{2}$ cm^3; b) $Al_{piramidă}=\frac{3a^2\sqrt{15}}{2}$ cm^2; $V_{piramidă}=\frac{3a^3}{2}$ cm^3; c) $\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{9}$.

IV.19. TRUNCHIUL DE PIRAMIDĂ

51. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are laturile bazelor de 4 cm şi 6 cm. Volumul său este de 44 cm^3. Să se calculeze aria totală.

R. At=92 cm^2.

52. Se dă un trunchi de piramidă cu bazele triunghiuri dreptunghice (ABC şi $A'B'C'$ cu unghiurile drepte în A şi A'). Ştiind că AB=24 cm, AC=54 cm, $A'B'$=6 cm, iar înălţimea I=45 cm, să se determine volumul trunchiului.

R. V=12 757,5 cm^3.

53. Să se afle numărul de puieţi sădiţi de elevii unei şcoli într-o grădină, ştiind că au săpat un volum de 127,4 m^3 de pămînt şi că o groapă are forma unui trunchi de

piramidă patrulateră regulată, cu laturile bazelor de 50 cm şi 30 cm, iar înălţimea trunchiului de 39 cm.

R. 2 000 de puieţi.

54. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are laturile bazelor de 90 cm şi 30 cm. Ştiind că volumul trunchiului este de 156 000 cm^3 să se calculeze aria laterală.

R. $Al=12\,000$ cm^2.

55. Un trunchi de piramidă $ABCDA'B'C'D'$ cu baze pătrate, are $L_4=7/\sqrt{2}$ cm, $l_4=2\sqrt{2}$ cm, muchia $CC'=2{,}5$ cm. Să se determine înălţimea, apotema şi diagonala trunchiului.

R. 2 cm; $\frac{\sqrt{41}}{2\sqrt{2}}$ şi diagonala≈10,9 cm.

56. Un trunchi de piramidă a cărui diagonală este de 10 cm are ca baze dreptunghiuri a căror dimensiuni sînt: 8 cm, 6 cm, respectiv 4 şi 3 cm. Să se determine înălţimea trunchiului.

R. 7,5 cm.

57. Un rezervor are forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată. Adîncimea rezervorului este de 5 m, latura bazei mari de 8,5 m, a bazei mici de 6 m. Cîte tone de păcură încap în acest rezervor, dacă densitatea păcurii este de 880 kg/m^3 ?

R. 234 t.

58. Să se calculeze lucrul mecanic făcut de o macara care ridică la o înălţime de 4 m un bloc de fontă în formă de trunchi de piramidă. Bazele acestui bloc sînt pătrate, cu laturile respectiv de 1 m şi 0,75 m, iar înălţimea sa este de 1,6 m ($d=7\,800$ kg/m^3).

Indicaţie. Formula lucrului mecanic este $L=mgh$, în care m=masa corpului, $g=9{,}8$ m/s^2 şi h=înălţimea la care se ridică corpul.

R. 377 002 g.

IV.20. CILINDRUL

59. Aria laterală a unei coloane cilindrice cu înălţimea de 10 m este de 31,40 m^2. Să se afle volumul şi masa coloanei, ştiind că este făcută din piatră, cu densitatea 3 000 kg/m^3.

R. $V=2{,}5\pi$ m^3; $m=23{,}55$ t.

60. Secţiunea axială a unui cilindru este un pătrat cu diagonala de $6\sqrt{2}$ cm. Să se calculeze volumul şi aria laterală a cilindrului.

R: Latura pătratului bazei=6 cm; $V=54\pi$ cm^3; $Al=36\pi$ cm^2.

61. Pe coşul cilindric al unei fabrici înalt de 15 m şi cu diametrul de 1 m, s-a depus un strat de funingine gros de 5 cm. Ce volum de funingine se scoate la curăţarea coşului ?

R. 2,237 m^3.

62. Un cazan de apă în formă de cilindru are diametrul de 50 cm, iar lungimea lui este de 3,6 m. Cît de mare este presiunea vaporilor pe suprafaţa totală a cazanului, dacă pe un centimetru pătrat presiunea vaporilor este de 10 kg.

Indicaţie: Se va calcula aria totală în centimetri pătraţi, apoi presiunea vaporilor.

R. Aria totală=6,0445 m^2; presiunea=604 450 kg/cm^2.

63. Un dreptunghi are lungimea a şi lăţimea b. Să se afle raportul volumelor celor 2 cilindrii obţinuţi, cînd se roteşte dreptunghiul în jurul lungimii şi apoi în jurul lăţimii sale.

R. $\frac{V_2}{V_1}=\frac{\pi ab^2}{\pi a^2 b}=\frac{b}{a}$.

64. Un puţ adînc de 10 m are căptuşala formată dintr-o zidărie cilindrică groasă de 50 cm. Dacă diametrul interior este de 3 m, care este volumul zidăriei ?

Indicaţie: Se va calcula: raza interioară, raza exterioară, aria bazei (avînd forma unei coloane circulare), apoi volumul.

R. $V=17{,}5$ m^3.

65. Intr-un cilindru, raza bazei este de 2 cm, iar înălţimea de 7 cm. Să se determine raza unui cerc a cărui arie este echivalentă cu aria totală a cilindrului.

R. 6 cm.

66. Să se calculeze volumul unui cilindru a cărui arie laterală este de 100π cm^2, ştiind că secţiunea axială este un pătrat.

R. $V=250\pi$ cm^3.

67. Aria laterală a unui cilindru fiind de 72π cm^2, care este volumul său dacă înălţimea este dublul diametrului bazei ?

R. $V=108\pi$ cm^3.

68. Dintr-o bucată de lemn în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile bazei de 2,4 m, 1,5 m şi înălţimea de 0,6 m, se scot forme cilindrice cu diametrul de 30 cm, avînd aceeaşi înălţime ca bucata de lemn. Cîte forme se pot scoate din această bucată de lemn şi ce cantitate de lemn se pierde ?

R. 40 de forme; $V=0{,}47$ m^3.

69. Cablul telefonic este îmbrăcat într-un înveliş de plumb. Ştiind că diametrul cablului este de 2 cm, iar grosimea învelişului de 2 mm să se afle masa plumbului pentru un cablu de 10 km lungime, ştiind că densitatea plumbului este de 11 400 kg/m^3.

Indicaţie: Se va calcula aria coloanei circulare, volumul şi apoi masa.

R. Masa=157,5 tone.

IV.21. CONUL

70. Raza bazei unui con circular drept este 3. Secţiunea sa paralelă la bază la o distanţă de 3 m de vîrf are raza de 2 m. Să se afle volumul şi aria laterală a conului.

R. $V=42{,}390$ m^3; $Al=50{,}8680$ m^2.

71. Se dă un con cu raza de 15 cm; la distanţa de 24 cm de vîrf se face o secţiune paralelă cu baza. Generatoarea conului obţinut este de 26 cm. Care este volumul conului iniţial ?

R. $V=2\,700\pi$ cm^3.

72. Inălţimea unui con este de 12 cm, iar volumul său este de $1\,024\pi$ cm^3. Să se afle aria laterală şi aria totală a acestui con.

R. $Al=320\pi$ cm^2, $At=576\pi$ cm^2.

73. Un con avînd aria laterală de 540π cm^2 şi raza de 18 cm^2, este tăiat printr-un plan paralel cu baza, la o distanţă de 16 cm de vîrf. Care este raza cercului de secţiune, generatoarea conului astfel format, aria laterală şi volumul acestui con ?

R. $r=12$ cm; $g=20$ cm; $Al=240\pi$ cm^2; $V=768\pi$ cm^3.

74. Un con avînd volumul de 324π cm^3, iar înălţimea de 12 cm, este tăiat printr-un plan paralel cu baza şi dus la o distanţă de 8 cm de vîrf. Să se afle aria laterală şi volumul conului astfel format.

R. $Al=60\pi$ cm^2; $V=96\pi$ cm^3.

75. Jumătate din înălţimea unui con întrece cu 1 cm a treia parte a razei cercului de bază, iar suma razei şi înălţimii este de 7 cm. Să se afle elementele conului (raza, înălţimea, generatoarea), aria laterală şi volumul conului.

R. $R=3$ cm; $I=4$ cm; $G=5$ cm; $Al=15\pi$ cm^2; $V=12\pi$ cm^3.

76. O grămadă de piatră spartă are forma conică cu raza de 2,8 m şi generatoarea de 3,5 m. Cîte căruţe trebuie pentru a transporta piatra spartă, depozitată în 10 grămezi, ştiind că un metru cub de piatră are masa de 3 t, iar într-o căruţă se încarcă 500 kg?

R. 1 034 de căruţe.

77. Intr-o mină s-a întrebuinţat un explozibil care a produs în pămînt, prin explozie, o pîlnie cu un diametru de 4 m, adîncimea pîlniei fiind de 1,5 m. Ce cantitate de pămînt se aruncă, ştiind că un metru cub de pămînt are masa de 1 650 kg ?

R. 10,362 tone.

IV.22. TRUNCHIUL DE CON

78. Un trunchi de con în care suma razelor este cît raza unui cerc cu aria de 625π cm^2 are înălţimea de 7 cm şi generatoarea de $7\sqrt{2}$ cm. Să se afle volumul trunchiului.

R. $R=16$ cm; $r=9$ cm; $V=\frac{3\ 367\pi}{3}$ cm^3.

79. Intr-un trunchi de con, înălţimea este de 8 m. Ea este media aritmetică a celor două raze. Să se afle volumul trunchiului, ştiind că generatoarea este de $8\sqrt{2}$ cm.

R. $R=12$ cm; $r=4$ cm; $V=\frac{1\ 664\pi}{3}$ cm^3.

80. Fie $ABCD$ un trapez isoscel, în care AB este baza mică şi CD cea mare $[BC]\equiv[AD]$. Considerăm punctele M şi N aşezate respectiv la mijloacele laturilor BC şi AD. Se dă $MN=13$ dm şi diferenţa bazelor de 10 dm. Din învîrtirea trapezului în jurul dreptei care uneşte mijloacele bazelor rezultă un trunchi de con. Ştiind că generatoarea lui este medie proporţională între razele cercurilor de bază, se cere volumul trunchiului de con.

Indicaţie. MN=semisuma bazelor trapezului. Din rezolvarea unui sistem de ecuaţii se găseşte că bazele trapezului sînt de 8 dm şi 18 dm. Razele bazelor trunchiului de con sînt: $R=9$ dm şi $r=4$ dm. De aici se deduce generatoarea de 6 dm şi apoi înălţimea.

R. $V=\frac{133\sqrt{11}\pi}{3}$ dm$^3\approx461$ dm^3.

81. Intr-un trunchi de con, razele sînt proporţionale cu numerele 3 şi 2, $\frac{1}{3}$ din raza mare întrece cu 2 cm $\frac{1}{4}$ din raza mică. Generatoarea trunchiului face cu planul bazei mari un unghi cu măsura de 45°. Să se afle aria laterală şi volumul trunchiului de con.

R. $Al=80\sqrt{2}\pi$ cm^2; $V=\frac{1\ 216\pi}{3}$ cm^3.

82. Suma celor două raze ale unui trunchi de con este de 25 cm, iar diferenţa lor 9 cm. Ştiind că generatoarea formează cu planul bazei un unghi cu măsura de 45^o, să se afle cele două raze şi volumul trunchiului de con.

R. R=75 cm; r=8 cm; V=1 467 π cm^3.

83. Un trunchi de con cu înălţimea de 18 cm are suma razelor bazelor de 16 cm, iar $\frac{3}{11}$ din raza mare este cu 2 cm mai mică decît raza mică. Inălţimea este împărţită în trei părţi egale şi prin punctele de diviziune se fac două secţiuni paralele cu bazele. Să se afle ariile acestor două secţiuni.

R. 49 π cm^2; 81 π cm^2.

84. Intr-un trunchi de con raza mică este cu 2 cm mai mică decît raza mare, iar media aritmetică a celor două raze este de 0,004 dam; înălţimea trunchiului este de 12 cm. Din acest trunchi se taie două conuri care au ca bază bazele trunchiului dat, iar generatoarele unuia sînt în continuarea generatoarelor celuilalt. In ce raport se află volumele celor două conuri astfel obţinute ?

R. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{27}{125}$.

85. Raza mică a unui trunchi de con este cu 1 cm mai mare decît $33\frac{1}{3}\%$ din raza mare. Inălţimea conului ce se formează prin prelungirea generatoarelor trunchiului dat este de 9 cm, iar înălţimea trunchiului este de 5 cm. Să se afle: a) aria laterală a trunchiului; b) volumul trunchiului de con; c) măsura unghiului ce-l formează generatoarea cu planul bazei mari.

R. $A=65\sqrt{2}\ \pi$ cm^2, $V=\frac{665\pi}{3}$ cm^3; 45^o.

86. Un trunchi de con şi un con au generatoarele şi ariile lor laterale egale. Raza mică a trunchiului de con mărită cu 1 cm şi apoi micşorată de 2 ori este tot atît cît 20% din raza mare a trunchiului mărită cu $\frac{1}{10}$ dm. Raportul razelor trunchiului de con este exprimat prin $2\frac{1}{2}:4\frac{1}{6}$. Să se calculeze raza conului.

R. R=8 cm.

87. Un trapez dreptunghic în care baza mică este egală cu înălţimea se roteşte complet în jurul laturii perpendiculare pe bază. Să se afle aria laterală a corpului format prin această rotaţie, ştiind că 20% din latura oblică faţă de baze este cu 2 cm mai mică decît 50% din înălţimea trapezului, iar suma acestor lungimi este de 18 cm.

R. Aria laterală = 220 π cm^2.

88. Se circumscrie unui trunchi de piramidă regulată, cu bazele pătrate un trunchi de con. Să se determine aria laterală, aria totală şi volumul trunchiului de con, ştiind că laturile pătratelor de bază ale trunchiului de piramidă sînt egale respectiv cu 70 cm şi 40 cm, iar apotema este de 20 cm.

R. $Al\approx$6 088 cm^2; $At\approx$16 292 cm^2; $V\approx$65 603,8 cm^3.

89. Aria secţiunii axiale a unui trunchi de con este egală cu diferenţa ariilor bazelor,

iar razele bazelor sînt R şi r. Să se exprime în funcţie de R şi r, volumul trunchiului de con.

Indicaţie: Notînd cu h înălţimea trunchiului, obţinem:

$$\pi(R+r)h=\pi(R^2-r^2) \rightarrow h=(R-r).$$

R. $V=\frac{\pi^2}{3}(R^3-r^3)$.

90. Din două foi de tablă galvanizată trebuie confecţionată o pîlnie cu diametrul superior de 100 mm, cel inferior de 20 mm şi înălţimea de 50 mm. Cît material se consumă, dacă pentru încheieturi se adaugă 3% ?

R. $\approx 124{,}20\ cm^2$.

91. Un coş de fabrică, în formă de trunchi de con, înalt de 30 m, are diametrul exterior la bază de 3,6 m şi la vîrf de 2,4 m. Diametrul interior al coşului este (pe toată înălţimea) de 1,6 m. Să se afle masa acestui coş, ştiind că 1 m^3 de zidărie are masa de 1 800 kg.

R. 278 t.

92. Intr-un triunghi dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A)=90^0$, $BC=45$ cm şi $AC=27$ cm se duce o paralelă MN la AB la $\frac{5}{9}$ din AC. Să se afle ariile laterale ale corpurilor ce se formează prin rotaţia în jurul catetei AB şi în jurul segmentului $MA(M\in AC)$ a lui $AMNB$.

R. $Al=5\ 086{,}8\ cm^2$; $Al_{trunchi\ con}=1\ 300\ \pi\ cm^2$.

93. O coloană de beton în formă de trunchi de con are diametrele bazelor, respectiv de 50 cm şi 30 cm, iar înălţimea de 6 m. Să se determine masa coloanei, ştiind că densitatea betonului este de 2 200 kg/m^3.

R. 1 692,46 kg.

94. Se dă un trapez isoscel care se roteşte în jurul dreptei ce uneşte mijloacele laturilor paralele. Cunoscînd că laturile paralele sînt egale, respectiv cu 24 şi 36 cm şi laturile neparalele sînt de cîte 20 cm, să se determine ariile laterală şi totală şi volumul corpului generat prin rotaţie.

R. $Al=1\ 884\ cm^2$; $At=3\ 353{,}52\ cm^2$; $V=13\ 638{,}276\ cm^3$.

95. Un trapez isoscel $ABCD$ se roteşte pe rînd în jurul bazelor sale. a) Să se determine aria şi volumul corpurilor generate prin rotaţie ştiind că laturile paralele sînt egale, respectiv, cu 24 cm şi 36 cm, iar laturile neparalele sînt egale cu 10 cm. b) Să se menţioneze corpurile ce se formează prin rotaţia trapezului în jurul laturii neparalele şi să se facă schiţa.

R. a) Aria corp.$=544\ \pi\ cm^2$; $V=1\ 792\ \pi\ cm^3$; aria corp.$=736\ \pi\ cm^2$; $V=2\ 048\ \pi\ cm^3$; b) două conuri şi un trunchi de con.

IV.23. SFERA

96. O parte din acoperişul unui ateneu avînd forma unei jumătăţi de sferă este învelit cu tablă groasă de 3 mm. Ce masă are tabla întrebuinţată, ştiind că densitatea tablei este de 8 500 kg/m^3, iar raza sferei este de 3,6 m ?

Indicaţie: Se vor calcula volumele interior şi exterior.

R. Masa$\approx$2 t.

97. Un cazan pentru păcură are forma de cilindru, prevăzut la capete cu cîte o jumătate de sferă. Lungimea cazanului (partea cilindrică) este de 10 m, iar diametrul lui este de 4 m. Să se afle capacitatea lui. Cîte cazane sînt necesare pentru a umple un rezervor mare cilindric, înalt de 20 m şi cu lungimea cercului de bază de 40 π m ?

Indicaţie. Pentru a afla capacitatea cazanului se află întîi volumul şi apoi se ţine seamă de relaţia: 1 m^3 corespunde 10 hl.

R. $\frac{1\,520\pi}{3}$ hl; 16 cazane.

98. Intr-o sferă cu diametrul de $12\sqrt{2}$ cm este înscris un cilindru. Să se calculeze raza şi înălţimea cilindrului, aria laterală şi volumul lui, ştiind că secţiunea axială a cilindrului este un pătrat.

R. $r=6$ cm; $I=12$ cm; $Al=144\pi$ cm^2; $V=432\pi$ cm^3.

99. Intr-o sferă cu raza de 6 cm este înscris un con echilater. Să se afle elementele conului (rază, generatoare, înălţime), aria laterală şi volumul lui.

R. $R=3\sqrt{3}$ cm; $G=6\sqrt{3}$ cm; $I=9$ cm; $Al=54\pi$ cm^2; $V=81\pi$ cm^3.

100. Unui cub cu muchia de 8 cm i se circumscrie o sferă. Să se afle aria sferei.

R. Aria sferei $=192\pi$ cm^2.

101. Care este raportul dintre aria Pămîntului şi cea a Lunii, ştiind că diametrul Pămîntului este egal cu $3\frac{2}{3}$ ori diametrul Lunii ?

R. $\frac{121}{9}$.

102. O sferă are raza de 5 cm; se duce o secţiune la 3 cm de centru. Să se afle volumul conului care are vîrful în centrul sferei, iar ca bază secţiunea obţinută.

R. $V=50{,}240$ cm^3.

103. Intr-un con, 0,125 din înălţime este cu 3 cm mai mică decît 2/5 din generatoarea sa, iar diferenţa dintre generatoare şi înălţime este 0,2 dm. Să se afle volumul sferei înscrisă în acel con.

R. $V=36\pi$ cm^3.

104. O sferă cu diametrul de 20 cm este încărcată cu o sarcină electrică de 314 coulombi. Să se calculeze densitatea superficială a sarcinii, ştiind că ea este egală cu raportul dintre sarcină şi aria pe care este distribuită şi că se exprimă în coulombi pe cm pătrat.

R. 0,25 C/cm^2.

105. Intr-o sferă cu raza de 8,5 cm se duce o secţiune plană cu raza de 3 cm. Să se calculeze ariile calotelor determinate de această secţiune.

R. $S_1=29{,}36$ cm^2; $S_2=878{,}10$ cm^2.

106. Se dă o sferă cu diametrul de 240 cm care se intersectează cu două plane paralele. Să se afle aria şi volumul zonei sferice determinate, ştiind că unul din plane trece prin centrul sferei, iar celălalt la distanţa de 30 cm de centrul sferei.

R. 22 608 cm^2; 132 822 cm^3.

IV.24. PROBLEME DE GEOMETRIE PLANĂ ŞI IN SPAŢIU

1. Se dă un trapez isoscel în care diferenţa lungimilor bazelor este de 2 cm iar segmentul care uneşte mijloacele laturilor neparalele este de 6 cm; latura neparalelă face cu baza un unghi de 60^o. Să se calculeze lungimile bazelor şi aria trapezului.

R. $B=7$ cm; $b=5$ cm; aria$=6\sqrt{3}$ cm^2.

2. Să se găsească pe latura AD a triunghiului ADE un punct I, astfel ca segmentul IM paralel cu baza DE a triungiului să fie congruent cu ID.

3. Un trapez are baza mare de 23 m, baza mică de 14 m şi înălţimea de 12 m. Să se calculeze lungimea segmentului dus în interiorul trapezului, paralel cu bazele şi la distanţă de 4 m de baza cea mare.

R. 20 m.

4. Se dă dreptunghiul $ABCD$, în care $AD=15$ m şi $AB=18$ m. Să se construiască un dreptunghi $A'B'C'D'$ cu vîrfurile situate respectiv pe laturile AB, BC, CD şi DA, astfel ca raportul $\frac{A'B'}{A'D'}=\frac{1}{2}$.

Indicaţie: Se vor lua următoarele necunoscute: $AA'=x$, $AD'=y$. Se observă că $\sphericalangle AD'A' \equiv \sphericalangle BA'B'$ avînd laturile perpendiculare. Rezultă $\Delta AA'D' \sim \Delta BB'A'$; $\Delta AD'A' \equiv \Delta CB'C'$ şi $\Delta DC'D' \equiv \Delta BA'B'$. Se găseşte $x=8$, $y=14$.

5. Baza unui triunghi este $AB=14$ m. Celelalte două laturi sînt $AC=15$ m şi $BC=13$ m. Se duce o paralelă MN la bază ($M \in AC, N \in BC$) astfel încît $AM+BN=MN$. Să se afle cele două segmente, AM şi BN

Indicaţie: Notăm cele două segmente cu x şi y. $MN=x+y$, $MC=15-x$, $NC=13-y$.

R. 5 m; $4\frac{1}{3}$ m.

6. Un paralelipiped dreptunghic are aria laterală de 450 cm^2 şi înălţimea de 9 cm. Ştiind că $\frac{1}{3}$ din lungimea bazei este egală cu $\frac{1}{2}$ din lăţimea ei, să se afle volumul şi masa, cunoscînd că $\rho=7{,}8$ g/cm^3.

R. $V=1\,350$ cm^3; $m=10{,}530$ kg.

7. Un paralelipiped dreptunghic are înălţimea de 5 cm iar aria laterală de 160 cm^2. Ştiind că $\frac{1}{2}$ din lungimea bazei plus $\frac{1}{3}$ din lăţime fac împreună 7 cm, să se afle laturile bazei şi volumul paralelipipedului dreptunghic.

R. $L=10$ cm; $l=6$ cm; $V=300$ cm^3.

8. Aria laterală a unui paralelipiped dreptunghic este de 72 m^2, înălţimea lui este de 6 m. Dimensiunile dreptunghiului de la bază sînt în raport de $\frac{1}{2}$. a) Să se afle dimensiunile dreptunghiului de bază. b) Aceeaşi chestiune în cazul cînd raportul dimensiunilor este de $\frac{3}{5}$, aria laterală 256 m^2 şi înălţimea de 8 m.

R. a) $l=2$ m; $L=4$ m; b) $l=6$ m: $L=10$ m.

9. Un rezervor de benzină de forma unui paralelipiped dreptunghic are diagonala bazei de 10 m şi această diagonală formează cu una din laturi un unghi de 40°30'. Diagonala paralelipipedului formează cu diagonala bazei un unghi de 75°. Să se calculeze volumul şi aria laterală a rezervorului.

Indicaţie: Se aplică pe rînd funcţiile trigonometrice în cele două triunghiuri dreptunghice ce se formează cu cele două diagonale.

R. $L=7{,}6$ m; $l=6{,}5$ m; $l=37{,}3$ m; $V\approx1\,843$ m^3; $Al\approx1\,052$ m^2.

10. Baza unui paralelipiped este un romb. Secţiunile diagonale sînt perpendiculare pe planul bazei avînd respectiv ariile de 100 cm^2 şi 105 cm^2, iar lungimea liniei intersecţiei lor este egală cu 10 cm. Să se determine: a) volumul acestui paralelipiped; b) aria laterală; c) aria totală.

Indicaţie. Feţele laterale sînt dreptunghiuri cu baza cît latura rombului şi înălţimea de 10 cm. Se obţine: $l=\sqrt{52{,}5625}=7{,}25$ cm.

R. a) $V=525$ cm^3; b) $Al=290$ cm^2 c) $At=398$ cm^2.

11. Intr–un paralelipiped cu baza un dreptunghi, diferenţa dintre pătratul diagonalei dreptunghiului de bază şi pătratul unei laturi a dreptunghiului este de 65, iar suma acestor două lungimi (diagonala bazei şi una din laturile dreptunghiului) este de 13 cm. Înălţimea paralelipipedului este media proporţională a aceloraşi lungimi. Să se calculeze diagonala paralelipipedului.

R. $3\sqrt{13}$ cm.

12. O cutie de sticlă (transparentă) are formă de paralelipiped dreptunghic. Una dintre muchiile sale este de 12 cm, iar celelalte sînt necunoscute. Cutia conţine o cantitate de apă. Dacă aşezăm cutia astfel ca faţa cu dimensiunile necunoscute să fie baza, apa se ridică pînă la o înălţime de 2 cm; dacă o aşezăm astfel ca una sau alta dintre feţele ei să fie orizontală, apa se ridică o dată pînă la înălţimea de 3 cm şi a doua oară pînă la înălţimea de 4 cm. a) Să se afle dimensiunile cutiei. b) Cîtă apă conţine cutia ? c) Cîtă apă ar conţine cutia dacă ar fi plină ?

R. a) 12 cm; 18 cm; 24 cm; b) 864 cm^3; c) 5 184 cm^3.

13. Secţiunea transversală printr–o grindă de forma unei prisme drepte avînd lungimea L este un trapez dreptunghic cu perimetrul p şi suma laturilor neparalele S. Să se calculeze ariile feţelor laterale paralele ale grinzii, ştiind că diferenţa acestor arii este d. *Aplicaţie numerică:* $L=8$ m; $p=1{,}6$ m; $S=0{,}8$ m; $d=3{,}2$ m^2.

Indicaţie: Se notează cu x şi y bazele trapezului şi se obţine sistemul: $\begin{cases} p=x+y+S, \\ Ly-Lx=d \end{cases}$

R. $x=0{,}2$ m; $y=0{,}6$ m; Aria$_1=xL=1{,}6$ m^2; Aria$_2=yL=4{,}8$ m^2.

14. Un bazin de înot are forma de paralelipiped dreptunghic. La un moment dat, bazinul cuprinde o anumită cantitate de apă. După un timp oarecare bazinul pierde prin evaporare o cantitate Q m^3 de apă. Să se calculeze nivelul iniţial şi cel final din bazin, precum şi volumul de apă iniţial, ştiind că aria fundului bazinului este S, iar nivelul la care ar ajunge apa, dacă peste cantitatea iniţială s–ar adăuga cea rămasă după

evaporare, ar fi de L m. *Aplicaţie numerică:* $Q=600\ m^3$; $S=1\ 500\ m^2$; $L=3$ m.

Indicaţie: Notînd cu x înălţimea iniţială a apei şi cu y înălţimea finală a apei obţinem: $\begin{cases} x-y=\frac{Q}{S} \\ x+y=L \end{cases}$.

R. $x=1{,}7$ m; $y=1{,}3$ m; V iniţial$=2\ 550\ m^3$.

15. Intr–o piramidă cu baza un dreptunghi, lungimea bazei este cu 4 cm mai mare decît lăţimea. Dacă mărim lungimea bazei cu 2 cm, iar lăţimea cu 2 cm, aria bazei creşte cu 44 cm^2. Ştiind că feţele laterale mai mici fac cu baza un unghi cu măsura de 45^o, să se afle laturile bazei şi volumul piramidei.

R. $L=12$ cm; $l=8$ cm; $V=192\ cm^3$.

16. O piramidă are ca bază un dreptunghi cu perimetrul de 40 cm. Dacă mărim lungimea bazei cu 3 cm şi micşorăm lăţimea bazei cu 2 cm, aria bazei se micşorează cu 6 cm^2. Ştiind că înălţimea piramidei este cît $\frac{1}{2}$ din lungimea bazei, să se afle laturile bazei, aria laterală şi volumul piramidei. Vîrful piramidei se proiectează în punctul de intersecţie al diagonalelor.

R. $Al=(48\sqrt{2}+24\sqrt{13})\ cm^2$; $V=192\ cm^3$.

17. Diferenţa între apotemă şi înălţimea unei piramide hexagonale regulate este de 8 cm. Ştiind că apotema poligonului de bază este de 20 cm, să se afle volumul piramidei, ariile laterală şi totală (exprimate în dm).

R. $V=9{,}68\ dm^3$; $Al\approx 20{,}10\ dm^2$; $At\approx 33{,}95\ dm^2$.

18. O piramidă are baza un trapez isoscel $ABCD$, în care CD este baza mică, AB este baza mare şi $[BC]\equiv[AD]$. Inălţimea trapezului este de 15 cm, iar înălţimea piramidei de 1 m. Ştiind că înălţimea piramidei cade în mijlocul M al bazei mari, iar laturile CD şi AB sînt respectiv egale cu cantităţile x şi y date de sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{363}\,x+\sqrt{300}\,y}{\sqrt{3}}=580, \\ \dfrac{\sqrt{52}\,x-\sqrt{13}\,y}{\sqrt{13}}=4 \end{cases}$$

Se cere să se afle volumul piramidei şi lungimile muchiilor piramidei.

R. $AB=36$ cm; $CD=20$ cm; $BC=17$ cm; $V=14\ dm^3$; $VA=VB\approx 101{,}6$ cm; $VC=VD\approx 101{,}6$ cm.

19. O piramidă are ca bază un triunghi dreptunghic în care una din catete este de 15 cm, iar cealaltă catetă este mai mică decît ipotenuza. Inălţimea piramidei este cu 20% mai mare decît ipotenuza triunghiului de bază. a) Să se afle aria secţiunii făcută în această piramidă printr–un plan paralel cu baza dus la $\frac{2}{3}$ din înălţime faţă de planul bazei. b) Să se afle volumul piramidei care are ca bază secţiunea aceasta şi vîrful comun cu vîrful piramidei date.

R. a) $A=16\frac{2}{3}\ cm^2$; b) $V=55\frac{5}{9}\ cm^3$.

20. O piramidă are baza un triunghi dreptunghic ale cărui catete sînt în raportul $\frac{3}{2}$, iar diferenţa dintre segmentele determinate de înălţimea triunghiului pe ipotenuză este de 2 cm. Să se afle volumul piramidei, ştiind că înălţimea ei este de $2\frac{1}{2}$ ori mai mare decît ipotenuza triunghiului de bază.

R. $V=27{,}04$ cm^3.

21. Un elev îşi construieşte o piramidă triunghiulară regulată, cu muchiile din sîrmă. Pentru confecţionarea piramidei a folosit 1,08 m sîrmă. Ştiind că muchia laterală este cu 16 cm mai mare decît latura bazei, să se afle latura triunghiului de bază, muchia piramidei şi înălţimea corpului construit.

R. 10 cm; 26 cm; $\sqrt{1\ 928/3}$ cm.

22. Intr–un trunchi de piramidă regulată, aria laterală este de 480 cm^2, iar apotema trunchiului 8 cm. Ştiind că $\frac{1}{3}$ din latura bazei mari întrece cu 3 cm $\frac{1}{4}$ din latura bazei mici, să se afle laturile celor două baze şi volumul trunchiului de piramidă.

R. $L_4=18$ cm; $l_4=12$ cm; $V=\frac{\sqrt{55}}{3}(324+216+144)$cm^3.

23. Un dig de beton armat are secţiunea un trapez cu baza mică de 3 m, înălţimea de 2 m, iar laturile neparalelele ale trapezului fac cu planul bazei unghiuri de 30° şi 45° Lungimea digului este 100 m. Cîţi metri cubi de beton sînt necesari pentru construirea digului şi ce masă are acest dig, cunoscînd că densitatea betonului este 2 500 kg/m^3.

R. $V=1\ 146$ m^3; $m=2\ 865$ t.

24. Un triunghi de piramidă patrulateră regulată are apotema de 17 cm iar aria laterală de 1 904 cm^2. Diferenţa dintre ariile celor două baze este de 896 cm^2. Să se afle volumul trunchiului de piramidă.

R. $V=12\ 080$ cm^3.

25. Un trunchi de piramidă patrulateră are latura pătratului bazei mari de 20 cm, iar 25% din apotema trunchiului este cu $1\frac{1}{6}$ cm mai mare decît 0,1(6) din înălţimea lui. Diferenţa dintre apotemă şi înălţime fiind de 0,2 dm, să se afle aria laterală a trunchiului.

R. $Al=560$ cm^2.

26. Un trunchi de piramnidă are bazele dreptunghiri; dimensiunile bazei mari sînt în raport de $\frac{3}{4}$, iar diferenţa acestor dimensiuni este de 4 cm. Ştiind că raportul perimetrelor celor două baze este $\frac{1}{4}$, iar diagonala trunchiului este de 2,05 dm, să se afle aria secţiunii diagonale a trunchiului de piramidă.

R. $A\approx 203{,}10$ cm^2.

27. Intr–un trunchi de piramidă hexagonală regulată se cunosc următoarele date: a) media aritmetică dintre latura bazei mari şi latura bazei mici este de 7 cm; b) $\frac{1}{3}$

din apotema bazei mici este egală cu $\frac{1}{4}$ din apotema bazei mari; c) apotema trunchiului de piramidă este medie proporțională între cele două apoteme ale bazelor. Să se calculeze cît la sută din apotema trunchiului de piramidă reprezintă înălțimea corpului.

R. $L_6=8$ cm; $l_6=6$ cm; 96,8%.

28. Laturile bazelor unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată sînt în raport de $\frac{1}{2}$. Latura bazei mici micșorată de trei ori și apoi mărită cu 2 cm este cît $\frac{1}{2}$ din latura bazei mari. Fețele laterale ale trunchiului formează un unghi de 60^o cu planul bazei. Să se afle volumul trunchiului.

R. $V=\frac{63\sqrt{3}}{8}$ cm^3.

29. Diferența laturilor de bază ale unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată este de 2 dm, apotema trunchiului este de 40 dm, iar aria laterală este de 2 400 dm^2. Să se afle ariile triunghiurilor de bază ale trunchiului, apoi să se compare raportul acestor arii cu raportul dintre laturile triunghiurilor de bază.

R. $Aria_1=\frac{441\sqrt{3}}{4}$ dm^2; $Aria_2=\frac{361\sqrt{3}}{4}$ dm^2.

30. Un elev își construiește, din sîrmă, un model de trunchi de piramidă patrulateră regulată, folosind 156 cm de sîrmă. Știind că perimetrul unei fețe laterale este de 48 cm, iar latura bazei mici este de 2/3 din latura bazei mari, să se afle laturile celor două baze și muchia laterală a trunchiului de piramidă.

R. $L=18$ cm; $l=12$ cm; $m=9$ cm.

31. Un dreptunghi cu perimetrul de 34 cm se rotește în jurul laturii mici. Se știe că lungimea întrece cu 7 cm lățimea. Se cer: a) volumul și aria corpului generat; b) volumul și aria prismei patrulatere regulate înscrise în cilindrul rezultat.

R. 1) $V=2\,260{,}80$ cm^3; $A=1\,281{,}12$ cm^2. 2) $V=1\,440$ cm^3, $A=914{,}40$ cm^2.

32. Un rezervor de benzină în formă de paralelipiped dreptunghic are dimensiunile bazei în raportul de $\frac{10}{15{,}7}$, diferența acestor dimensiuni este de 5,7 m, iar înălțimea de 8 m. Cîte cisterne în formă de cilindru sînt necesare pentru a umple acest rezervor, știind că cisterna are diametrul de 3 m, iar lungimea de 4 m?

R. 44 de cisterne.

33. Să se determine R și G ale unui cilindru drept, Stiind că înălțimea este cu 5 cm mai mare decît raza, iar raportul lor este de $\frac{7}{2}$.

R. $R=2$ cm; $G=7$ cm.

34. Să se afle aria laterală și volumul unui cilindru circular drept știind că raza cilindrului este cu 1 cm mai mare decît $\frac{1}{3}$ din generatoare, iar media aritmetică între înălțime și rază este 6,5 m.

R. $Al=72\pi$ cm^2; $V=144\pi$ cm^3.

35. Un tub cilindric confecționat din cupru, avînd densitatea de ϱ kg/m^3 are masa de m kg. a) Să se calculeze diametrul interior și diametrul exterior al tubului, știind că suma lor este S, iar lungimea tubului este L. b) Să se calculeze diferența dintre aria suprafeței laterale exterioare și aria suprafeței interioare. *Aplicație numerică:* $S=0{,}2$ m; $L=12$ m: $\varrho=8\,900$ kg/m^3; $m=134{,}14$ kg.

Indicație: Dacă notăm razele cu x și y, se obține sistemul: $\begin{cases} x^2-y^2=\dfrac{m}{\pi \varrho L}, \\ x+y=S \end{cases}$.

R. $x=1{,}01$ dm; $y=0{,}99$ dm; ≈ 15 dm^2.

36. Să se calculeze volumul unui con circular drept, știind că aria laterală este de patru ori mai mare decît aria bazei, iar înălțimea cu 5 cm mai mare ca raza.

Indicație: Notînd $R=x$, $I=y$, se obține din datele problemei:

$$G=\sqrt{I^2+R^2}=\sqrt{x^2+y^2}=4x;\ y-x=5.$$

R. $\dfrac{\pi}{3}\cdot\dfrac{125\sqrt{15}}{(\sqrt{15}-1)^3}\approx 19$ cm^3.

37. Intr–un con este înscris un cilindru care are aria totală echivalentă cu aria laterală a conului. Unghiul maxim dintre două generatoare de la vîrful conului este drept. Să se demonstreze că distanța de la vîrful conului pînă la baza superioară a cilindrului este egală cu jumătate din generatoarea conului.

Indicatie: Se notează raza cilindrului cu r, iar raza conului cu $(r+x)$, generatoarea conului cu G și din echivalența ariilor se scoate:

$$\pi G(r+x)=2\pi r(r+x);\ \text{apoi } G=2r.$$

38. Un trapez dreptunghic are baza mică egală cu înălțimea. Aceasta este cu 12 cm mai mică decît baza mare, iar latura oblică este de 15 cm. Trapezul se rotește în jurul bazei mari, dînd naștere unui corp al cărui volum și arie se cer.

R. $V=3\,306{,}420$ cm^3; $A=1\,186{,}92$ cm^2.

39. Raza unui con circular drept este de 3 dm, iar raza cercului determinat de un plan de secțiune dus la 1 dm de bază este de 10 cm. Să se afle înălțimea și generatoarea conului.

R. $G=3{,}35$ dm; $I=1{,}5$ dm.

40. Inălțimea unui trapez dreptunghic este: jumătate din baza mică, de $3\frac{1}{3}$ ori mai mică decît baza mare și cu 2 cm mai mică decît latura neparalelă a trapezului. Știind că perimetrul trapezului este de 24 cm, să se afle aria laterală a corpului format prin rotirea în jurul laturii perpendiculare pe bază.

R. 251,20 cm^2.

41. Raza unui con circular drept este de 4 ori mai mare decît 0,(3) din înălțimea lui, iar diferența dintre raza și înălțimea conului este de 2 cm. La $\frac{2}{3}$ din înălțime față de baza conului se face o secțiune paralelă cu baza. Să se afle raportul ariilor laterale ale corpurilor formate: con și trunchi de con. Cît la sută reprezintă aria laterală a trunchiului de con ?

R. $\frac{1}{8}$; 12,5%.

42. Un triunghi dreptunghic are o catetă de 12 cm, iar suma dintre ipotenuză şi cealaltă catetă este de 24 cm. Să se afle volumul corpului format prin rotaţia completă a triunghiului dreptunghic în jurul ipotenuzei.

R. $V=259{,}2\pi$ cm^3.

43. Baza mică a unui trapez dreptunghic mărită cu o treime a ei este tot atît cît 25% din baza mare, mărită cu lungimea bazei mici. Inălţimea trapezului este de 4 cm, iar diferenţa bazelor este de 3 cm. Să se afle volumul corpului format prin rotaţia completă a trapezului dreptunghic în jurul bazei mici.

R. $V=176\pi$ cm^3.

44. Un turn de formă cilindrică are un vîrf conic a cărui bază este egală cu baza cilindrului. a) Să se calculeze înălţimea totală a turnului, ştiind că ea este de n ori mai mare decît înălţimea părţii cilindrice. b) Volumul total al turnului fiind V, iar raza R, să se calculeze aria laterală a turnului.

Aplicaţie numerică: $n=6$; $R=3$ m; $V=150{,}72$ m^3.

R. a) Inălţimea totală=12 m; b) aria turnului≈132 m^2.

45. Capsula de protecţie a aparatajului instalat în vîrful unei rachete meteorologice are forma din figura IV.1, a–b. Ştiind că ea are masa de m kg şi este confecţionată dintr–un aliaj special, avînd densitatea de ϱ kg/m^3, să i se calculeze înălţimea. Raza bazei este de R cm, iar raportul dintre lungimea porţiunii de metal şi lungimea porţiunii goale de–a lungul axei de simetrie a capsulei este K. *Aplicaţie numerică:* $m=5{,}338$ kg; $R=10$ cm; $\varrho=8\,500$ kg/m^3; $K=\frac{1}{5}$.

R. ≈35 cm.

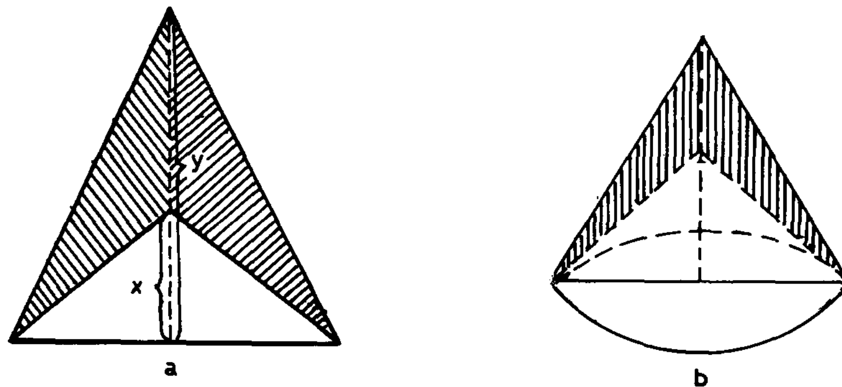


Fig.IV.1

46. Intr–un trunchi de con, lungimile razei sînt proporţionale cu numerele 3 şi 2, iar $\frac{1}{3}$ din raza mare întrece cu 2 cm $\frac{1}{4}$ din raza mică. Generatoarea trunchiului are lungimea egală cu 5 cm. Să se afle aria laterală şi volumul trunchiului.

R. $Al=100\pi$ cm^2; $V=30\pi$ cm^3.

47. Intr–un trunchi de con suma lungimilor razelor este egală cu lungimea unei sfere avînd aria de 400 πcm^2. Ştiind că raza mare întrece cu 1 cm dublul razei mici, iar înălţimea este cît raza mare, să se afle lungimile celor două raze, aria laterală şi volumul trunchiului de con.

R. $R=7$ cm; $r=3$ cm; $Al=10\sqrt{65}\,\pi$ cm^2; $V=\frac{553\pi}{3}$ cm^3.

IV.25. PROBLEME RECAPITULATIVE DE GEOMETRIE PLANĂ ŞI IN SPAŢIU

A. GEOMETRIE PLANĂ

1. In triunghiul ABC se duc înălţimile AA' şi BB' ce se intersectează în H şi fac cu AB unghiurile avînd măsurile de 50° şi respectiv de 10°. 1) Să se afle măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

Să se arate că: 2) $AC+BC=2(A'C+B'C)$; 3) $A'H^2+A'C^2=\frac{BH^2+AC^2}{4}$.

R. m($\sphericalangle A$)=80°; m($\sphericalangle B$)=40°; m($\sphericalangle C$)=60°.

2. Pe laturile AB şi AC ale triunghiului ABC se construiesc, în exterior, pătratele $ABDE$ şi $ACFG$. BG se intersectează cu EC în P.

Să se demonstreze că: 1) $[EC]\equiv[BG]$; 2) AP este bisectoarea unghiului EPG. 3) Să se arate că triunghiul EPG este dreptunghic.

3. Se dă trapezul isoscel $ABCD$, $[AB]\equiv[DC]$. Pe baza mare BC se iau segmentele $[MB]\equiv[CN]$ în sensuri opuse. Fie Q intersecţia segmentelor AN şi MD. Să se arate că:

1) $[MD]\equiv[AN]$; 2) triunghiul MQN este isoscel.

3) Notînd cu P intersecţia prelungirii laturilor egale ale trapezului isoscel să se arate că PQ este bisectoarea unghiului P.

4) Să se arate că ΔPMN este isoscel.

4. Intr–un cerc cu diametrul $AB=24$ cm se înscrie un trapez isoscel $ABCD$. Latura BC formează cu diametrul un unghi cu măsura 60°. Pe semicercul opus celui în care este înscris trapezul, se consideră un punct M din care se coboară perpendiculara MP pe AB. 1) Să se afle perimetrul poligonului $AMBCD$ ştiind că unghiul format de coarda MB cu diametrul AB are măsura de 30°. 2) Să se determine poziţia lui M pe semicerc, astfel încît perimetrul poligonului să fie minim. 3) Să se calculeze în acest caz perimetrul poligonului.

R. 1) $12(4+\sqrt{3})$ cm; 3) Per.minim$=5R$.

5. Laturile unui paralelogram $ABCD$ sînt $AB=10$ cm; $AD=9$ cm. Diagonalele $BD\cap AC=\{O\}$. Aria $\Delta AOB=18$ cm^2. 1) Să se calculeze diagonalele paralelogramului. 2) Să se construiască paralelogramul $ABCD$.

R. 1) $BD=17$ cm; $AC=\sqrt{73}$ cm.

6. In Δ isoscel ABC una din laturile egale are lungimea $AB=a$. Fie E mijlocul lui BC şi FE mediatoarea laturii AB astfel încît $EF \cap BC=\{E\}$. 1) Să se arate că CE este cît apotema unui pătrat înscris într-un cerc de rază a. 2) Să se arate că există relaţia $\frac{AB}{BC}=\frac{AF}{AE}$.

R. $EC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

7. Se dă latura paralelogramului $ABCD$. Din A se duce perpendiculara AA' pe latura BC iar din B se duce perpendiculara BB' pe CD. Să se arate că există relaţia: $\frac{AB}{BC+AB}=\frac{A'B}{B'C+A'B}$.

8. Se dă triunghiul ABC, cu $m(\sphericalangle A)=60^o$ şi $m(\sphericalangle B)<60^o$. Fie D simetricul lui C faţă de latura AB, iar $E=AC \cap BD$. Să se arate că dacă BF, unde $F \in AC$ este bisectoarea unghiului ABD, atunci şi DF este bisectoarea unghiului ADE.

9. Perpendicularele pe diagonala BD a dreptunghiului $ABCD$ duse în B şi D intersectează laturile DC şi BC în M şi N. Să se arate că:

1) $BC^2+CD^2=BC \cdot CN+MC \cdot CD$; 2) $AB \cdot AC=CN \cdot BM$; 3) $BD^2=\frac{BN \cdot BC+CD \cdot MD}{2}$.

4) Cunoscînd că diagonala dreptunghiului este 8 cm iar proiecţia ei pe BC este de 6,4 cm, să se calculeze perimetrul triunghiului MND.

R. ≈33,2 cm.

10. Se dă patrulaterul $ABCD$ înscris în cercul O cu diagonalele BD şi AC; $BD \cap AC=\{N\}$. Să se determine diagonala BD a patrulaterului ştiind că $BC=12$ cm, $AD=6$ cm, $BN=8$ cm şi $AC=9$ cm.

Indicaţie. Se va observa că triunghiurile BNC şi NAD sînt asemenea.

R. $BD=10{,}5$ cm.

11. In Δ isoscel ABC, $[AB]\equiv[AC]$ şi $m(\sphericalangle A)=60^o$, fie MD mediatoarea laturii AB şi BD bisectoarea unghiului B ($M \in AB$ şi $D \in AC$); AP bisectoarea unghiului A; $P \in BD$; $AP \cap MD=\{N\}$ şi $AP \cap BD=\{P\}$.

1) Să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

2) Să se arate că ΔNPD este isoscel.

3) Se prelungeşte $[BA]$ cu segmentul $[AA']$ şi $[DB]$ cu $[BB']$ aşa fel încît $[AA']\equiv[BB']$. Să se arate că $\Delta AA'C \equiv \Delta ABB'$.

R. $m(\sphericalangle A)=36^o$; $m(\sphericalangle B)=72^o$.

12. In triunghiul dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A)=90^o$, se cunoaşte că $AB=3$ cm şi $AC=6$ cm. Fie M mijlocul laturii AC. Se împarte BC în 5 părţi egale prin punctele D, E, F, G pornind de la B. 1) Să se calculeze lungimea segmentului MF. 2) Să se arate că ΔABE este isoscel.

R. 1) $MF=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ cm.

13. In cercul O este înscris un triunghi ABC cu m($\sphericalangle B$)=48°. Bisectoarea unghiului B este perpendiculară pe diametrul care trece prin C. Să se afle măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

R. (108°; 24°).

14. Lungimile laturilor unui triunghi oarecare ABC sînt invers proporționale cu numerele $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$. Latura cea mai mare AB este cu 3 cm mai mare decît latura cea mai mică AC. Perpendiculara dusă în B pe BC intersectează perpendicularele în A pe AB şi în C pe AC, în M şi N. $AM \cap CN=\{P\}$; MN=15 cm. 1) Să se afle perimetrul triunghiului ABC. 2) Să se calculeze lungimile laturilor triunghiului MNP.

Indicație. $\Delta ABC \sim \Delta MNP$.

R. 1) 14 cm; 2) 18 cm; 15 cm; 9 cm.

15. Intr–un triunghi ABC, m($\sphericalangle C$)=30°. Inălțimea dusă din B determină pe AC segmentele AD şi DC care au lungimile invers proporționale cu numerele 1 şi $\frac{1}{12}$, iar latura AC=26 cm. Se cer: 1) lungimile laturilor triunghiului ABC; 2) aria triunghiului ABC; 3) aria triunghiului BDC; 4) măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

R. 1) AB=14 cm; $BC=16\sqrt{3}$; AC= 24 cm. 2) $104\sqrt{3}$ cm^2;
3) $96\sqrt{3}$ cm^2. 4) ($\sphericalangle A$)≈81°50'; ($\sphericalangle B$)≈68°10'; ($\sphericalangle C$)=30°.

16. Fie punctele B şi C pe segmentrul AD=18 cm, BC este media aritmetică între AB şi CD şi $\frac{AC}{2}=BD$. In punctul B se ridică o perpendiculară pe AD, (BE= 6 cm) iar în punctul D perpendiculara DF=12 cm, de aceeaşi parte cu BE. Paralela dusă din E la AB întîlneşte perpendiculara dusă din A în punctul G. 1) Să se afle lungimea segmentelor AB, BC şi CD. 2) Să se arate că triunghiul GEF este isoscel.

R. AB=10 cm; BC=6 cm; CD=2 cm.

17. In Δ isoscel ABC, $[AB]\equiv[AC]$; m($\sphericalangle A$)=40°, BD bisectoarea unghiului B taie latura AC în D. Simetricul punctului D fața de AB este punctul E iar simetricul punctului D față de BC este F; $EF \cap AB=\{P\}$ şi $EF \cap BC=\{G\}$. 1) Să se arate că triunghiul DEF este isoscel şi să se calculeze măsurile unghiurilor lui. 2) Să se arate că $EF \perp BD$. 3) Să se calculeze măsurile unghiurilor poligonului $MPGND$, M şi N fiind proiecțiile lui D pe AB şi respectiv PC.

R. 1) m($\sphericalangle D$)=110°; m($\sphericalangle E$)=m($\sphericalangle F$)=35°; 3) m($\sphericalangle G$)=m($\sphericalangle P$)=125°; m($\sphericalangle M$)=m($\sphericalangle N$)=90°.

18. ABC este Δ dreptunghic, m($\sphericalangle A$)=90°; BC=15 cm, iar AB=4/5 din BC. Punctul M aparține lui AC; AM=3 cm. Se duce $MN \parallel AB$; ($MN \cap BC=\{N\}$). Din M se duce $MG \perp BC$; $MG \cap BC=\{G\}$. 1) Să se calculeze aria Δ MGC. 2) Să se calculeze perimetrul Δ MNG.

R. 1) 8,64 cm^2; 2) 19,2 cm.

19. Intr–un triunghi ABC, $m(\sphericalangle A)=90^0$, în care lungimile lui AB şi AC sînt invers proporţionale cu 1/3 şi 1/4 iar diferenţa lungimilor catetelor este de 6 cm, se duce înălţimea AD şi mediana AM ($D\in BC$, $M\in BC$). Din M se duce perpendiculara MN pe AM astfel încît $MN\cap AD=\{N\}$. 1) Să se calculeze perimetrul triunghiului ABD. 2) Să se afle aria triunghiului ANM. 3) Să se afle aria patrulaterului $ABNM$.

R. 1) 43,2 cm; 2) $32\frac{13}{16}$ cm^2; 3) $117\frac{3}{16}$ cm^2.

20. ABC Δ dreptunghic, $m(\sphericalangle A)=90^0$. Punctul $D\in AC$; se duce $DE\parallel BC$; $E\in AB$. Fie M mijlocul segmentului DE; $AM\cap BC=\{N\}$. Să se arate că : $[BN]\equiv[NC]$ şi $AN<\frac{AB+AC}{2}$.

21. Diagonalele dreptunghiului $ABCD$ se intersectează sub un unghi avînd măsura de 110^0. Se duce o perpendiculară din B pe AC în E, care intersectează pe AD în F. Să se arate că: $AF\cdot AD=BF\cdot BE$. Să se calculeze măsurile unghiurilor patrulaterului $EFDO$ (O fiind intersecţia diagonalelor).

Indicaţie. $\Delta ABF\sim\Delta BCE$. **R.** 110^0; 35^0; 90^0; 125^0.

22. Intr–un trapez dreptunghic $ABCD$, diagonala $AC\perp CB$; $[BC]\equiv[AC]$. Inălţimea AD a trapezului este egală cu a. Se cere: 1) aria trapezului; 2) măsurile unghiurilor trapezului; 3) aria triunghiului dreptunghic ce se formează prin prelungirea laturilor neparalele ale trapezului.

R. 1) $\frac{3a^2}{2}$; 2) $m(\sphericalangle A)=m(\sphericalangle D)=90^0$; $m(\sphericalangle B)=45^0$ şi $m(\sphericalangle C)=135^0$; 3) a^2.

23. Fie cercul C de centru O şi razele OB şi OA ce formează $\sphericalangle AOB$ avînd măsura de 90^0. Se duc tangente prin punctele A şi B şi se intersectează în Q. 1) Să se arate că OQ este bisectoarea unghiului AOB. 2) Să se arate că diagonalele patrulaterului $OBQA$ sînt perpendiculare.

24. Fie ABC un triunghi isoscel, $[AB]\equiv[AC]$. Punctul O este la intersecţia mediatoarelor laturilor egale. Perpendiculara dusă din B pe BC intersectează mediatoarea OE în M, ($E\in AB$), iar paralela dusă din C la AB intersectează mediatoarea OD în N, $m(\sphericalangle MAN)=150^0$, ($D\in AC$). 1) Să se afle măsurile unghiurilor triunghiului ABC. 2) Cunoscînd $AB=4a$ cm, să se exprime în funcţie de "a" aria triunghiului ABC.

R. 1) $m(\sphericalangle A)=m(\sphericalangle B)=m(\sphericalangle C)=60^0$; 2) $4a^2\sqrt{3}$ (cm^2).

25. In ΔABC se duce bisectoarea AD ($D\in BC$). Simetricele punctului D faţă de AC şi AB sînt respectiv M şi N. Să se arate că: 1) Δ DMN este isoscel; 2) $m(\sphericalangle NDM)=m(\sphericalangle B)+m(\sphericalangle C)$; 3) $AD\perp MN$.

26. Un trapez isoscel are lungimea bazei mari de 8 cm, a bazei mici de 2 cm şi un unghi cu măsura de 45^0. Să se afle aria acestui trapez cu ajutorul unei construcţii ajutătoare (nu se vor utiliza relaţiile metrice, funcţiile trigonometrice sau proprietatea triunghiului dreptunghic isoscel).

27. Se dă un pătrat $ABCD$. Se construieşte pe latura BC un triunghi isoscel OBC avînd măsura unghiurilor de la bază de 15^o. Să se arate că Δ AOD este echilateral.

Indicaţie. Se va lua în consideraţie particularitatea ce o are un Δ dreptunghic cu un unghi de 15^o. (Inălţimea dusă din unghiul drept pe ipotenuză este 1/4 din ipotenuză.)

28. Se dă patrulaterul $ABCD$ în care $AD=CB=a$. Se prelungesc segmentele AD şi BC; $(AD\cap BC=\{M\})$. Fie MH bisectoarea unghiului M care intersectează pe DC în H. Se consideră N şi G mijloacele segmentelor DC şi AB. Să se arate că: $MH\cap NG=\emptyset$.

Indicaţie. Din N se duc paralele la AD şi CB egale cu a.

29. Avem Δ dreptunghi ABC, $m(\sphericalangle A)=90^o$ şi punctul $M\in BC$. Simetricul lui M, faţă de AC este punctul N, simetricul lui M faţă de AB este punctul P, iar D şi E sînt proiecţiile lui M pe AB şi pe AC. 1) Să se arate că triunghiurile AEN şi ADP sînt congruente. 2) Să se demonstreze că punctele N, A şi P sînt coliniare. 3) $NC\cap MP=$ $=\{G\}$. Să se arate că triunghiul MGC este isoscel. 4) Să se arate că există relaţia:

$$\frac{AD}{AB+AD}=\frac{CM}{CB+CM}.$$

30. Intr-un triunghi ABC măsura unghiului exterior B este de trei ori mai mare decît măsura unghiului A al triunghiului şi cu $\frac{4}{9}$ dr mai mare decît măsura unghiului C al triunghiului. Prin vîrful A al triunghiului se duce o paralelă la baza BC. Bisectoarea interioară a unghiului B întîlneşte această paralelă în punctul M iar latura AC a triunghiului în punctul N. 1) Să se calculeze măsurile unghiurilor triunghiului ABC. 2) Să se arate că triunghiurile ABN şi MNC sînt echivalente. 3) Să se arate că există relaţia $AB\cdot NB=MN\cdot BC$.

R. $m(\sphericalangle A)=40^o$; $m(\sphericalangle B)=60^o$; $m(\sphericalangle C)=80^o$.

31. Aria unui trapez este de 48 cm^2, raportul lungimilor bazelor este $\frac{3}{5}$, iar înălţimea lui este de 6 cm. 1) Să se afle lungimile bazelor trapezului. 2) Cît la sută din aria trapezului reprezintă aria triunghiului ce se formează prin prelungirea laturilor neparalele ale trapezului şi avînd ca bază, baza mică a trapezului ?

R. $B=10$ cm; $b=6$ cm; 56,25%.

32. Intr-un trapez diferenţa lungimilor bazelor este 20 cm, iar linia mijlocie a trapezului este de 66,(6)% din baza mare. Una din laturile neparalele şi cu baza mare determină un unghi a cărui măsură este de 60^o, cealaltă latură neparalelă este lungă de 20 cm. La distanţa de $4\sqrt{3}$ cm de baza mare se duce o paralelă la baze. 1) Ce fel de trapez este în condiţiile problemei ? 2) Să se calculeze înălţimea trapezului. 3) Să se afle lungimea paralelei dusă la baza mare.

R. 1) Trapezul este isoscel; 2) $10\sqrt{3}$ cm; 3) 22 cm.

33. In triunghiul ABC, $m(\sphericalangle A)=60^o$ iar $m(\sphericalangle B)=45^o$. Bisectoarea unghiului A întîlneşte latura BC în D, apoi se duce $DN\perp AB$ şi se prelungeşte această perpendiculară pînă

se taie cu prelungirea laturii AC în M. Să se arate că: 1) $AD=\frac{2}{3}$ din MN; 2) $AD^2=$ $=CM\cdot AB$; 3) $AN^2=DN\cdot MN$.

34. Intr-un paralelogram $ABCD$ bisectoarele unghiurilor consecutive A şi B se întîlnesc pe latura CD în punctul E ($E\in CD$). 1) Să se arate că triunghiul BCE este isoscel. 2) Ştiind că lungimile bisectoarele AE şi BE sînt în raportul de 4/3 iar diferența proiecțiilor lor pe latura AB este de 2,8 cm, să se afle aria paralelogramului şi lungimea segmentelor AE şi EB.

R. 2) 48 cm^2; $AE=8$ cm; $BE=6$ cm.

35. Intr-un triunghi dreptunghic isoscel ABC se înscrie un dreptunghi ce are două vîrfuri pe ipotenuza triunghiului, iar celelalte două vîrfuri pe catetele triunghiului. Raportul dimensiunilor dreptunghiului este de 2/5, iar ipotenuza triunghiului dreptunghic este de 45 cm. 1) Să se afle dimensiunile dreptunghiului. 2) Cît la sută reprezintă lățimea dreptunghiului din înălțimea triughiului dat ?

R. 1) 10 cm şi 25 cm; 2) $44\frac{4}{9}\%$.

36. Se dă triunghiul isoscel ABC, $[AB]\equiv[AC]$ şi înălțimea AD. Fie E şi F simetricele punctului D față de laturile congruente ale triunghiului, $EF\cap AC=\{M\}$; $EF\cap AD=\{O\}$; $EF\cap AB=\{N\}$. 1) Să se arate că patrulaterul $BCEF$ este un trapez isoscel. (Se pot folo-si cunoştințe diferite şi se pot da cel puțin trei demonstrații diferite.) 2) Să se determine natura patrulaterului $DCEM$ şi să se arate că este echivalent cu patrulaterul $BDNF$. 3) Să se demonstreze că AD este bisectoare pentru un unghi al triunghiului AEF; la fel pentru un unghi al triunghiului EDF. 4) Să se studieze natura şi elementele patrulaterului $ADEF$. 5) Să se arate că există relația:

$$\frac{AN+AM}{AB+AC}=\frac{AO+ON}{AD+BD}=\frac{AN}{AC}.$$

37. Intr-un trapez isoscel $ABCD$, cu baza mare $BC=0,20$ m se înscrie un dreptunghi a cărui arie este de 48 cm^2, lungimea dreptunghiului fiind baza mică (AD) a trapezului. $BA\cap CD=\{E\}$. Perpendiculara dusă din E pe AD este de 4 cm. 1) Să se afle aria trapezului $ABCD$; 2) Să se demonstreze $\Delta\ BDE\equiv\Delta\ CAE$. 3) Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului EBC. 4) Să se arate că aria triunghiului EAD este a treia parte din aria dreptunghiului înscris, iar raportul dintre aria dreptunghiului şi aceea a trapezului este de 4/7. 5) Cum se poate construi (fără calcule sau măsurători) un dreptunghi a cărui arie este jumătate din aria trapezului ?

R. 1) 84 cm^2; 3) 10 cm.

38. Raportul lungimilor bazelor unui trapez $ABCD$ este de 2/5. Latura neparalelă $BC=12$ cm şi face cu baza mare AB un unghi cu măsura de 60° iar latura neparalelă AD face cu baza mare un unghi cu măsura de 30°. Să se calculeze: 1) aria $\Delta\ MDC$ ($AB\cap CD$); 2) aria $\Delta\ ACD$; 3) raportul ariilor $\Delta\ BCD$ şi $\Delta\ MAB$. 4) Să se arate că $\Delta\ MAC\sim\Delta\ MBD$. 5) O fiind punctul de intersecție al diagonalelor trapezului, să se arate că $\Delta\ AOD$ este echivalent cu $\Delta\ BOC$.

R. 1) $32\sqrt{3}$ cm^2; 2) $48\sqrt{3}$ cm^2; 3) 6/25.

39. Pe latura AD a unui dreptunghi $ABCD$ se ia un punct N aşa fel încît $\frac{NA}{ND}=4$; pe latura BC a dreptunghiului se ia un alt punct M aşa fel încît $\frac{MB}{MC}=\frac{2}{3}$. Perimetrul dreptunghiului este de 52 cm, iar raportul dintre cele două dimensiuni ale dreptunghiului este 3/10. 1) Să se calculeze lungimea segmentului MN. 2) Să se arate că prelungirile segmentului MN în ambele sensuri, pînă la intersecţia cu prelungirile laturilor AB şi CD sînt două segmente, unul congruent cu MN şi altul cu $\frac{MN}{2}$.

R. $MN=10$ cm.

40. Intr–un paralelogram $ABCD$ cu unghiul ascuţit în A se prelungeşte AB (latura mai mică a paralelogramului) cu un segment BF; $FD \cap AC=\{E\}$. Latura AB este cu 1 cm mai mică decît suma segmentelor AE şi EC de pe diagonala AC şi cu 1 cm mai mare decît segmentul AE; se mai ştie că $\frac{AE}{EC}=\frac{3}{2}$. Să se afle: 1) lungimea segmentului BF; 2) lungimea laturii AB; 3) mărimea raportului $\frac{AF}{CD}$. 4) Să se arate că există relaţia: $\frac{EC \cdot BF}{AE-EC}=AB$.

R. 1) $BF=2$ cm; 2) $AB=4$ cm; 3) $\frac{AF}{CD}=\frac{3}{2}$.

41. Un trapez dreptunghic $ABCD$ are baza mare CD congruentă cu înălţimea AD iar baza mică $AB=5$ cm; se ia un punct E la mijlocul înălţimii AD. 1) Ştiind că triunghiul BCE este dreptunghic în E să se arate că aria trapezului, în acest caz, este de 250 cm^2 şi latura BC a trapezului este de 25 cm. 2) Să se arate că jumătate din înălţimea trapezului este medie proporţională între baza mică şi înălţimea trapezului. 3) Să se demonstreze că există relaţia $\frac{AE-AB}{AB}=\frac{CD-DE}{DE}$.

42. Raportul lungimilor bazelor unui trapez este 1/3. Latura neparalelă $BC=6\sqrt{2}$ cm face cu baza mare AB un unghi de 45°, iar diferenţa bazelor este de 8 cm. Să se calculeze: 1) aria $\Delta\ MAB$ cunoscînd că $AD \cap BC=\{M\}$; 2) raportul ariilor $\Delta\ DCB$ şi $\Delta\ MAB$; 3) aria $\Delta\ ADC$; 4) să se arate că $\Delta\ MAC \sim \Delta\ MBD$; 5) să se arate că $\Delta\ AOD \sim \Delta\ BOC$ ştiind că $AC \cap BD=\{O\}$.

R. 1) 54 cm^2; 2) 2/9; 3) 12 cm^2.

43. Intr–un triunghi dreptunghic ABC raportul catetelor $\frac{AB}{AC}=\frac{7{,}8}{10{,}4}$ şi diferenţa proiecţiilor lor pe ipotenuză este de 2,8 cm. Bisectoarea unghiului B intersectează cateta AC în D ($D \in AC$). Să se afle: 1) perimetrul triunghiului ABC; 2) raportul ariilor celor două triunghiuri formate în triunghiul ABC prin ducerea bisectoarei AD; 3) aria

patrulaterului *ABED* (*E* fiind piciorul perpendicularei dusă din *A* pe *BC*).

R. 1) 24 cm; 2) 3/5; 3) 14,60 cm^2.

44. Un triunghi isoscel obtuzunghi *ABC* are perimetrul de 72 cm şi 0,125 din baza *BC* a triunghiului este de 5 ori mai mică decît una din laturile egale ale triunghiului. Prin vîrful *A* al triunghiului se duce o perpendiculară pe $AB (AB \cap BC = \{E\})$. Să se afle: 1) lungimile laturilor triunghiului *ABC*; 2) lungimea segmentelor *AE* şi *EC*; 3) cît la sută reprezintă baza triunghiului isoscel din ipotenuza triunghiului dreptunghic *ABE*.

R. 1) 20 cm, 20 cm, 32 cm; 2) $AE=15$ cm, $EC=7$ cm; 3) 128%.

45. In triunghiul dreptunghic *ABC*, $m(A)=90^o$, *AB* micşorată cu $3\frac{1}{3}\%$ din ea este de două ori mai mare decît 0,25 din cateta *AC* iar cateta *AC* mărită cu 0,75 din ea este cu 8 cm mai mare decît *AB*. Se duce bisectoarea $BE(E \in AC)$ şi mediana $AG(G \in BC)$; $BE \cap AG = \{I\}$. Să se afle: 1) raportul lungimilor catetelor triunghiului *ABC*; 2) aria triunghiului *AGC*. 3) Considerînd $m(\sphericalangle B)=60^o$ să se demonstreze că triughiul *BIG* este dreptunghic în *I* şi să se afle raportul dintre *EG* şi *BE*. 4) In acest caz particular, cît la sută reprezintă aria triunghiului *BIG* din aria triunghiului *ABC* ?

R. 1) 3/4; 2) 12 cm^2; 3) 1/2; 4) 25%.

46. Intr–un triunghi dreptunghic *ABC* cu ipotenuza $BC=2a$ linia centrelor *O* şi *O'* ale cercurilor înscris şi circumscris acestui triunghi este egală cu segmentul *AO* ce uneşte vîrful unghiului drept cu centrul cercului înscris în triunghi. Să se afle: 1) măsurile unghiurilor triunghiului *ABC*; 2) raportul lungimilor catetelor; 3) raportul lungimilor proiecţiilor catetelor pe ipotenuză; 4) raportul ariilor cercurilor înscris şi circumscris.

R. 1) $90^o, 60^o, 30^o$; 2) $\sqrt{3}$; 3) 3; 4) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

47. Un triunghi *ABC* are aria de 360 cm^2. Pe baza *BC* se ia un punct oarecare *D* şi un alt punct *M* la mijlocul segmentului *AD*. Se cere: 1) aria triunghiului *MBC*; 2) valoarea raportului ariilor triunghiurilor *ABM* şi *BMD*; 3) să se demonstreze că:

$$\frac{\text{aria } \Delta ABM + \text{aria } \Delta AMC}{\text{aria } \Delta MBD + \text{aria } \Delta MCD} = 1.$$

4) Cît la sută reprezintă aria triunghiului *CMD* din aria triunghiului *AMC* ?

R. 1) 180 cm^2; 2) 1; 4) 100%.

48. In triunghiul dreptunghic *ABC*, $m(\sphericalangle A)=90^o$, bisectoarea unghiului *C* intersectează înălţimea *AD* în *E* şi latura *AB* în *F* iar bisectoarea unghiului *B* intersectează latura *AC* în *P*. 1) Să se arate că bisectoarele se intersectează sub un unghi avînd măsura de 45^o. 2) Considerînd *FP* diametrul unui cerc să se arate că arcul $\overset{\frown}{MN}$ cuprins între punctele de intersecţie ale cercului cu cele două bisectoare este de 90^o. Să se arate că triunghiul *AFE* este isoscel.

B. GEOMETRIE IN SPAŢIU

1. Fie planul P şi un punct $A \notin P$, se duc: perpendiculara AM pe plan şi oblicele egale AB şi AC, astfel ca unghiul BMC să fie drept. Presupunînd că $AM=2$ cm, iar $m(\sphericalangle BAM)=60^{\circ}$, să se calculeze distanţa BC dintre picioarele B şi C ale oblicelor (fig. IV.2).

R. $BC=2\sqrt{6}$ cm.

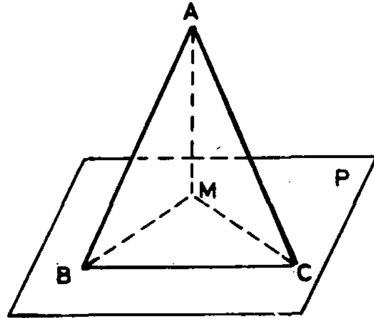


Fig.IV.2

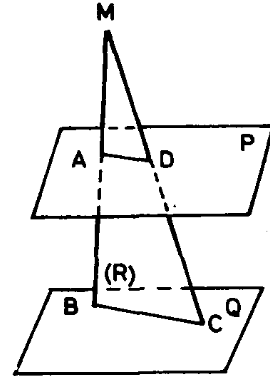


Fig.IV.3

2. Se dă un punct M la distanţa $MA=3$ cm de un plan P şi la distanţa $MB=8$ cm de un alt plan Q, paralel cu primul. Segmentul $BC=6$ cm. $C \in Q$. MC intersectează planul P în D. Să se afle perimetrul triunghiului MAD (fig.IV.3).

R. 9 cm.

3. Un vas de formă cubică plin cu alcool are masa de 52,688 kg, iar vasul gol are masa de 2 kg. Să se afle înălţimea vasului, ştiind că densitatea alcoolului este de 792 kg/m^3.

Indicaţie. Vom afla, în prealabil, masa netă a alcoolului. Volumul alcoolului din vas se va obţine împărţind masa sa la densitate: $V=\frac{50\cdot 688}{0,792}=64$ dm^3.

R. 4 dm.

4. Se dă un cub $ABCDA'B'C'D'$ a cărui muchie are lungimea a. a) Să se calculeze distanţa AP de la vîrful A la diagonala CA' a cubului.

Indicaţie. Observăm că triunghiul $A'AC$ este dreptunghic în A, muchia $A'A$ a cubului fiind perpendiculară pe planul bazei, este perpendiculară pe toate dreptele din plan. Scriem în două moduri deosebite dublul ariei triunghiului $A'AC$ şi avem $AP=\frac{AC\cdot AA'}{A'C}$. Mărimea segmentului AC se deduce din triunghiul dreptunghic CDA; $AC=a\sqrt{2}$.

R. $PA=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Observaţie. Se înţelege că aceeaşi valoare se obţine pentru oricare din distanţele de la un vîrf al cubului la o diagonală a acestuia.

5. Se dă prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$. Lungimea laturii pătratului bazei este de 2 dm, iar a diagonalei AC' a prismei de 4 dm. 1) Să se arate că

triunghiul ACC' este isoscel. 2) Să se calculeze aria totală a prismei. 3) Presupunem că prisma este metalică şi după ce o topim, vrem să confecţionăm alta care are baza un dreptunghi cu lungimea de 2 dm şi lăţimea $\sqrt{2}$ dm. Să se arate că înălţimea prismei confecţionate este congruentă cu diagonala prismei iniţiale.

Indicaţie. **1.** $AC=2\sqrt{2}$. Triunghiul $C'CA$ este dreptunghic în C, $C'C=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

2. Aria totală se compune din aria a două pătrate $ABCD$ şi $A'B'C'D'$ la care se adaugă patru feţe dreptunghiulare, fiecare avînd dimensiunile 2 dm şi $2\sqrt{2}$ dm, adică o arie laterală de $16\sqrt{2}$ dm^2; aria totală$=8(1+2\sqrt{2})$ dm^2.

3. Volumul prismei iniţiale$=8\sqrt{2}$ dm^3. Prin topire, volumul rămîne acelaşi, numai forma se schimbă. Dacă vrem să facem din acelaşi metal o altă prismă dreptunghiulară, cu dimensiunile bazei de 2 dm şi $\sqrt{2}$ dm, avînd deci o arie de $2\sqrt{2}$ dm^2 ea va trebui să aibă o înălţime egală cu: $\frac{V}{2\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=4$ dm, adică cu diagonala prismei iniţiale.

R. 2) $8(1+2\sqrt{2})$ dm^2.

6. O groapă prismatică, cu baza un triunghi echilateral, cu latura de 2 m şi adîncă de 4 m, este plină cu îngrăşăminte animale. Aceste îngrăşăminte se împrăştie pe suprafaţa unui lot de flori în formă de hexagon cu latura de 10 m. Ce grosime are stratul de îngrăşăminte ?

R. $\approx 0{,}026$ m.

7. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un vas paralelipipedic închis, avînd dimensiunile 2 dm, 3 dm, 4 dm. El conţine apă, care ocupă $\frac{3}{8}$ din volumul său. Se cere înălţimea pînă la care se ridică lichidul cînd culcăm vasul; pe rînd, pe cîte una din feţele sale.

R. 1,125 dm; 1,5 dm; 0,75 dm.

8. Un cub $ABCDA'B'C'D'$ este înscris într–o sferă cu raza de 2 cm. Să se afle volumul cubului.

Indicaţie. Diagonalele cubului trec prin centrul O al sferei. Fie a lungimea laturii cubului. Triunghiul ACC' este dreptunghic. (1) $a^2+AC^2=AC'^2$; (2) $AC^2=a^2+a^2=2a^2$. Inlocuind această valoare a lui AC^2 în (1) şi ţinînd seama că $AC'=4$ cm, volumul cubului va fi $\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^3\approx 12{,}331$ cm^3;

R. $V\approx 12{,}331$ cm^3.

9. O prismă dreaptă, cu baza un triunghi echilateral, are volumul $27\sqrt{3}$ cm^3 şi înălţimea de 12 cm. Să se afle suma lungimilor tuturor muchiilor.

R. 54 cm.

10. Se dă o prismă dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ cu baza $ABCD$, un romb. Diagonalele $A'C$ şi $B'D$ ale prismei au lungimile $A'C=8$ cm, şi $B'D=5$ cm, iar muchiile laterale ale prismei sînt de 2 cm. Să se calculeze latura rombului de bază şi aria sa.

R. $\ell=\frac{9}{2}$; $3\sqrt{35}$ cm^2.

11. O piramidă pătrată regulată are apotema de 12 cm şi muchia laterală de 13 cm. a) Să i se calculeze volumul şi aria totală.

R. a) $V \approx 363$ cm^3; aria totală$=340$ cm^2.

12. Intr–o piramidă patrulateră regulată, latura bazei are lungimea de 1 m, iar aria laterală este de 260 dm^2. Se cere: 1) apotema; 2) muchia; 3) volumul piramidei.

Indicaţie. Aria laterală cunoscută se compune din patru triunghiuri egale. Se obţine valoarea apotemei piramidei 13 dm. Aplicînd teorema lui Pitagora se obţine şi lungimea unei muchii.

R. 1) 13 dm; 2) 13,92 dm; 3) 400 dm^3.

13. Să se afle volumul unui tetraedru regulat $ABCD$ a cărui muchie are lungimea ℓ. Aplicaţie numerică: $\ell=10$ cm.

Indicaţie. $V=\frac{\ell^3\sqrt{2}}{12}$.

R. $V \approx 117{,}450$ cm^3.

14. O piramidă $VABC$ are ca bază un triunghi dreptunghic ABC, cu catetele $AB=30$ cm şi $AC=40$ cm. Muchia laterală $VA=32$ cm şi este perpendiculară pe planul bazei. Se cere: 1) lungimile înălţimilor BB' şi CC' ale piramidei coborîte din B pe faţa VAC şi din C pe faţa VAB; 2) aria totală a piramidei.

R. 1) 30 cm; 40 cm; 2) 2 720 cm^2.

15. S–au construit 10 corturi pentru un grup de elevi. Fiecare cort avea forma unui paralelipiped drept, cu baza un pătrat, cu latura de 4 metri şi acoperişul în formă de piramidă regulată, cu înălţimea congruentă cu aceea a paralelipipedului şi congruentă cu diagonala pătratului de bază. Pentru fixarea unui cort se leagă vîrful piramidei cu frînghii trase în prelungirea muchiilor laterale ale ei şi fixate apoi cu cîte un ţăruş în pămînt. Să se calculeze cîţi metri pătraţi de pînză trebuie pentru aceste corturi.

R. 1 382,4 m^2.

16. Un cristal de cuarţ este format dintr–o prismă hexagonală regulată şi două piramide regulate, cu vîrfurile în S şi S'. Ştiind că cele două piramide sînt egale, că masa cristalului este de 15,6 g, că densitatea sa este de 2 600 kg/m^3, că latura hexagonului este 1 cm, iar înălţimea prismei este jumătate din distanţa dintre vîrfurile piramidelor, să se calculeze distanţa SS'.

R. $\approx 3{,}44$ cm.

17. Un cub are muchia egală cu a. Să se determine aria laterală a unei piramide care are vîrful în centrul bazei superioare, iar baza piramidei are vîrfurile în mijloacele laturilor bazei inferioare. Aplicaţie numerică: $a=3$ cm.

R. 13,5 cm^2.

18. Inălţimea unei piramide triunghiulare regulate $VABC$ este egală cu 10 m, aria bazei este egală cu $75\sqrt{3}$ m^2. La distanţa $2\sqrt{3}$ m de vîrf facem o secţiune DEF paralelă cu baza. Să se afle volumul piramidei formate $VDEF$.

R. 18 m^3.

19. Intr–o piramidă patrulateră regulată este înscris un cub astfel încît patru vîrfuri ale sale se află pe muchiile laterale ale piramidei, iar celelalte patru vîrfuri se află în planul bazei. Să se determine volumul cubului dacă latura bazei piramidei este $a=4$ cm, iar înălţimea este de $h=8$ cm (fig.IV.4.).

Indicaţie. $\Delta VO'N \sim \Delta VOD$. Dar, x fiind muchia cubului:

$O'N=\frac{x\sqrt{2}}{2}$, $OD=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $VO=h, VO'=h-x \rightarrow \frac{h-x}{h}=\frac{x}{a}$,

$x=\frac{ah}{h+a}=\frac{8}{3}$ cm, $V=\ell^3=\left(\frac{8}{3}\right)^3$ cm^3.

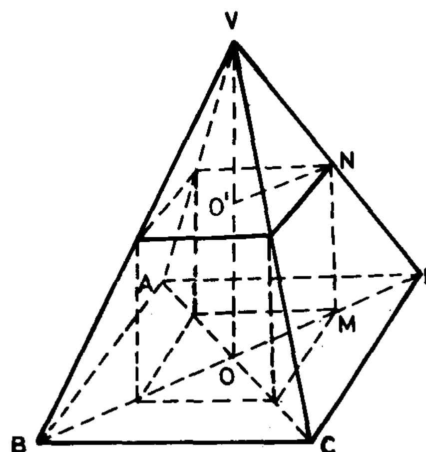


Fig.IV.4

20. O piramidă hexagonală regulată are înălţimea de 9 m. La 3 m de vîrf se duce o secţiune paralelă cu baza, avînd aria de $24\sqrt{3}$ m^2. Să se determine raportul volumelor celor două piramide, cea dată şi cea obţinută prin secţiune.

R. $\frac{27}{1}$.

21. Să se determine volumul piramidei octogonale regulate cu latura bazei de 6 dm şi cu muchiile laterale înclinate pe planul bazei cu un unghi de 60°.

Indicaţie. Se calculează R cercului circumscris octogonului, apoi muchia piramidei prin trigonometrie.

R. $V\approx 790$ dm^3.

22. Intr–un trunchi de con $R=13$ cm, $r=5$ cm, iar generatoarea este înclinată pe bază cu un unghi de 45°. Să se afle: aria laterală a trunchiuluide con, aria totală şi volumul.

R. Aria laterală$=144\sqrt{2}\pi$ cm^2; Aria totală$=\pi(144\sqrt{2}+169+25)$cm^2. Volumul$=\frac{8\pi}{3}(169+25+65)$cm^3.

23. Să se determine aria totală şi volumul piramidei patrulatere regulate care are muchia laterală $M=12$ dm, ştiind că muchia este înclinată pe planul bazei cu un unghi de 60°

Indicaţie. Aflăm înălţimea piramidei $I=12 \sin 60^o=6\sqrt{3}$, apoi apotema piramidei $A=3\sqrt{14}$. Aria laterală≈190 dm^2. Aria totală≈262 dm^2.

R. $V=144\sqrt{3}$ dm^3.

24. Un vas cilindric închis, avînd raza de 10 cm şi generatoarea de 15 cm, conţine lichid cît $\frac{1}{3}$ din volumul său. Să se afle aria porţiunii din capacele vasului care este acoperită de lichid, vasul fiind în poziţie orizontală.

Indicaţie. Volumul lichidului este a treia parte din volumul vasului, întrucît cînd s–a întors vasul nu s–a introdus, nici nu s–a scos nimic din lichid: $\frac{1500\pi}{3}$cm$^3=500\pi$ cm^3. Volumul lichidului se obţine înmulţind aria A a segmentului de cerc cu înălţimea cilindrului, de unde avem:

$$A=\frac{500\pi}{15}=\frac{100\pi}{3}\approx 104{,}7\text{cm}^2.$$

R. ≈104,7 cm^2.

25. Un rezervor cilindric de fontă cu raza de 7 m iar înălţimea de 12 m, este plin cu benzină, a cărui densitate este de 700 kg/m^3. Să se afle în cîte vagoane–cisternă se va putea încărca toată benzina din acel rezervor, ştiind că într–un vagon încap 10 000 kg benzină.

R. ≈129 vagoane.

26. Un tub cilindric de sticlă are masa de 80 g cînd este gol şi de 140 g cînd se introduce în el mercur pînă la o înălţime de 4 cm. Densitatea mercurului fiind de 13 600 kg/m^3, să se afle diametrul interior al tubului.

Indicaţie. Masa mercurului este de 140–80=60 g, iar $V=\frac{m}{\rho}$. In cazul de faţă masa fiind dată în grame volumul se va afla în cm^3: $V=\frac{60}{13,6}\approx 4,4\text{cm}^3$

R. ≈1,18 cm.

27. Un vagon–cisternă plin cu ulei este format dintr–o parte cilindrică, avînd lungimea de 5 m şi din două emisfere avînd raza egală cu 1,20 m (ca şi partea cilindrică). Să se afle masa uleiului din acest vagon, densitatea uleiului fiind de 920 kg/m^3.

R. 31,6 t.

28. Un ax de oţel cu lungimea de 1,40 m şi diametrul de 84 mm se strunjeşte astfel, încît diametrul să se reducă la 80 mm. Să se calculeze cît la sută din masa iniţială se pierde prin strunjire.

Indicaţie. Volumul pierdut prin strunjire va fi: $V_1-V_2=1400(42^2-40^2)$ mm^3. Dacă notăm cu ϱ densitatea oţelului, masa axului nestrunjit va fi $V_1\varrho$ mg, a axului strunjit $V_2\varrho$ mg, iar a oţelului pierdut prin strunjire $(V_1-V_2)\varrho$ mg. Raţionăm astfel: dacă la o masă egală cu $V_1\varrho$ mg se pierd $(V_1-V_2)\varrho$ mg, atunci la 100 mg se vor pierde: $\frac{100(V_1\varrho-V_2\varrho)}{V_1\varrho}=\frac{100(V_1-V_2)}{V_1}$.

R. ≈9,29%.

29. Aria totală a unui cilindru este îndoitul ariei unui cerc cu raza R. Ştiind că diametrul cilindrului este egal cu înălţimea lui, să i se calculeze volumul în funcţie de R.

R. $\approx 1,2R^3$

30. Un cilindru circular drept are generatoarea G egală cu diametrul $2R$ al bazei. Să se determine G şi R ştiind că aria totală a cilindrului este egală cu de patru ori aria unei sfere cu raza de 0,25 m.

R. ≈0,41 m; ≈0,82 m.

31. Intr–un cilindru circular drept se duce un plan paralel cu axa cilindrului care taie din cercul bazei un arc de 120°. Inălţimea cilindrului este de 10 cm, iar distanţa OI, de la centrul cercului de bază, la planul secant, este de 2 cm. Să se determine aria secţiunii.

Indicaţie. Secţiunea paralelă cu axa cilindrului este un dreptunghi $ABCD$, a cărui înălţime AD este chiar OO'=10 cm. Baza sa este o coardă AB care subîntinde 120°. AB fiind coardă subîntinsă de arcul de 120°, este latura triunghiului echilateral înscris în cerc.

R. $40\sqrt{3}$ cm^2.

32. Aria laterală a unui con este de 10 cm^2. Dacă îl desfăşurăm, obţinem un sector circular cu unghiul la centru de 36°. Se cere aria totală a conului.

R. 11 cm^2.

33. Un elev a confecţionat un con dintr–o bucată de carton avînd forma unui sfert de cerc, a cărui arie este de 9π cm^2. Să se calculeze volumul conului astfel obţinut.

R. $\frac{9\pi\sqrt{15}}{16}$ cm^3.

34. Secţiunea axială VAB făcută într–un vas de formă conică este un triunghi dreptunghic isoscel, a cărui arie este de 18 cm^2. Printr–un mic orificiu în V se toarnă mercur pînă la jumătate din înălţimea vasului. Ce masă va avea mercurul din vas, ştiind că densitatea mercurului este de 13 600 kg/m^3.

Indicaţie. Mercurul din vas ia forma vasului. Volumul său va fi diferenţa dintre V_1 al vasului, adică a conului mare cu vîrful în V, şi V_2 volumul conului mic cu acelaşi vîrf şi care reprezintă partea goală a vasului.

R. $m \approx 942$ g.

35. Astupăm vîrful unei pîlnii înalte de 12 cm şi turnăm în ea 301,44 ml apă. Apa se ridică la o înălţime de 8 cm. Care este capacitatea pîlniei ?

R. ≈1 litru.

36. Un triunghi dreptunghic ABC are ipotenuza $BC=a$ şi catetele $AC=b$, $AB=c$, astfel ca $c<b$. Se roteşte acest triunghi pe rînd în jurul celor două catete. Să se afle ariile laterale ale corpurilor astfel obţinute şi să se spună care e mai mare dintre ele. Acelaşi lucru pentru volum. Să se afle şi volumul corpului obţinut prin rotirea triunghiului în jurul ipotenuzei. Caz numeric: $c=9$ cm; $b=12$ cm.

Indicaţie. Deoarece a este lungimea ipotenuzei, putem scrie: $c<b<a$. Prin rotirea în jurul catetei AB, obţinem un con cu raza bazei b, înălţimea c şi generatoarea a; iar prin rotirea în jurul catetei AC, un alt con cu raza bazei c, înălţimea b şi generatoarea a. Notînd cu A_{AB} şi A_{AC} ariile laterale ale celor două conuri, avem: $A_{AB}=\pi ba$; $A_{AC}=\pi ca$. Comparînd valorile lui A_{AB} şi A_{AC} se vede că $A_{AB}>A_{AC}$. Tot astfel, notînd cu V_{AB} şi V_{AC} volumele celor două conuri şi fiindcă $c<b$, rezultă $V_{AB}<V_{AC}$.

$$A_{BC}=\frac{\pi bc(b+c)}{a}, \quad V_{BC}=\frac{1}{3}\frac{\pi b^2c^2}{a}.$$

In cazul numeric:

$$A_{AB}=180\pi \text{ cm}^2,\ A_{AC}=135\pi \text{ cm}^2,\ A_{BC}=151{,}2\pi \text{ cm}^2,$$
$$V_{AB}=432\pi \text{ cm}^3,\ V_{AC}=324\pi \text{ cm}^3,\ V_{BC}=259{,}200\pi \text{ cm}^3.$$

37. Să se calculeze raza sferei circumscrise unui con drept cu generatoarea de 37 cm şi raza bazei de 12 cm.

R. ≈19,5 cm.

38. Inălţimea unui con este $VO=8$ m, iar generatoarea sa $VA=10$ m. a) Să se afle volumul sferei S înscrise în con. b) Punctul $M \in VA$, simetricul lui M faţă de OA este M' iar faţă de VO este M''. Să se arate că $O \in M'M''$.

R. a) 36π m^3.

39. Cîte bile avînd diametrul de 10 mm putem confecţiona din 5 kg de plumb ? Cîte kg de alamă ne trebuie pentru a confecţiona un număr egal de bile ? (Densitatea plumbului este 11 350 kg/m^3, iar densitatea alamei este de 8 400 kg/m^3.)

Indicaţie. Volumul unei bile cu diametrul de 10 mm=1 cm este: $V=\frac{\pi}{6}$ cm^3. Dacă bila este de plumb,

va avea o masă $m_P=\frac{11,35\pi}{6}$ g, iar dacă este de alamă va avea o masă $m_A=\frac{8,4\pi}{6}$ g. (Masa a fost obţinută în grame, deoarece volumul s–a calculat în centimetri cubi.) Găsim numărul n de bile de plumb ce se pot confecţiona din 5 kg: $n=5\ 000 : \frac{11,35\pi}{6}\approx 841$.

Cum fiecare bilă de alamă are masa m_A g, pentru a vedea cîtă alamă ne trebuie pentru ca să confecţionăm tot n bile, vom înmulţi m_A cu n, adică: $m_A\cdot n=\frac{5\cdot 8,4}{11,35}$ kg $=3,70$ kg de alamă.

R. 841 bile; 3,70 kg de alamă.

40. O bilă de cupru goală în interior are masa de $2,5344\ \pi$ kg. Raza ei interioară este de 3 cm. Cît este de mare raza exterioară, ştiind că densitatea cubului este 8 800 kg/m^3 ?

Indicaţie. Fie R raza bilei. Va trebui ca: $\frac{4}{3}\pi R^3=324\pi\Rightarrow R^3=243=3^5=3^3\cdot 3^2\rightarrow R=3\sqrt[3]{3^2}$ cm

41. Dintr–un cub de fildeş cu muchia $l=6$ cm, vrem să tăiem o sferă, astfel ca partea pierdută să fie cît mai mică posibil. Cît la sută se pierde ? Care este masa părţii pierdute, dacă densitatea fildeşului este 1 920 kg/dm^3.

Indicaţie. Pentru ca partea pierdută să fie cît mai mică, trebuie să tăiem din cub numai atît cît să ajungem la sfera înscrisă în el, adică la sfera de diametru egal cu muchia l a cubului. Volumul V al părţii pierdute va fi diferenţa dintre volumul cubului şi al sferei înscrise:

$$V=l^3-\frac{4}{3}\pi\left(\frac{l}{2}\right)^3=l^3\left(1-\frac{\pi}{6}\right).$$

Volumul cubului fiind l^3, vom lucra prin regula de trei simplă şi vom găsi pierderea în procente:

$$\frac{100l^3\left(1-\frac{\pi}{6}\right)}{l^3}=100\left(1-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{50\,(6-\pi)}{3}.$$

Obţinem o pierdere de 47,66%. Masa părţii pierdute este: $m=V\rho\approx197,68$ g.

Observaţie. Mărimea muchiei l a cubului s–a eliminat din calculul procentual ceea ce era natural, deoarece în această problemă volumul cubului nu influenţează asupra procentului de pierdere.

R. 47,66%; $m\approx197,68$ g.

42. Se strunjeşte o sferă metalică cu raza $R=100$ mm, pînă cînd i se micşorează raza cu 10 mm. Se topesc resturile de la strunjire şi se confecţionează din ele un obiect de formă conică, avînd raza bazei egală cu raza sferei iniţiale. Ce înălţime are conul obţinut ?

R. 108,4 mm.

43. Considerăm un cilindru şi un con echilateral, circumscrise unei sfere. Să se arate că: 1) aria totală a cilindrului este medie proporţională între aria sferei şi aria totală a conului: 2) volumul cilindrului este medie proporţională între celelalte două volume; 3) raportul fiecărui volum la aria sa totală este egal cu o treime din rază.

Indicaţie. Un plan secant dus prin axa conului ne dă un cerc mare al sferei, înscris în acelaşi timp într–un pătrat (care reprezintă secţiunea făcută în cilindru) şi un trunchi echilateral (care reprezintă secţiunea din con)(fig.IV.5).

Notînd cu R raza sferei, $OD=R$, avem $OB=2\cdot R$ şi cum $OB=OA\Rightarrow OA=2R$ şi deci $AD=3R$. Avem $6\pi R^2$ = aria totală a cilindrului. Pentru aflarea ariei laterale a conului, cunoaştem: înălţimea conului$=AD=3R$; $AB=BC=2BD$; dar $BD^2=AB^2-AD^2\Rightarrow3BD^2=9R^2, BD=R\sqrt{3}$. Rezultă că aria laterală a

conului$=\pi BD\cdot AB=\pi R\sqrt{3}\cdot 2R\sqrt{3}=6\pi R^2$. Aria bazei conului$=\pi BD^2=$ $=\pi(R\sqrt{3})^2=3\pi R^2$ Aria totală$=6\pi R^2+3\pi R^2=9\pi R^2$.

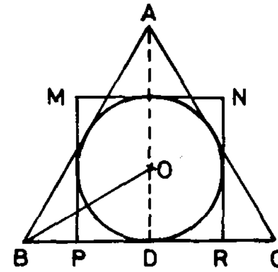


Fig.IV.5

1) Pentru a răspunde la prima întrebare trebuie să arătăm că: $(A_t\ \text{cil})^2=A_{sf}\cdot A_t\ \text{con}$.

Inlocuind obţinem: $(6\pi R^2)^2=4\pi R^2\cdot 9\pi R^2;\ 36\pi^2R^4=36\pi^2R^4$.

2) Pentru volumul corpurilor avem: volumul sferei$=\frac{4}{3}\pi R^3$; volumul cilindrului$=\pi R^2\cdot 2R=2\pi R^3$; volumul conului$=\frac{1}{3}\cdot 3\pi R^2\cdot 3R=3\pi R^3$.

Demonstrăm uşor egalitatea: $(V\ \text{cil})^2=V_{sf}V\ \text{con}$, adică:

$$(2\pi R^3)^2=\frac{4}{3}\pi R^3\cdot 3\pi R^3.$$

3) $$\frac{\text{Volumul sferei}}{\text{Aria sferei}}=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi R^2}=\frac{1}{3}R;\qquad \frac{\text{Volumul cilindrului}}{\text{Aria totală a cilindrului}}=\frac{2\pi R^3}{6\pi R^2}=\frac{1}{3}R;$$

$$\frac{\text{Volumul conului}}{\text{Aria totală a conului}}=\frac{3\pi R^3}{9\pi R^2}=\frac{1}{3}R.$$

44. Să se afle raza unei sfere de fontă cu masa de 10 kg, cunoscînd că densitatea fontei este 7 200 kg/m^3.

R. $\approx$0,7 dm.

45. Generatoarea unui cilindru este 3/4 din raza cercului de bază. Ştiind că acest cilindru are aria totală de 56π cm^2, să i se afle volumul. Din acest cilindru confecţionăm o prismă hexagonală regulată maximă. Cît la sută din volum s-a pierdut ?

Indicaţie. Pierderea$=\pi r^2h-\frac{3r^2\sqrt{3}}{2}\cdot h=r^2h\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\approx r^2h\cdot 0{,}55=26{,}40\text{cm}^3$.

$$\frac{V\ \text{pierd}}{V\ \text{cil}}=\frac{48\cdot 0{,}55}{48\pi}=\frac{0{,}55}{3{,}14}=0{,}175;\ 0{,}175\cdot 100=17{,}5\%.$$

R. $V=48\pi$ cm^3; $\approx$17,5% pierdere.

46. Să se afle volumul corpului de rotaţie, obţinut prin rotirea unui hexagon regulat în jurul unei diagonale. Să se compare acest volum cu volumul sferei circumscrise lui. Se dă $l_6=a$.

Indicaţie. Volumul acestui corp este format din volumul a două conuri şi al unui cilindru.

$R\ \text{con}=R\ \text{cil}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $I\ \text{con}=\frac{a}{2}$; $I\ \text{cil}=a$. $V\ \text{corp}=\pi\frac{3a^2}{4}\cdot\frac{4a}{3}=\pi a^3$; $V\ \text{sferă}=\frac{4\pi a^3}{3}$; $\frac{V\ \text{sferă}}{V\ \text{corp}}=\frac{\frac{4\pi a^3}{3}}{\pi a^3}=\frac{4}{3}$.

R. $V=\pi a^3$; $\frac{V\ \text{sf}}{V\ \text{corp}}=\frac{4}{3}$.

47. Un cilindru are raza R. Să se calculeze: aria totală, volumul cilindrului şi diagonala secţiunii axiale ştiind că secţiunea este un pătrat.

Indicaţie. $At=2\pi R(R+G)=2\pi R(R+2R)=6\pi R^2$, $V=\pi R^2G=\pi R^2\cdot 2R=2\pi R^3$.

R. $6\pi R^2$; $2\pi R^3$; $2R\sqrt{2}$.

48. Soclul unei statui are forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată. Latura pătratului bazei mari este de 0,84 m, înălţimea trunchiului este de 1,18 m şi apotema de 1,2 m. Să se afle aria laterală.

R. $\approx$3 m^2.

49. Să se afle volumul trunchiului de piramidă patrulateră regulată, dacă diagonalele lui sînt de 9 cm, iar laturile bazelor sînt de 7 cm şi 5 cm.

R. 109 cm^3.

50. Laturile bazelor unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată sînt de 2 cm şi 6 cm. Faţa laterală formează cu planul bazei un unghi de 60^o. Să se afle volumul trunchiului.

R. $\frac{26\sqrt{3}}{3}$ cm^3.

51. Raza bazei unui con circular drept este 3 m. Secţiunea paralelă la bază la o distanţă de 3 m de vîrf are raza de 2m. Să se afle volumul şi aria laterală a conului.

R. 42,390 m^3; 50,8690 m^2.

52. Un vas are formă de con cu vîrful D în jos. Secţiunea axială este un triunghi echilateral. In el se lasă să cadă o sferă de rază r. In vas se toarnă apă, astfel încît suprafaţa apei formează un plan tangent la sferă. Care este adîncimea apei după ce se scoate sfera ?

Indicaţie. Pentru a putea calcula adîncimea apei după ce se scoate sfera, va trebui să scoatem volumul sferei din volumul conului care conţine lichid pînă la suprafaţa sferei, deci volumul ABD. Notăm: V=volumul conului ABD; H=înălţimea conului ABD; i şi r_1 înălţimea şi raza conului de apă fără sferă; V_1=volumul conului de apă fără sferă. Secţiunea este un triunghi echilateral $\Rightarrow m(\sphericalangle D_1)=30^o$. Cunoaştem de asemenea raza sferei$=r$; $\Rightarrow OD=2r$ şi, ţinînd seama că $OC=r$, $\Rightarrow H=3r$. Notăm raza conului (CB) cu x, conform aceleiaşi teoreme $BD=2x$. Din triunghiul DBC, avem: $4x^2-x^2=9r^2$; $x^2=3r^2=R^2$; $R=r\sqrt{3}$; $V=3\pi r^3$, $V_1=3\pi r^3-\frac{4\pi r^3}{3}=\frac{5\pi r^3}{3}$. Scoţînd sfera din apă, nivelul apei scade şi urmează să calculăm înălţimea conului nou format: $V=\frac{\pi r_1^2 i}{3}$. Nu cunoaştem pe r_1 şi pe i, pe care le putem determina din triunghiul dreptunghic $DD'N$, unde D' este centrul bazei conului obţinut după scoaterea sferei, iar N intersecţia diametrului cu generatoarea. Notînd $DD'=i=y$, avem: tg $30^o=\frac{ND'}{DD'}$, de unde $ND'=r_1=y\text{tg }30^o=\frac{y}{\sqrt{3}}$; Volumul apei va fi $\frac{\pi r^2}{3}\cdot i=\frac{\pi\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot y}{3}=\frac{\pi y^3}{9}$. Volumele $\frac{5\pi r^3}{3}$ şi $\frac{\pi y^3}{9}$ sînt egale, deci $\frac{5\pi r^3}{3}=\frac{\pi y^3}{9}$, de unde: $y^3=15r^3$. Adîncimea apei $i=\sqrt[3]{15}\,r$.

R. $\sqrt[3]{15}\ r$.

53. Intr–un vas în formă de con, cu vîrful în jos cu înălţimea de 12 dm, baza conului fiind orizontală, se toarnă 301,44 ℓ de apă. Apa se urcă în vas pînă la 8 dm. Să se afle capacitatea vasului întreg.

R. 324π litri.

54. Inălţimea unui con este de 8 m, iar generatoarea de 10 m. Conul este înscris într–o sferă. Să se calculeze volumul sferei.

R. $\frac{25^3\pi}{48}$ m^3.

55. Inălţimea unui con este de 8 m, iar generatoarea de 10 m. Să se afle volumul sferei înscrise în con.

R. 36π m^3.

56. Un con circular drept are baza de 4 cm şi generatoarea de 50 cm. La depărtare de 10 cm de vîrf se face o tăietură printr–un plan paralel cu baza. Să se afle aria totală şi volumul conului care are ca bază cercul de secţiune şi vîrful în centrul bazei conului dat.

R. $At \approx 4\ 689\ cm^2$; $V \approx 3\ 722\ cm^3$.

57. Un con circular drept are volumul 12,56 dm^3 şi lungimea cercului de bază de 12,56 dm. Să se afle aria totală.

R. $At \approx 35,17\ dm^2$.

58. Un triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 15 cm şi o catetă de 12 cm se roteşte în jurul ipotenuzei. Să se calculeze volumul şi aria corpului format.

R. $151,20\pi\ cm^2$; $259,200\pi\ cm^3$.

59. Să se afle volumul sferei circumscrise paralelipipedului dreptunghic cu dimensiunile 2 cm, 3 cm, 4 cm.

Indicaţie. Dacă se notează cu a; b; c dimensiunile paralelipipedului, diagonala d este dată de relaţia: $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Raza sferei circumscrise este: $R=\frac{d}{2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$.

R. $V=\frac{29\pi\sqrt{29}}{6}\ cm^3$.

60. Intr–o sferă de rază r se face o secţiune cu un plan la distanţa d de centru. Să se afle raportul ariilor calotelor formate şi aria cercului de secţiune.

Indicaţie. $\frac{A_1}{A_2}=\frac{2\pi r(r-d)}{2\pi r(r+d)}=\frac{r-d}{r+d}$, $A_{cercului}=\pi(r^2-d^2)$. Aria celei de–a doua calote se poate afla scăzînd din aria sferei aria primei calote: $A_2=A_{sf}-A_1=4\pi r^2-2\pi r(r-d)=2\pi r(r+d)$.

61. Intr–o sferă cu raza de 14 cm este înscrisă o prismă triunghiulară regulată, care are diagonalele unei feţe laterale de 26 cm. Să se afle latura bazei prismei (fig.IV.6).

Indicaţie. Metoda 1. Avem $A'B$=diagonala unei feţe: $A'B=26$; AA'=înălţimea prismei, pe care o notăm cu x. $MO=\frac{x}{2}$; OB=raza cercului circumscris triunghiului ABC; MB= raza sferei =14. Din $\Delta MOB \rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2=R^2-r^2$; $\frac{x^2}{4}=R^2-r^2$, adică $x^2=4R^2-4r^2$.

(1) $x^2=4\cdot196-4r^2$. Din $\Delta ABA'$ avem: $x^2=A'B^2-AB^2=$ $=26^2-AB^2=676-AB^2$; dar $AB=l_3=r\sqrt{3}$, deci:

$x^2=676-3r^2$. (2)

Din relaţiile (1) şi (2) avem: $676-3r^2=4\cdot196-4r^2$; $r=6\sqrt{3}$, de unde $l_3=r\sqrt{3}=18$ cm.

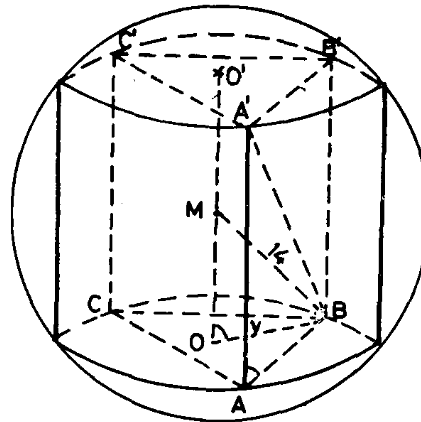


Fig.IV.6

Metoda a 2–a. $A'B=26$ cm=diagonala feţei; $MO=x$; AA'=înălţimea prismei=$2x$; MB=raza sferei=14 cm; $OB=y$=raza cercului circumscris triunghiului de bază al prismei. Din triunghiul dreptunghic MOB avem:

$MO^2+OB^2=MB^2$;$x^2+y^2=196$. Din triunghiul dreptunghic $A'AB$ avem: $A'A^2+AB^2=A'B^2$, $4x^2+3y^2=676$ (fiindcă $AB=l_3=r\sqrt{3}$).

$\begin{cases} x^2+y^2=196 \\ 4x^2+3y^2=676 \end{cases}$. Obţinem $y^2=108$, de unde $AB^2=3y^2=324$, iar $AB=18$.

62. O piesă este compusă dintr–un vas cilindric $ABCD$ (secţiune) cu diametrul de 0,20 m, care este introdus într–un alt vas de forma unui trunchi de con, $ABFE$ (secţiune) ce are generatoarea de 0,9 m (fig.IV.7). Ştiind că generatoarea trunchiului de con face cu înălţimea cilindrului un unghi de 10°, să se afle capacitatea vasului în formă de trunchi de con.

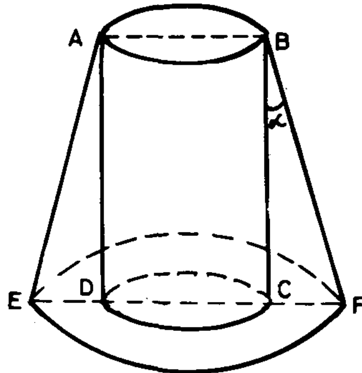


Fig.IV.7

Indicaţie. $CF=0{,}9\cdot(\sin 10^{\circ})=0{,}9\cdot 0{,}174=0{,}15$; EF (diametrul mare)$=DC+2CF=0{,}20+0{,}30=0{,}50$ m. $R=0{,}25$ m, $I=BC=0{,}9\cos 10^{\circ}=0{,}88$; V (trunchiul de con)$=\frac{\pi\cdot I}{3}(R^2+r^2+Rr)=\frac{3{,}14\cdot0{,}88}{3}\cdot$ $\cdot(0{,}0625+0{,}01+0{,}025)$. Volumul aflat în m^3 se transformă în dm^3 şi se află astfel capacitatea ţinînd seama că 1 dm^3=1 ℓ. Se obţine $V=89$ dm^3⇒capacitatea ≈90 ℓ.

63. Un buştean lung de 5 m ce are un cubaj de 1,6 m^3 se taie printr–o secţiune paralelă cu baza, dusă pe la mijlocul lungimii sale. Să se afle diametrul secţiunii.

Indicaţie. Folosim formula $V=C^2L\cdot\frac{1}{4\pi}$, unde C este lungimea cercului mijlociu, iar $\frac{1}{4\pi}$ are valoarea aproximativă 0,08, deci $1{,}6=C^2\cdot5\cdot0{,}08$, de unde $C^2=1{,}6:0{,}4=4$, iar $C=2$ m. Diametrul va fi $2:3{,}14\approx0{,}64$m.

R. $D\approx0{,}64$ m.

64. Un trunchi de con circular drept are $r=3$ cm, $R=8$ cm şi înălţimea de 12 cm. Să se calculeze volumul şi aria laterală.

R. 388π cm^3; 143π cm^2.

65. Un trunchi de con are generatoarea de 26 cm, raza mare de 15 cm şi înălţimea de 2 cm. Să se calculeze volumul conului complet.

R. 2 700 $\pi\cdot cm^3$.

66. Intr–un trunchi de con se dau raza mare de 5 cm, raza mică de 3 cm, iar înălţimea de 12 cm. Din el sînt tăiate două conuri, astfel încît generatoarele unuia sînt în continuare cu generatoarele celuilalt. Să se determine volumul părţii rămase. (fig.IV.8).

Indicaţie. Notăm cu i înălţimea conului ABE şi cu I înălţimea conului DEC. Din figură avem $i+I=H$, iar din asemănarea triunghiurilor AGE şi EFC obţinem: $\frac{r}{R}=\frac{i}{I}$. Ţinînd seama de proprietatea proporţiilor, obţinem: $\frac{r}{R+r}=\frac{i}{I+i}$. Cum $I+i=H$, avem $\frac{r}{R+r}=\frac{i}{H}$, de unde $i=4{,}5$ cm, apoi $I=H-i=H-\frac{rH}{R+r}=\frac{60}{8}=7{,}5$ cm. Cunoaştem elementele conurilor necesare pentru aflarea volumelor. Din

volumul trunchiului scădem suma volumelor celor două conuri: $Vtr=\frac{12\pi}{3}(25+9+15)=196\pi$ cm^3.

$V_1=\frac{25\pi}{3}\cdot 7{,}5=62{,}500\pi$ cm^3; $V_2=\frac{9\pi}{3}\cdot 4{,}5=13{,}5\pi$ cm^3.

$V_1+V_2=76\pi$ cm^3. Partea rămasă$=196\pi-76\pi=120\pi$ cm^3.

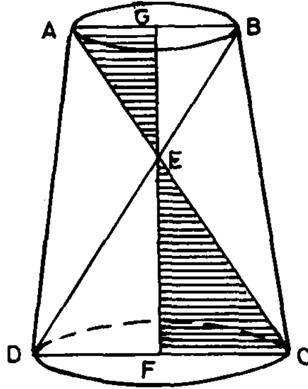


Fig.IV.8

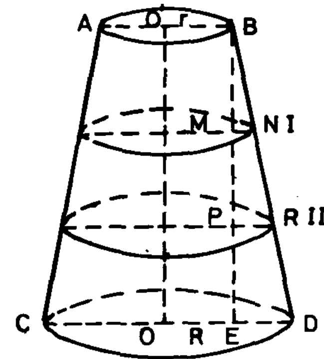


Fig.IV.9

67. Un trunchi de con are înălţimea de 18 cm, iar razale bazelor de 5 cm şi 11 cm. Inălţimea este împărţită în trei părţi egale de către două plane paralele cu bazele. Să se afle ariile secţiunilor (fig.IV.9).

Indicaţie. Secţionînd trunchiul cu un plan axial, obţinem trapezul *ABCD*. Coborînd înălţimea din *B* pe *DC*, se formează triunghiurile dreptunghice: 1) $\Delta BED\sim\Delta BMN$; 2) $\Delta BED\sim\Delta BPR$.

R. 49π cm^2; 81π cm^2.

68. Trunchiul de con cu razale de 3 m şi 5 cm şi un con de aceeaşi înălţime au volumele egale. Să se afle raza bazei conului.

R. 7 cm.

69. Pe laturile *AB* şi *BC* ale pătratului *ABCD* se găsesc punctele *E* şi *F* astfel încît $\frac{AE}{EB}=\frac{BF}{FC}=\frac{3}{4}$. 1) Cunoscînd că aria triunghiului *EFD* este de 74 m^2, să se calculeze volumul piramidei care are ca bază pătratul *ABCD* şi înălţimea 6/2 din latura pătratului de bază. 2) Se face în piramidă o sectiune paralelă cu baza ce împarte înălţimea în raportul de 1/3 faţă de vîrf. Să se afle aria laterală a trunchiului de piramidă ce se formează.

R. 784 m^2.

70. Intr-un triunghi dreptunghic isoscel *ABC*, m($\sphericalangle A$)$=90^\circ$. Se duce biserctoarea $AD=a(D\in BC)$ şi din punctul *D* se duce bisectoarea *DE* a unghiului *ADC* ($E\in AC$). Se cere: 1) perimetrul patrulaterului *ABDE*; 2) să se arate că $AB||DE$; 3) să se calculeze volumul corpului format prin rotirea completă a triunghiului *ABC* în jurul lui *BC*.

R. 1) $a(1+2\sqrt{2})$; 3) $\frac{2\pi a^3}{3}$.

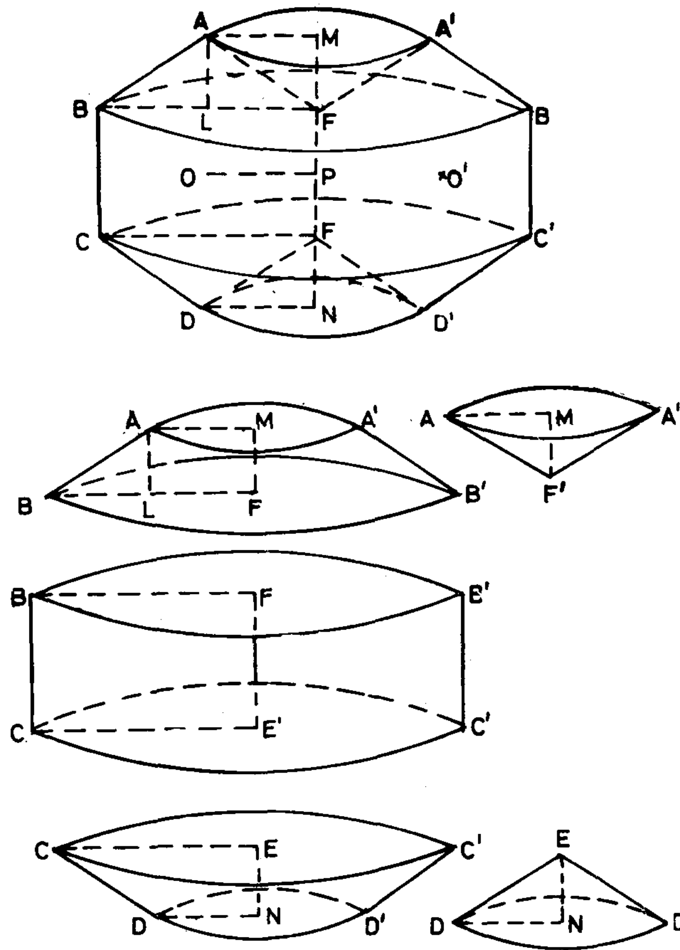


Fig.IV.10

71. Să se afle volumul solidului născut prin rotația completă a unui hexagon regulat cu latura de 2 cm în jurul unei laturi (fig.IV.10).

Rezolvare. 1) Considerăm hexagonul $ABCDEF$. Trunchiul de con $ABB'A'$ născut din rotirea laturii AB în jurul laturii EF are: raza cercului mare $R=BF=l_3=$ $=AB\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ cm, raza cercului mic $r=AM=LF=$ $=\frac{2\sqrt{3}}{2}$ cm $=\sqrt{3}$ cm; $h=MF=$ $=AL=1$ cm. Volumul $V_1=\frac{\pi h}{3}(R^2+r^2+Rr)=$ $=\frac{\pi\cdot 1}{3}(12+3+6)=7\pi$ cm^3.

2) Cilindrul $BCB'C'$ născut din rotirea laturii BC în jurul laturii EF are raza $R=BF=2\sqrt{3}$ cm, înălțimea $H=EF=BC=2$ cm, iar volumul $V_2=\pi R^2\cdot H=$ $=24\pi$ cm^3.

3) Volumul conului FAA' născut din rotirea laturii AF are: raza cercului de bază $r=AM=\sqrt{3}$ cm, înălțimea $FM=1$ cm, deci volumul $V_3=\frac{\pi r^2 h}{3}=\frac{\pi\, 3\cdot 1}{3}=\pi$ cm^3.

4) Volumul corpului născut prin rotirea hexagonului este: $V=2\cdot V_1+V_2-2V_3=14\pi+24\pi-2\pi=$ $=36\pi$ cm$^3\approx 113{,}04$ cm^3.

72. Pentru construcția unui pilon de beton necesar la podul de peste Dunăre s-au întrebuințat următoarele materiale: a) cimentul reprezintă 1/4 din masa lui și încă 500 chintale; b) pietrișul și nisipul reprezintă 2/5 din masa pilonului și încă 800 chintale, exceptînd masa cimentului; c) fier beton cu masa de 2 500 chintale. Pilonul are forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată avînd raportul laturilor bazelor $\frac{1}{3}$, aria totală 210 m^2 și aria laterală 120 m^2. Să se calculeze: 1) masa totală a pilonului; 2) volumul acestui pilon.

R. $\approx$10 857 chintale, 156 m^3.

73. Un teren de forma unui triunghi dreptunghic cu latura cea mai mare de 24 dam era folosit astfel: $\frac{1}{3}$ din el şi încă 10 dam^2 pentru teren de sport; $\frac{2}{9}$ din restul terenului pentru parcat maşinile agricole. Restul de 0,42 hectare pentru cultivat zarzavaturi. Terenul a fost amenajat pentru construcţia unei şcoli ce ocupă o suprafaţă pătratică cu două vîrfuri pe catetele triunghiului dreptunghic şi două vîrfuri pe ipotenuză. Să se afle: 1) aria întregului teren; 2) suprafaţa ocupată de clădirea şcolii; 3) cît la sută reprezintă suprafaţa ocupată de şcoală din suprafaţa ce era ocupată iniţial de terenul de sport. 4) Clădirea şcolii fiind de forma unui paralelipiped cu aria laterală de 2 940 m^2, să se afle volumul şcolii.

R. 1) 96 dam^2, 2) 36 dam^2, 3) ≈85%, 4) 44 100 cm^3.

74. Un teren în forma unui triunghi dreptunghic avînd latura cea mai mică de 25 m a fost folosit astfel: 1/3 din suprafaţa terenului şi încă 10 m^2 pentru un teren de sport, 2/7 din suprafaţa rămasă pentru parcat maşinile agricole, iar 350 m^2 s–au folosit pentru cultivat diverse zarzavaturi. S–a amenajat acest teren pentru a se construi pe el o creşă de forma unui cub avînd unul din colţuri comun cu unghiul drept al terenului, iar un colţ al clădirii pe ipotenuza triunghiului dreptunghic. Să se afle: 1) aria terenului şi perimetrul lui; 2) cît la sută reprezintă suprafaţa ocupată de clădire din suprafaţa întregului teren; 3) volumul clădirii.

R. 1) 750 m^2, 150 m; 2) ≈41,5%; 3) ≈5 495 m^3.

75. O locuinţă personală de forma unui paralelipiled dreptunghic s–a construit pe un teren de forma unui triunghi isoscel, avînd un unghi comun, iar una din muchiile clădirii pe lungimea cea mai mare a terenului. Inălţimea clădirii este de 2/5 din perimetrul bazei clădirii. Inainte de construcţia clădirii, terenul era folosit pentru cultivat zarzavaturi, astfel: 1/4 din suprafaţă şi încă 9 m^2 pentru cultivat ceapă, 0,(3) din terenul rămas cultivat cu roşii, iar restul terenului de 94 m^2 era cultivat cu cartofi. Să se afle: 1) aria terenului; 2) aria laterală a clădirii.

R. 1) 200 m^2; 2) 640 m^2.

76. Un teren de forma unui trapez isoscel, cu baza mare 54 m, baza mică 24 m a fost împrejmuit cu un gard astfel: în prima zi cu 4 m mai puţin decît 25% din perimetrul lui; a doua zi 50% din perimetrul rămas, iar a treia zi, restul de 50 m. Suprafaţa terenului a fost împărţită în trei parcele invers proporţionale cu numerele 6; $\frac{2}{3}$ şi 0,375. Pe cele două parcele mai mici s–au cultivat zarzavaturi iar pe parcela cea mai mare s–a construit o cisternă pentru apă, de forma unui trunchi de con cu aria totală de 108π m^2, aria laterală de 50π m^2, iar raportul razelor bazelor sale de 3/7 (cisterna–trunchi de con este cu baza mică în sus). Să se afle: 1) aria terenului; 2) ariile celor trei parcele; 3) cîţi litri de apă s–au pompat în cisternă, dacă apa s–a ridicat pînă la 75% din înălţimea ei, faţă de bază.

R. 1) 780 m^2; 2) 30 m^2, 270 m^2, 480 m^2; 3) 219 125 litri.

77. Un triunghi dreptunghic ABC, m($\sphericalangle A$)=90°, are AB=6 cm şi BC=12 cm. Se duce mediana AM. Înălţimea BP a triunghiului ABM intersectează pe AC în D, iar prelungirea lui MD taie pe AB în N. Se cunoaşte că $\frac{PD}{BP}=\frac{1}{3}$. 1) Să se afle aria triunghiului MNB. 2) Să se arate că aria triunghiului MDC este a treia parte din aria triunghiului ABC. 3) Să se arate că ΔNDC este isoscel. 4) Să se arate că ΔBNC este echilateral. 5) Să se calculeze volumul corpului format din rotaţia completă a triunghiului ABC în jurul lui BC.

R. 1) $18\sqrt{3}$; 5) 108π cm^3.

78. Un teren agricol de formă dreptunghiulară are lungimea cu 1 km mai mare decît lăţimea, iar perimetrul lui este egal cu perimetrul unui alt teren de forma unui pătrat cu aria 15 625 ha. Terenul se împarte în trei parcele astfel încît raportul primelor două este de 3/4, iar al ultimelor două 4/5. Pe parcela cea mai mică s–au cultivat roşii, cartofi şi mazăre, proporţional cu numerele $\frac{1}{3}$; 0,(6) şi $\frac{4}{9}$. Parcela cea mai mare a fost cultivată cu grîu, iar cealaltă cultivată cu porumb. Să se afle: 1) ariile celor trei parcele; 2) ariile suprafeţelor cultivate cu roşii, cartofi, mazăre; 3) cît la sută din aria suprafeţei totale reprezintă aria suprafeţei ocupată prin construirea unui siloz de forma unui paralelipiped dreptunghic cu înălţimea cît 5/3 din lăţime, lăţimea 3/4 din lungime şi suma tuturor muchiilor sale egală cu suma muchiilor unui cub cu aria totală de 96 dam^2. 4) Să se calculeze volumul silozului.

R. 1) 39 km^2; 52 km^2; 65 km^2; 2) 9 km^2; 18 km^2; 12 km^2; 3) $\frac{1}{1300}$%; 4) 60 dam^3.

79. Pe două semidrepte Ox şi Oy făcînd un unghi xOy a cărui măsură este de 120° se iau două segmente $OA=OB=a$, iar pe perpendiculara în O pe planul xOy se ia un segment $[OC]$ congruent cu diagonala pătratului de latură a. 1) Să se demonstreze că ΔABC este echilateral. Să se afle: 2) aria totală şi volumul piramidei $COAB$; 3) aria triunghiului ABP (P fiind mijlocul segmentului OC); 4) aria şi volumul corpului obţinut prin rotaţia completă a triunghiului ABP în jurul lui AB (A se socoteşte exprimat în cm).

R. 2) $a^2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$cm^2, $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$cm^3; 3) $\frac{3a^2}{4}$cm^2; 4) $\frac{3\sqrt{2}\pi a^2}{2}$cm^2, $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{4}$cm^3.

80. Un trunchi de con cu aria laterală de 100π cm^2 este circumscris unei sfere cu raza de 4 cm. Se cere aria totală a cilindrului înscris în trunchiul de con cu una din baze comună cu baza mică a trunchiului de con şi cu aceeaşi înălţime ca şi trunchiul de con.

R. 40π cm^2.

81. O piramidă cu vîrful în V are ca bază un romb $ABCD$ cu m($\sphericalangle A$)=60° şi diagonala $BD=4a$. Înălţimea $VO=2a\sqrt{3}$ (O centrul rombului). Din această piramidă se scoate un con circular drept cu acelaşi vîrf, iar baza un cerc cu centrul O, raza conului fiind jumătate din raza cercului înscris în romb (a este socotit în cm). Se cere: 1) volumul

şi aria laterală a piramidei; 2) cît la sută reprezintă volumul conului din volumul piramidei; 3) lungimile muchiilor VA şi VB; 4) măsura unghiurilor formate de muchiile VA şi VB cu planul bazei.

R. 1) $16a^3$ cm^3; $8a^2\sqrt{15}$ cm^2; 2) ≈17%; 3) $VA=2a\sqrt{6}$ cm; $VB=4a$ cm; 4) 45^o; 60^o

82. Un trapez $ABCD$ are baza mare $BC=30$ cm, baza mică $AD=9$ cm, $AB=10$ cm şi $CD=17$ cm. Se cere: 1) aria trapezului; 2) să se construiască acest trapez; 3) să se afle aria triunghiului ce se formează prin prelungirea laturilor neparalelele avînd ca bază, baza mare a trapezului; 4) să se afle volumul corpului format prin rotaţia completă a trapezului în jurul bazei mari.

R. 1) 156 cm^2; 3) $171\frac{3}{7}$cm^2; 4) $V=1\ 024\pi$ cm^3.

83. O cisternă de formă sferică pentru vin este montată într–un suport de beton de formă conică, aşa fel încît cisterna este tangentă la generatoarele şi baza conului. Generatoarea conului este de 25% din înălţimea lui plus 8m, iar raportul acestora este de 5/4. Pentru a umple vasul cu vin era necesar un număr de pompe ce trebuiau să funcţioneze un anumit număr de ore. S–au adus încă 4 pompe în plus şi vasul s–a umplut cu 2 ore mai devreme. Dacă iniţial ar fi fost cu 2 pompe mai puţin decît în plan atunci vasul s–ar fi umplut cu două ore mai tîrziu. Se cere: 1) capacitatea cisternei; 2) cîte pompe erau necesare pentru a umple vasul conform planului şi în cîte ore.

R. 1) 36π kl; 2) 8 pompe; 6 ore.

84. Aria secţiunii axiale a unui trunchi de con este de 5 500 cm^2; $3\frac{1}{3}$ % din raza bazei mici este cu 79 cm mai mică decît raza bazei mari, iar diferenţa acestor raze este de 50 cm. 1) La ce distanţă de planul bazei mici se întîlneşte generatoarea cu axa conului din care face parte trunchiul? 2) Să se determine măsura unghiului format de generatoare cu planul bazei mari şi măsura unghiului ce se formează la vîrful conului din care face parte trunchiul. 3) Turnînd apă într–un vas de forma şi dimensiunile trunchiului de con considerat, pînă la o înălţime egală cu 40% din înălţimea trunchiului de con faţă de baza mare, să se calculeze ce cantitate de apă în litri este turnată în vas.

R. 30 cm; 3) 38,726 l.

85. Secţiunea axială a unui trunchi de con este un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare. Razele bazelor sînt în raport de 1/2, iar suma lor este de 12 cm. 1) Să se calculeze aria laterală a trunchiului de con. 2) Să se calculeze volumul conului întreg din care face parte trunchiul dat.

R. 1) $48\sqrt{10}\,\pi$ cm^2, 2) 512π cm^3.

86. Un teren în formă de dreptunghi ABC este folosit astfel: 0,375 din suprafaţa lui şi încă 10 m^2 pentru teren de sport; 2/5 din restul suprafeţei, şi încă 4 m^2 pentru răsaduri de flori. Restul terenului de 140 m^2 este folosit pentru parcat maşinile agricole. Se face, pe acest teren, un şanţ de canalizare pe direcţia bisectoarei dusă din B care intersectează latura AD în punctul P. Se ştie că raportul ariilor suprafeţelor

ABP şi *ABCD* este 1/4. 1) Se cere aria terenului. 2) Să se calculeze dimensiunile terenului. 3) Să se calculeze lungimea şanţului.

R. 1) 400 m^2; 2) $10\sqrt{2}$ m; $20\sqrt{2}$ m; 3) 20 m.

87. Intr–o piramidă patrulateră regulată *VABCD* latura este cît media proporţională a numerelor 6 şi $8\frac{1}{6}$. In această piramidă se face o secţiune *A'B'C'D'* paralelă cu baza avînd latura de 5 cm. Diagonala *BD'* a trunchiului de piramidă ce se formează este cît baza de numeraţie a numărului 65 care scris în baza zece este 59. Să se afle: 1) aria secţiunii diagonalei *B'D'BD*; 2) volumul piramidei.

R. 1) $18\sqrt{2}$ cm^2; 2) $V=171{,}5$ cm^3.

88. Pe un teren de forma unui trapez isoscel cu perimetrul de 48 m şi baza mică de 6 m s–a construit o cisternă cilindrică avînd baza tangentă la laturile trapezului. Inălţimea cisternei este $\frac{2}{\sqrt{3}}$ din raza cercului. Să se afle: 1) aria terenului; 2) volumul cisternei.

R. $72\sqrt{3}$ cm^2; 162π m^3.

89. Media aritmetică a dimensiunilor bazei unui paralelipiped dreptunghic este 20 cm; 2/3 din dimensiunea cea mai mare a bazei, micşorată apoi cu 25% din ea este cît dimensiunea cea mai mică a bazei paralelipipedului micşorată cu 6 cm. Muchia paralelipipedului este, în cm, media proporţională a numerelor 20 şi 5. Pe lungimea *AD* a dreptungiului *ABCD*, baza paralelipipedului, se ia un punct *N* aşa fel încît $NA/ND=$ $=7$, iar pe lungimea *BC*, opusă lui *AD* se ia un alt punct *M* aşa fel încît $MB/MC=3/5$. Să se calculeze: 1) dimensiunile paralelipipedului; 2) cît la sută reprezintă dimensiunea cea mai mare din dimensiunea cea mai mică a bazei paralelipipedului; 3) diagonala paralelipipedului (cu aproximaţie în minus de o zecime); 4) lungimea segmentului *MN*; 5) cu cît trebuie prelungite laturile dreptunghiului pentru a intersecta prelungirile segmentului *MN* în ambele sensuri.

R. 1) 24 cm, 16 cm, 10 cm; 2) 150%; 3) 30,5 cm. 4) $MN=20$ cm; 5) 4 cm; 12 cm.

90. Baza unei piramide este un triunghi ale cărui laturi sînt invers proporţionale cu numerele $\frac{1}{40}$, $\frac{1}{74}$ şi $\frac{1}{102}$, iar diferenţa dintre latura cea mai mare şi cea mai mică a triunghiului este 31 cm. Inălţimea piramidei este cu 25% mai mare decît înălţimea triunghiului de bază referitoare la latura cea mai mare a triunghiului. Se face o secţiune paralelă cu baza piramidei, secţiune al cărei perimetru este 0,54 m. Să se calculeze: 1) laturile triunghiului de bază a pirmidei; 2) laturile triunghiului de secţiune; 3) cît la sută reprezintă latura cea mai mică a triunghiului de bază din latura cea mai mică a secţiunii; 4) volumul piramidei iniţiale.

R. 1) 20 cm, 37 cm, 51 cm; 2) 10 cm, 18,5 cm, 25,5 cm; 3) 200%; 4) 1 530 cm^3.

91. Perimetrul bazei unei piramide triunghiulare este de $18\sqrt{3}$ cm, iar muchia laterală formează cu planul bazei un unghi de 45°. La 2/3 din înălţime faţă de bază se face

o secţiune paralelă cu baza piramidei. Să se calculeze: 1) media aritmetică între latura bazei piramidei şi înălţimea piramidei; 2) volumul piramidei; 3) volumul piramidei avînd ca bază secţiunea efectuată; 4) raportul volumelor celor două piramide; 5) cît la sută reprezintă aria bazei piramidei iniţiale din aria bazei piramidei a doua?

R. 1) $3(\sqrt{3}+1)$; 2) $54\sqrt{3}$ cm^3; 3) $2\sqrt{3}$ cm^3; 4) $\frac{1}{27}$; 5) 900%.

92. O piramidă are ca bază un triunghi ABC ale cărui laturi sînt proporţionale cu numerele 12, 16,20, iar diferenţa dintre latura cea mai mare şi cea mai mică este 2 cm. Inălţimea piramidei este cu 0,8(3) cm mai mare decît înălţimea triunghiului de bază referitor la latura cea mai mare a triunghiului. Se face o secţiune paralelă cu baza piramidei al cărei perimetru este 0,04 m. Să se calculeze: 1) laturile triunghiului de bază al piramidei; 2) laturile triunghiului de secţiune făcută în piramidă; 3) înălţimea triunghiului de bază referitoare la latura cea mai mare; 4) volumul piramidei iniţiale; 5) cît la sută reprezintă latura cea mai mică a triunghiului de bază din latura cea mai mică a triunghiului de secţiune ?

R. 1) 3 cm, 4 cm, 5 cm; 2) 1 cm; $1\frac{1}{3}$ cm; $1\frac{2}{3}$ cm;
3) 2,4 cm; 4) 6,5 cm^3; 5) 300%.

93. O piramidă are ca bază un triunghi al cărui perimertru este 15 cm laturile lui sînt trei numere consecutive. Se face o secţiune paralelă cu baza, avînd latura cea mai mare a triunghiului de secţiune de 1,5 cm. Să se calculeze: 1) laturile bazei piramidei; 2) perimetrul triunghiului de secţiune; 3) media proporţională între laturile mijlocii ale triunghiului de bază şi cel de secţiune.

R. 1) 4 cm, 5 cm, 6 cm; 2) 3,75 cm; 3) 2,5.

94. O prismă dreaptă are ca bază un dreptunghi $ABCD$ cu lungimea AB egală cu 133,(3)% din lăţimea BC, iar înălţimea prismei este cu 25% mai mare decît dimensiunea cea mai mare a bazei. 0,125 din lungimea dreptunghiului este cu 1 cm mai mică decît $33\frac{1}{3}$% din lăţimea lui. Din punctele A şi C se duce cîte o perpendiculară pe diagonala BD a dreptunghiului. Figura $AA'CC'$ este baza unei alte prisme drepte cu aceeaşi înălţime ca şi prima prismă (A'şi C'sînt picioarele perpendicularelor duse pe diagonala BD; A'şi $C' \in BD$). 1) Să se afle volumul prismei iniţiale. 2) Să se arate că $AA'CC'$ este un paralelogram. 3) Să se determine laturile şi diagonalele paralelogramului $AA'CC'$. 4) Să se calculeze unghiul format de diagonala prismei iniţiale cu planul bazei.

R. 1) V=480 cm^3; 3) AA'=4,8 cm; $AC'=\sqrt{30,28}$ cm;
AC=10 cm; $A'C'$=2,8 cm; 4) 45°.

95. Latura bazei unei piramide patrulatere regulate este a cm; muchia piramidei face cu planul bazei un unghi de 60°. Se face o secţiune paralelă cu baza pe la mijlocul înălţimii. Să se afle raportul volumelor celor două corpuri formate prin această secţiune.

R. $\frac{1}{7}$.

96. $\frac{2}{7}$ din latura unei piramide patrulatere regulate este cu 2 cm mai mare decît 0,2 din latura unei prisme patrulatere regulate înscrisă în piramidă, cu baza pe planul bazei piramidei. Raportul dintre latura bazei piramidei micşorată cu un sfert din dublul laturii piramidei şi latura prismei micşorată cu 3 cm este 1. Diagonala trunchiului de piramidă ce se formează prin înscrierea prismei este –în cm– media proporţională a numerelor 40,5 şi 8. Să se afle: 1) volumul piramidei; 2) aria laterală a prismei.

R. 1) $V \doteq 1\,372$ cm^3; 2) Aria laterală=240 cm^2.

97. 25% din înălţimea unui con mărită cu 2 cm este cît 0,6 din generatoarea lui micşorată cu 2 cm, iar media lor aritmetică mărită cu 1 cm este cît cea mai mare dintre ele. Să se calculeze: 1) cît la sută reprezintă raza conului din raza unei sfere înscrisă în acest con; 2) volumul sferei înscrisă în con; 3) aria laterală a conului; 4) raportul volumelor sferei şi conului.

R. 1) 200%; 2) 36π cm^3;3) 60π cm^2; 4) $\frac{3}{8}$.

98. $\frac{1}{11}$ din raza bazei unui con este cu 8cm mai mică decît raza unui cerc de secţiune paralelă cu baza conului făcută la o distanţă de bază, egală cu media proporţională între numerele 144 şi 9 (socotită în cm). Raportul razelor trunchiului de con format prin planul de secţiune este $\frac{5}{11}$, iar înălţimea trunchiului este împărţită de două plane de secţiune paralele cu bazele în trei părţi egale. Să se afle razele cercurilor de secţiune.

R. (raza conului=32 cm) 10 cm; 14 cm; 18 cm.

99. Să se afle aria unei sfere circumscrise paralelipipedului dreptunghic, cu dimensiunile invers proporţionale cu numerele 0,25, $\frac{1}{6}$ şi 0,125, iar diferenţa dintre suma dimensiunilor bazei paralelipipedului şi muchia lui este 1cm. Să se determine raportul dintre numărul care exprimă raza sferei şi media proporţională dintre numerele 29 şi 4.

R. 29π cm^2; $\frac{1}{4}$.

100. Suma dintre diagonalele unui paralelogram şi una dintre laturile sale este 165 cm. Suma diagonalelor întrece cu 12 cm dublul acestei laturi a paralelogramului, iar diferenţa dintre această latură a paralelogramului şi diagonala cea mai mică este de 11 cm. 1) Să se afle volumul piramidei care are ca bază acest paralelogram, iar înălţimea cît $33\frac{1}{3}$% din latura paralelogramului. 2) Cît la sută reprezintă diagonala mică a paralelogramului din înălţimea lui ?

R. 1) 6 936 cm^3; 2) 166,(6)%.

101. Intr–o prismă cu baza un triunghi dreptunghic în care raportul catetelor este 3/4 iar diferenţa dintre proiecţiile lor pe ipotenuză este de 2,8 cm, se înscrie un cilindru cu aceeaşi înălţime ca şi prisma. 1) Să se calculeze raportul volumelor cilindrului şi

al prismei în care este înscris cilindrul. 2) Să se calculeze a patra proporţională între raza cilindrului, înălţimea triunghiului dreptunghic dusă din vîrful unghiului drept şi cateta cea mai mică.

R. 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) 14,4.

102. Un cub este înscris într–o piramidă patrulateră regulată astfel încît patru vîrfuri ale sale se află pe muchiile laterale ale piramidei, iar celelalte patru vîrfuri se află pe planul bazei. 1) Să se determine aria totală a cubului ştiind că 0,75 din latura bazei piramidei întrece cu 2 cm 0,125 din înălţimea ei, iar raportul acestora este 1/2. 2) Să se arate că numărul care exprimă volumul piramidei este acelaşi cu cel ce exprimă aria totală a cubului. 3) In ce raport se află ariile bazelor cubului şi piramidei ?

R. 1) $42\frac{2}{3}$ m^2; 2) $42\frac{2}{3}$ m^3; 3) $\frac{4}{9}$.

103. Intr–un con cu unghiul din vîrf de 90^o se înscrie un cilindru. Diagonala secţiunii axiale (un pătrat) a cilindrului este $a\sqrt{2}$ cm. Baza cilindrului este pe planul bazei conului iar generatoarele lui întîlnesc generatoarele conului respectiv. Să se determine raportul dintre aria totală a cilindrului şi aria laterală a conului.

R. $\frac{2}{3\sqrt{2}}$.

104. Intr–un trunchi de con, diferenţa pătratelor celor două raze este 16, iar suma lor este 8 cm. Diferenţa razelor reprezintă 16,(6)% din înălţimea trunchiului. Din el se taie două conuri ce au ca baze, bazele trunchiului, iar generatoarele unuia sînt în prelungirea generatoarelor celuilalt. Să se determine: 1) volumul trunchiului de con; 2) cît la sută reprezintă înălţimea conului celui mare din înălţimea conului mic; 3) raportul înălţimilor celor două conuri; 4) raportul dintre volumul părţii rămase după scoaterea celor două conuri şi volumul trunchiului de con.

R. 196π cm^3; 2) 166,(6)%; 3) $\frac{3}{5}$; 4) $\frac{30}{49}$.

105. Intr–un triunghi ABC, 1/9 din AC este cît 0,1 din latura AB şi 3/5 din AB este cu 3 cm mai mare decît 0,3(3) din AC. Inălţimea BD este de 8 cm. Să se afle: 1) perimetrul triunghiului ABC; 2) înălţimea dusă din vîrful C în triunghiul ABC. 3) Triunghiul ABC este baza unei piramide cu înălţimea VA, această înălţime fiind cu 25% mai mare decît înălţimea BD a triunghiului de bază. Să se afle unghiul format de muchia VB cu latura AB a triunghiului de bază. 4) Să se afle volumul piramidei $VABC$.

R. 1) $(19+\sqrt{73})$ cm; 2) 7,2 cm; 3) 45^o; 4) 120 cm^3.

106. Baza unei prisme este un triunghi dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A)=90^o$, în care cateta AB este 0,75 din AC iar de patru ori AC micşorată cu 7 cm este de trei ori mai mare decît AB. Inălţimea prismei întrece înălţimea AD a triunghiului de bază ($D \in BC$) de cinci ori. Se face o secţiune în prismă printr–un plan care trece prin muchia laterală BB' a prismei şi prin bisectoarea BE a unghiului B al triunghiului de bază ($E \in AC$). Să se afle: 1) perimetrul triunghiului ABC; 2) proiecţiile catetelor pe ipotenuza BC; 3) volumul prismei cu baza BEC şi cu aceeaşi înălţime ca şi prisma iniţială.

R. 1) 12 cm; 2) 1,8 cm; 3,2 cm; 3) 45 cm^3.

107. O piramidă $VABC$ are ca bază un triunghi echilateral (ABC) şi ca înălţime una dintre muchiile sale laterale VA. Suma muchiilor egale împreună cu perimetrul triunghiului de bază este 139,5 cm, iar raportul dintre latura triunghiului de bază şi una din muchiile laterale egale este $\frac{2,5}{4}$. Pe latura AB a triunghiului de bază se ia punctul $M(M \in AB)$ care împarte latura AB în raportul 2/7. Din M se duce o paralelă la muchia VB, care taie înălţimea piramidei în $N(N \in VA)$ şi o paralelă MG la BC latura triunghiului de bază care taie latura AC a triunghiului în punctul $G(G \in AC)$. Să se calculeze: 1) aria triunghiului MNG; 2) volumul piramidei $VABC$.

R. 1) ≈ 19 cm^2; 2) $V \approx 2\,050$ cm^3.

108. Mediana BE dusă pe una din laturile egale ale unui triunghi isoscel ABC (cu baza BC) împarte perimetrul triunghiului în două părţi: $AB+BE$ şi $BC+CE$. Prima parte este mai mică decît a doua şi raportul celor două părţi este $\frac{7\frac{1}{2}}{8,5}$. Se cunoaşte că 1/3 din partea cea mai mică mărită cu 1/5 din ea este cu 9 cm mai mică decît partea cea mai mare. Inălţimea AD şi mediana BE se taie în G ($D \in BC$). 1) Să se calculeze aria triunghiului ABC. 2) Să se demonstreze că patrulaterul $GECD$ este echivalent cu triunghiul ABG. 3) Să se calculeze înălţimea triunghiului AGE corespunzătoare laturii AE. 4) Să se calculeze aria şi volumul corpului format prin rotaţia completă a triunghiului isoscel în jurul uneia dintre laturile egale.

R. 1) 48 cm^2; 2) 16 cm^2; 3) 3,2 cm; 4) $211,2\pi$ cm^2; $307,2\pi$ cm^3.

109. Intr-un triunghi dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A)=90^\circ$; cateta AB mărită cu 25% din ea este cu 13 cm mai mică decît suma catetelor triunghiului iar 0,125 din AB este de 15 ori mai mică decît AC. Triunghiul ABC este baza unei piramide a cărei înălţime VA este 17/60 din înălţimea AD a triunghiului ABC ($D \in BC$). Se face o secţiune printr-un plan paralel cu baza la distanţa de 17/20 din înălţimea piramidei faţă de vîrf şi o altă secţiune prin muchia VA şi mediana AE relativă la ipotenuză ($E \in BC$). Să se afle: 1) volumul trunchiului de piramidă format prin prima secţiune; 2) aria triunghiului din secţiunea VAE.

R. 1) ≈ 70 cm^3; 2) $38\frac{1}{2}$ cm^2.

110. Intr-un romb $ABCD$ diagonala mică AC este $2\sqrt{5}$ cm iar suma dintre latura rombului şi proiecţia ei pe diagonala mare este de $5+2\sqrt{5}$ cm. Fie AN înălţimea dusă din A pe CD şi AM înălţimea dusă din A pe BC; apoi $AM \cap BD=\{E\}$ şi $AN \cap BD=\{F\}$. Să se calculeze: 1) aria rombului; 2) mărimea înălţimii rombului AM (sau AN), valoarea rapoartelor AF/FN şi OF/FD. 3) Să se arate că patrulaterul $MCNA$ este inscriptibil. 4) cît la sută reprezintă aria pentagonului $MCNFE$ din aria patrulaterului $MCNA$? 5) Să se afle volumul piramidei ce are ca bază rombul $ABCD$ ştiind că

muchia *SA* a piramidei este perpendiculară pe planul bazei şi formează cu muchia *SC* a piramidei un unghi de 30°.

R. 1) 20 cm²; 2) *AM*=4 cm; $\frac{AF}{FN}=\frac{5}{3}$; $\frac{OF}{FD}=\frac{1}{3}$; 4) 68,75%; 5) $\frac{40\sqrt{15}}{3}$ cm³.

111. Baza unei prisme drepte este un triunghi *ABC*. Pe prelungirea laturii *AC* se ia un punct *D* astfel ca $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle CBD$. Segmentul *AD* este de $2\frac{1}{2}$ ori mai mare decît segmentul *CD*, iar *AD*+*CD*=13 cm. Latura *BC* a triunghiului *ABC* este de 2 cm şi înălţimea prismei este $\sqrt{65}$ cm. 1) Să se arate că *BD* este media proporţională a segmentelor *AD* şi *CD*. 2) Să se afle laturile triunghiului *ABC*. 3) Să se afle aria laterală a prismei.

R. 2) $AB=\sqrt{10}$ cm; $AC=5\frac{4}{7}$ cm; 3) $\frac{53+7\sqrt{10}}{7}\sqrt{65}$ cm².

112. Intr–un cilindru circular drept este înscrisă o prismă cu baza un triunghi echilateral *ABC* avînd latura de $12\sqrt{3}$ cm. Din centrul *O* al bazei cilindrului se duce o paralelă *OD* la latura *BC* a triunghiului ($D \in AC$). Inălţimea prismei este $12\sqrt{3}$ cm şi este egală cu înălţimea cilindrului. Să se afle: 1) volumul cilindrului; 2) volumul prismei cu baza *ABC*. 3) Notînd cu *M* piciorul perpendicularei dusă din *O* pe latura *BC* ($M \in BC$), să se afle volumul prismei avînd ca bază patrulaterul *ODCM* şi aceeaşi înălţime ca şi cilindrul.

R. 1) $1\,728\sqrt{3}\pi$ cm³; 2) 3 888 cm³; 3) 1 080 cm³.

113. Una din laturile unui paralelogram este cu 11 cm mai mare decît diagonala mică a lui şi 0,5 din diagonala mare micşorată cu 25% din diagonala mică este 27 cm. Suma dintre diferenţa menţionată mai sus şi latura considerată este 78 cm. Paralelogramul este baza unei piramide în care se face o secţiune paralelă cu baza ce împarte înălţimea piramidei în raportul de 3/5 socotit de la vîrf. Se ştie că înălţimea piramidei este cu 25% mai mică decît diagonala mică a paralelogramului. Să se calculeze: 1) diagonalele paralelogramului; 2) volumul piramidei; 3) volumul piramidei care are ca bază secţiunea făcută în piramida iniţială şi vîrful comun cu prima.

R. 1) 40 cm, 74 cm; 2) 12 240 cm³; 3) 645,46875 cm³.

114. Intr–un trapez dreptunghic *ABCD* (*BC* baza mare) diagonala *BD* este perpendiculară pe latura neparalelă *CD*. 0,125 din înălţimea *AB* a trapezului este cu 1 cm mai mică decît 20% din *CD*. Raportul acestora este 4/5 (*AB*/*CD*=4/5). Se cere: 1) perimetrul trapezului *ABCD*; 2) aria triunghiului *ACD*; 3) aria triunghiului *DCE* (*E* fiind punctul de intersecţie al paralelei dusă din *C* la *AB* şi prelungirea diagonalei mici *BD*); 4) distanţa punctului *A* la latura *CD*; 5) aria şi volumul corpului format prin rotaţia completă a trapezului *ABCD* în jurul bazei mici.

R. 1) $45\frac{1}{3}$ cm; 2) $42\frac{2}{3}$ cm²; 3) 37,5 cm²; 4) $8\frac{8}{15}$ cm; 5) $\frac{1\,232\pi}{3}$ cm²; $\frac{2\,816\pi}{3}$ cm³.

115. Intr–o prismă dreptunghiulară oblică înălţimea $A'M$ a feţei laterale $ABB'A'$ este şi înălţimea prismei ($M \in AB$), iar $\frac{MA}{MB} = 1$. Lăţimea dreptunghiului de bază este de 6 cm iar diferenţa dintre diagonala şi lungimea dreptunghiului este de 2 cm. Segmentul ce uneşte vîrful A' cu O (punctul de întersecţie al diagonalelor bazei) este de 5 cm. Să se afle: 1) volumul prismei; 2) măsura unghiul format de muchia AA' cu latura AB a dreptunghiului de bază; 3) aria triunghiului AMO; 4) volumul piramidei ce are ca bază triunghiul AMO şi vîrful în A'.

R. 1) 192 cm^3; 2) 45°; 3) 6 cm^2; 4) 8 cm^3.

116. Intr–o piramidă dreptunghiulară cu muchiile laterale egale se cunosc următoarele date: 40% din diagonala bazei micşorată cu 0,1(6) din lăţimea bazei este de două ori mai mică decît lăţimea, iar diferenţa dintre diagonală şi lăţime este de 4 cm. Muchia piramidei face cu planul bazei un unghi de 60°. Se face o secţiune paralelă cu baza al cărei perimetru este de 7 cm. Să se afle: 1) cît la sută reprezintă diagonala bazei din lungimea bazei; 2) volumul piramidei iniţiale; 3) volumul trunchiului de piramidă obţinut prin secţiunea dată; 4) aria secţiunii diagonale a trunchiului de piramidă; 5) diagonala trunchiului de piramidă.

R. 1) 125%; 2) $80\sqrt{3}$ cm^3; 3) $\frac{315\sqrt{3}}{4}$ cm^3; 4) $\frac{12{,}5 \cdot 15\sqrt{3}}{8}$ cm^2; 5) $\frac{5\sqrt{13}}{2}$ cm.

117. Un turn de formă cilindrică are un acoperiş de forma unei piramide hexagonale regulate cu baza $ABCDEF$ şi vîrful V. Inălţimea cilindrului este de 20 m. Triunghiul VAD este echilateral. Baza superioară a cilindrului este un cerc înscris în hexagonul $ABCDEF$. Muchia laterală a piramidei este de $4\sqrt{3}$ m. Să se afle volumul cilindrului.

R. 180π m^3.

118. Baza unei piramide este un triunghi dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A) = 90^{\circ}$, în care cunoaştem următoarele: bisectoarea unghiului B întîlneşte cateta AC în E şi este perpendiculară pe mediana AD ($D \in BC$), segmentul AE este de 6 cm. Inălţimea piramidei este muchia $VA = 10\sqrt{3}$ cm. Aflaţi: 1) perimetrul triunghiului dreptunghic ABC; 2) volumul piramidei $VABC$; 3) volumul piramidei $VABD$ (are ca bază triunghiul ABD şi acelaşi vîrf ca şi prima piramidă). 4) Să se arate că jumătate din ipotenuza triunghiului ABC este medie proporţională între cateta cea mai mare a triunghiului şi proiecţia bisectoarei BE pe această catetă.

R. 1) $18(\sqrt{3}+1)$cm; 2) 540 cm^3; 3) 270 cm^3.

119. Intr– o prismă cu baza un trapez isoscel $ABCD$, în care linia mijlocie este de 6,5 cm şi cu 2,5 cm mai mică decît baza mare, se înscrie un cilindru a cărui înălţime este egală cu 10 cm şi egală cu înălţimea prismei. Se consideră apoi prisma care are ca bază triunghiul BOC (O fiind centrul cercului de bază a cilindrului) şi aceeaşi înălţime cu prisma iniţială, precum şi corpul care are ca bază sectorul MON şi aceeaşi înălţime ca a prismei (sau a cilindrului). Să se afle: 1) volumul prismei cu baza $ABCD$; 2) volumul cilindrului înscris; 3) volumul prismei cu baza BOC; 4) volumul corpului care are ca bază sectorul MON.

R. 1) 390 cm^3; 2) 90π cm^3; 3) 97,5 cm^3; 4) $22{,}5\pi$ cm^3.

120. O piramidă are ca bază un triunghi ABC în care $BC=16$ cm, $AB=10$ cm, iar înălţimea $AD=8$ cm ($D\in BC$). Inălţimea piramidei este de 30 cm. Fie E,F,G respectiv mijloacele laturilor AB,AC şi BC ale triunghiului ABC. Să se afle volumul piramidei care are ca bază patrulaterul $DEFG$ şi acelaşi vîrf cu prima piramidă.

R. 200 cm^3.

121. Un triunghi isoscel ABC, $[AB]\equiv[AC]$, este înscris în cercul O a cărui rază mărită cu 20% este cît una din laturile egale ale triunghiului isoscel micşorată cu 25%, iar dublul razei cercului mărită cu 2 cm şi apoi împărţită la lungimea laturii considerate a triunghiului micşorată cu 2 cm dă cîtul 2. Fie BM înălţimea dusă din B pe AC şi AE bisectoarea din A pe BC; $BM\cap AE=\{N\}$. Paralela dusă din A la BC intersectează perpendiculara dusă din B pe BC în D; $BD\cap AD=\{D\}$. Se cere: 1) perimetrul patrulaterului $ABCD$; 2) înălţimea BM; 3) să se demonstreze că $\frac{m(\sphericalangle A)}{2}=m(\sphericalangle ABD)=\frac{m(\sphericalangle BOC)}{4}$; 4) să se arate că $BE^2=\frac{BM\cdot BN}{2}$; 5) să se calculeze volumul corpului format prin rotaţia completă a triunghiului ABC în jurul laturii BC.

R. 1) 28,8 cm; 2) 7,68 cm; 5) $131{,}072\pi$ cm^3.

122. Aria unui triunghi ABC este de 24 cm^2. Punctul $D\in BC$ şi M este mijlocul lui AD. Fie E şi F simetricele punctului M faţă de AB şi AC, $ME\cap AB=\{H\}$ şi $MF\cap AC=\{N\}$. Proiecţia laturii AB pe latura BC a triunghiului este segmentul $BG(G\in BC)$. Se cunoaşte că 2/3 din lungimea BC este cu 0,5 dm mai mare decît segmentul BG şi 4/3 din BG este cît jumătate din BC micşorată cu 1/6 din aceasta. Se cere: 1) să se arate că aria AMB+aria $AMC=1/2$ aria ABC; 2) să se arate că aria patrulaterului $ANMH$ este 1/2 din aria patrulatrului $AEMF$; 3) să se calculeze volumul corpului format prin rotaţia completă a triunghiului ABC în jurul laturii BC.

R. 3) 64π cm^3.

123. Intr–un trapez $ABCD$(AB=baza mare) diagonalele AC şi BD se întîlnesc în punctul O. Aria triunghiului AOB este de 60 cm^2. Se ştie că 0,125 din baza mică este cu 0,3 dm mai mică decît 20% din baza mare, iar raportul mărimilor celor două baze este 5/2. Se cere: 1) să se demonstreze că triunghiurile AOD şi BOC sînt echivalente; la fel pentru triunghiurile ADC şi DBC; 3) aria trapezului; 4) volumul corpului format prin rotaţia completă a triunghiului AOB în jurul laturii AB (baza mare a trapezului); 5) să se construiască un dreptunghi echivalent cu trapezul $ABCD$; 6) printr–un punct M situat pe baza mică a trapezului să se ducă o dreaptă în interiorul trapezului aşa fel ca să–l împartă în două părţi echivalente.

R. 1) 14 cm; 3) 117,6 cm^2; 4) 240π cm^3.

124. Se dă un trapez isoscel $ABCD$ (AB este baza mare) circumscris unui cerc O a cărui rază este cu 3,5 cm mai mică decît linia mijlocie a trapezului şi 0,(3) din raza cercului mărită cu 2/3 din ea este cu 1,7 cm mai mare decît 20% din linia mijlocie a trapezului. Raportul bazelor trapezului este 2/2,5. Se cere: 1) aria trapezului $ABCD$;

2) să se arate (fără calcul) că linia mijlocie a trapezului este egală cu una din laturile neparalele ale trapezului; 3) să se arate că triunghiul COB este dreptunghic şi aria lui este 1/4 din aria trapezului; 4) notînd cu M, respectiv N, mijloacele bazelor DC şi AB ale trapezului să se arate că triunghiurile MOC şi NOB sînt asemenea; 5) să se arate că $MN^2=DC\cdot AB$; 6) să se calculeze volumul corpului format prin rotaţia completă a trapezului în jurul bazei mari AB.

R. 1) 39 cm^2; 6) $\frac{676}{3}\pi$ cm^3.

125. Intr-un triunghi dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A)=90^\circ$, $m(\sphericalangle B)>m(\sphericalangle C)$, bisectoarea unghiului B taie mediana AD în M iar cateta AC în N $(D\in BC)$ şi 0,(6) din măsura unghiului B micşorată cu 25% din ea este de 5 ori mai mare decît 1/6 din măsura unghiului C al triunghiului. Se cere: 1) lungimea laturilor triunghiului ABC cunoscînd ipotenuza de $6\sqrt{3}$ cm; 2) să se arate că triunghiurile AMB şi AMC sînt echivalente; 3) să se arate că triunghiul ABD este echilateral, triunghiul BND este dreptunghic şi triunghiul AND este isoscel; 4) să se afle volumul corpului format prin rotaţia completă a triunghiului ABC în jurul catetei AC.

R. 1) $BC=6\sqrt{3}$ cm; $AB=3\sqrt{3}$ cm; $AC=9$ cm; 4) 81π cm^3.

126. Intr-un triunghi isoscel ABC, $[AB]\equiv[AC]$, se cunoaşte că 0,375 din una din laturile egale ale triunghiului este cu 2 cm mai mare decît 20% din raza cercului O circumscris triunghiului şi raportul dintre raza cercului şi una din laturile egale este 2,5/4. Fie AD înălţimea triunghiului isoscel. Prin O (centrul cercului), se duce o paralelă la AB care întîlneşte pe BC în N iar pe AC în M; fie M' simetricul punctului M faţă de BC şi A' punctul de intersecţie obţinut prin prelungirea laturii AB şi a dreptei pe care se află segmentul MM'. Să se arate că: 1) triunghiul $AA'M$ este isoscel; 2) punctele N, D şi M' sînt coliniare. 3) Cît la sută reprezintă mărimea razei cercului O din lungimea laturii AB a triunghiului isoscel ? Să se calculeze volumul piramidei ce are ca bază triunghiul ABC ştiind că înălţimea piramidei este egală cu înălţimea AD a triunghiului ABC.

R. 3) 62,5%; 4) 8,192 cm^3.

127. Ipotenuza BC a unui triunghi dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A)=90^\circ$, se împarte în opt părţi egale şi se notează cu M punctul cel mai apropiat de C. Se împarte cateta AC în 3 părţi egale şi se notează cu N punctul cel mai apropiat de C şi cu D punctul cel mai apropiat de A. Prin D se duce o paralelă la BC, care taie pe AB în E $(E\in AB)$. Se cunoaşte că diferenţa dintre 0,4 din ipotenuza BC şi 25% din AC este de 2 cm, iar triplul catetei AC comparată cu 20% din ipotenuza BC formează raportul 24/2. 1) A cîta parte din aria triunghiului ABC este aria triunghiului MNC şi AED ? 2) Să se demonstreze că triunghiul ADM este echivalent cu triunghiul MNC iar aria triunghiului AMC este cît întreitul ariei triunghiului MND. 3) A cîta parte din aria triunghiului ABC este aria pentagonului $BMNDE$? 4) Să se afle volumul corpului format prin rotaţia completă a triunghiului ABC în jurul ipotenuzei BC.

R. 1) $\frac{1}{24}$ şi $\frac{1}{9}$; 3) $\frac{61}{72}$; 4) $v=\frac{4{,}8^2\pi 10}{3}$ cm^3.

128. In trapezul $ABCD$ cu aria de 48 cm^2, avînd baza mică AD, se duce $AE||DC$, $(E \in BC)$ astfel încît $\frac{CE}{EB}=\frac{1}{2}$. Se duce $DF||AB$, $(F \in BC)$; $DF \cap AE=\{M\}$.$DF \perp AE$ şi punctul M este mijlocul segmentului DF. Se cunoaşte că 2/5 din baza mică este cu 1 cm mai mică decît 0,125 din perimetrul triunghiului ABE, iar dublul bazei mici mărită cu 2 cm este în raport de 1/2 faţă de perimetrul triunghiului ABE. Se cere: 1) perimetrul trapezului; 2) să se arate că triunghiul ABE este dreptunghic; 3) să se arate că patrulaterul $ADEF$ este un romb; 4) să se arate că triunghiul ABF este isoscel. 5) O fiind punctul de intersecţie al diagonalei trapezului, să se demonstreze că triunghiurile AOB şi COD sînt echivalente. 6) Să se calculeze volumul şi aria corpului format prin rotaţia triunghiului ABE în jurul laturii BE.

R. 1) 34 cm; 6) $V=76{,}8\pi \cdot cm^3$; aria$=67{,}2\pi$ cm^2.

129. Se consideră $ABCD$ romb (diagonala mare BD); latura AB mărită cu $\frac{3}{5}$ din ea este cu 5 cm mai mare decît BD micşorată cu 0,125 din ea. 25% din BD mărită de 3 ori comparată cu AB mărită cu 20% din ea dă raportul a cărui valoare este 1. Se duce $AM \perp BC$, $(M \in BC)$ şi $AN \perp CD$, $(N \in CD)$ $AM \cap BD=\{E\}$ şi $AN \cap BD=\{F\}$. 1) Se cere a patra proporţională între diagonalele AC, BD şi latura rombului. 2) O fiind punctul în care se intrsectează diagonalelele rombului să se arate că există relaţia: $\frac{2AO}{AM+AN}=\frac{OE+OF}{2CM}$. 3) Să se afle aria şi volumul corpului format prin rotaţia completă a triunghiului AOB în jurul laturii AB a rombului. 4) Rombul dat fiind baza unei piramide a cărei înălţime este VO, să se calculeze volumul piramidei $VABCD$ ştiind că muchia VA este de 25 cm. 5) Se face o secţiune $A'B'C'D'$ paralelă cu baza $ABCD$ la 3/4 din înălţime faţă de bază, în piramida $VABCD$. Să se calculeze volumul piramidei $VA'B'C'D'$.

R. 1) $\frac{100}{3}$ 3) 420π cm^2; 1 200π cm^3; 4) 4 000 cm^3; 5) 62,5 cm^3.

130. Fie punctele $A(-7;\ 0)$ şi $B(5;\ 0)$ într-un sistem de axe de coordonate ortogonale. Prin A şi B se duc dreptele d_1 şi d_2 care fac cu sensul pozitiv al axei xx' unghiuri cu măsurile de 30^o şi respectiv de 120^o; $d_1 \cap d_2=\{M\}$. Triunghiul ABM este baza unei piramide $SABM$, în care $SA=SB=SM=x$ şi $m(\sphericalangle ASB)=120^o$. Să se afle: a) coordonatele punctului M; b) suma muchiilor piramidei; c) volumul piramidei. (Dimensiunile în cm.)

R. a) $M(2;3\sqrt{3})$; b) $(18+18\sqrt{3})$cm; c) 36 cm^3.

131. Intr–un plan P se dau două drepte perpendiculare d_1 şi d_2 care se intersectează în O. Distanţele de la un punct M nesituat în planul P, la dreptele d_1 şi d_2 sînt egale cu $3a$ respectiv $4a$ iar distanţa de la M la O este de $3a\sqrt{2}$. Să se calculeze distanţa de la M la planul P în funcţie de a.

Indicatie. Fie B proiecţia lui M pe planul P şi A şi C proiecţiile lui M pe d_1 şi d_2. Conform teoremei celor trei perpendiculare $BA \perp d_1$ şi $BC \perp d_2$ şi astfel $OABC$ este dreptunghi.

R. $MB=a\sqrt{7}$.

132. Intr–un trunchi de con aria laterala este $4\pi a^2$, înălţimea egală cu a iar generatoarea sa este cît suma razelor bazelor. Să se calculeze, în funcţie de a, razele bazelor şi aria laterală a conului din care provine trunchiul.

Indicaţie. Se obţine sistemul: $R+r=2a$ şi $R-r=a\sqrt{3}$.

R. $R=a\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $r=a\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $Al=\frac{\pi a^2}{6}(12+7\sqrt{3})$.

133. Intr–o emisferă cu raza R se înscrie un con circular drept. a) La ce distanţă x de bază trebuie dus un plan paralel cu baza astfel încît aria zonei sferice să fie egală cu aria laterală a trunchiului de con tăiat de conul înscris în emisferă ? b) Să se indice o metodă grafică pentru construcţia segmentului x.

Indicaţie. b) Se ridică o perpendiculară pe diametrul emisferei egală cu diametrul şi din ea vom scădea apoi latura pătratului înscris în cercul de rază R şi vom obţine astfel segmentul x.

R. a) $x=R(2-\sqrt{2})$.

V. EXERCIȚII ȘI PROBLEME RECAPITULATIVE

1. Dacă aria unui paralelipiped dreptunghic este egală cu dublul pătratul diagonalei sale, atunci el este un cub.

Indicație. $2(ab+ac+bc)=2(a^2+b^2+c^2)$.

2. Se dă un con circular drept cu diametrul bazei de 12 cm și înălțimea egală cu 2/3 din diametru. 1) Să se afle aria totală, aria laterală și volumul conului. 2) Se desfășoară suprafața laterală a conului, obținîndu-se astfel un sector de cerc. Cîte grade are unghiul acestui sector ? 3) La ce distanță de vîrful conului trebuie făcută o secțiune printr-un plan paralel cu baza astfel ca lungimea cercului de secțiune să fie 9π cm ?

R. 1) 60π cm^2; 96π cm^2; 96π cm^3; 2) 216° 3) 6 cm.

3. Se dă expresia: $E=\left(\frac{4x^2}{2x-1}-\frac{8}{4x^2-1}+\frac{8x-7}{1-2x}\right):\frac{1-2x}{2x+1}$.

1) Să se arate că forma cea mai simplă la care poate fi adusă este $E=-2x+1$; să se stabilească mulțimea valorilor lui x, pentru care expresia dată nu are sens.

2) Să se afle mulțimea numerelor reale pozitive pentru care $-2x+1\geq\frac{2}{3}$.

R. 1) $\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$; 2) $x\in\left(0,\frac{1}{6}\right]$.

4. Se dau mulțimile $A=\{x;\ 1;\ 4;\ 5\}$; $B=\{3;\ 6;\ 1;\ 4;\ 5\}$, în care $x\in\mathbf{N}$ și x este baza sistemului de numerație din relația: $\frac{20}{120}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1000}{120}=1$.

Să se determine: a) C_AB; b) $B-A$; c) $A\cup B\cap A$ și $A\cap B\cup B$.

R. a) $C_AB=\varnothing$; b) $B-A=\{6\}$.

5. a) Dacă x şi y sînt două numere strict pozitive atunci $xy\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$. Să se arate că dacă $x+y=k$, cea mai mare valoare a produsului xy este $\frac{k^2}{4}$. b) In aceleaşi condiţii să se arate că cea mai mică valoare a lui x^2+y^2 este $\frac{k^2}{2}$.

Indicaţie: Inegalitatea se mai poate scrie: a) $(x+y)^2\geq 4xy \rightarrow (x-y)^2\geq 0 \rightarrow xy\leq\frac{(x+y)^2}{4}=\frac{k^2}{4}$; max. $xy=\frac{k^2}{4}$.
b) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy\geq k^2-2\frac{k^2}{4}\rightarrow x^2+y^2\geq\frac{k^2}{2}$ adică cea mai mică valoare a lui x^2+y^2 este $\frac{k^2}{2}$.

6. Intr- o piramidă $VABC$ cu baza un triunghi dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A)=90^\circ$, muchia CV este perpendiculară pe planul bazei. Din punctul C se duc perpendicularele CD şi CE pe VA respectiv VB. Să se arate că există relaţia: $\frac{AC^2}{BC^2}=\frac{VE}{BE}\cdot\frac{AD}{VD}$.

7. Pe un cerc cu diametrul BC se iau două puncte M şi N situate de o parte şi de alta a lui BC. Cum trebuie alese punctele M şi N ca patrulaterul $BMCN$ să aibă un perimetru cît mai mare ? Ce fel de patrulater este în acest caz $BMCN$?

R. Patrulaterul $BMNC$ este un pătrat.

8. Să se afle valoarea maximă a functiei $f(x)=\frac{3x^2-12x+22}{x^2-4x+6}$; $(x\in\mathbf{N})$.

Indicaţie. $f(x)=3+\frac{4}{x^2-4x+6}=3+\frac{4}{(x-2)^2+2}$.

R. 5.

9. Se consideră $f(x)=4x^4-4x^3+x^2+1$. a) Să se afle cîtul şi restul împărţirii lui $f(x)$ la $(2x^2-x)^2$ fără a efectua împărţirea. b) Să se arate care din următoarele afirmaţii este adevărată, $f(x)<0$; $f(x)=0$; $f(x)>0$; pentru $x\in\mathbf{R}$. c) Pentru ce valori ale lui x, $f(x)$ ia cea mai mică valoare $x\in\mathbf{N}$?

R. a) Cîtul este 1; restul este 1; c) $x=0$.

10. Să se demonstreze că dacă $a>0$; $b>0$; şi $a+b=1$ atunci $0\leq ab\leq\frac{1}{4}$ şi $\frac{1}{2}\leq a^2+b^2\leq 1$.

Indicaţie. $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab\geq 0$; $(a+b)=1$ şi $a^2+b^2+2ab=1$.

11. Pentru ce valori ale lui $x\in[-4,4]$ şi $x\in\mathbf{Z}$ expresia x^4-5x^2+4 este divizibilă cu 5.

Indicaţie. Cel puţin unul din factorii expresiei date, trebuie să fie divizibil cu 5.

R. $\{3;-3\}$; $\{4;-4\}$; $\{1;-1\}$; $\{2;-2\}$.

12. Se dau polinoamele: $P(x)=2x^3+x^2-xm-1$; $Q(x)=2x^3+3x^2+nx+1$. a) Să se determine m, n astfel ca $P(x)$ să se dividă cu $2x-1$ iar $Q(x)$ să se dividă cu $2x+1$. b) Cu valorile aflate pentru m şi n să se simplifice fracţia $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

R. a) $m=-1$; $n=3$; b) $\frac{2x-1}{2x+1}$.

13. Să se găsească cel mai mic număr natural n pentru care fracţia $\left(\frac{5}{4}\right)^n > 2$.

Indicaţie. n fiind minim, se înlocuieşte cu 1, 2, 3, 4.

R. $n=4$.

14. Se dă $f(x)=\frac{3x^6+6x^3+10}{x^6+2x^3+2}$. Să se determine valoarea lui $x\in\mathbf{Z}$ pentru care $f(x)$ este maximă. b) Să se afle valoarea maximă a lui $f(x)$.

R. a) $x=-1$, b) $f(x)=7$.

15. Să se afle volumul şi aria laterală a unui con înscris într–un tetraedru regulat de muchie "a".

R. $V=\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{108}$; $Al=\frac{\pi(a\sqrt{3})}{6}\cdot\frac{(a\sqrt{3})}{2}=\frac{\pi a^2}{4}$.

16. Fie M un punct pe diagonala AC a trapezului $ABCD$ (AB bază mare) şi MP, MN paralele duse la AB, respectiv AD ($N\in DC$ şi $P\in BC$). a) Să se arate că $m(\sphericalangle CNP)=m(\sphericalangle ABD)$. b) Paralela din N la BC taie pe BD în R. Să se arate că punctele B, N şi mijlocul Q al segmentului RP sînt coliniare. c) Care trebuie să fie valoarea raportului $\frac{MC}{MA}$ astfel ca să aibă loc relaţia $NP=\frac{2}{3}DB$?

R. c) $\frac{MC}{MA}=2$.

17. Se dă paralelogramul $ABCD$ în care $m(\sphericalangle ABC)=150^\circ$ şi diagonala BD perpendiculara pe AB. Fie E proiecţia lui C pe AD şi F intersecţia laturii BC cu cercul circumscris triunghiului DEC, avînd centrul O. Să se arate că: 1) DF este perpendiculară pe BC; 2) punctele E, O, F sînt coliniare; 3) BD este tangentă la cercul circumscris triunghiului DEC. 4) Să se demonstreze că $BD^2=BF\cdot AD$. 5) Dacă $AB=2a$, ($a>0$), să se calculeze perimetrul patrulaterului $BDEF$.

R. 5) $2a(\sqrt{3}+1)$.

18. Să se demonstreze că expresia $E=x^2y+xy^2+x^2+y^2+2xy+x+y$ este divizibilă cu 2 oricare ar ti x şi y numere naturale.

Indicaţie: $E=(x+y)(x+1)(y+1)$; considerăm toate cazurile: x par, y impar etc.

19. Se dă $f(x)=\frac{x^4+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}$. Să se determine $x\in\mathbf{R}$ pentru care $f(x)>0$.

20. Fie a un număr natural, $a\in$N. Să se găsească o mulţime de patru numere naturale: x, y, z, t, aşa încît efectuînd operaţiile: $x+a$; $y-a$; za; $t:a$ să obţinem acelaşi rezultat numeric.

Indicaţie. Fie m rezultatul comun; astfel obţinem: $x=m-a$; $y=m+a$; $z=m/a$; $t=am$; $m\geq a$. Dacă notăm cu n un număr natural arbitrar, obţinem: $x=a(n-1)$ ş.a.m.d.

R. $E_n=\{a(n-1);\ a(n+1);\ n;\ a^2n\}$, (o infinitate de soluţii pentru un a dat).

21. Fie $F(x)=\frac{6x^2+4x^2\sqrt{2}-4}{2x+2:x\sqrt{2}}$. Să se aducă $F(x)$ la forma cea mai simplă.

R. $2x+x\sqrt{2}-2$.

22. Fie $f(x)=\dfrac{x^2-x-12}{x^2+5x+6}$. a) Să se aducă $f(x)$ la forma cea mai simplă. b) Pentru ce valori ale lui x, $f(x)<0$? c) Să se determine mulţimea valorilor lui $x\in\mathbf{N}$ pentru care $f(x)$ este un număr întreg.

R. a) $\dfrac{x-4}{x+2}$; b) $-2<x<4$; c) $\{0,1,4\}$.

23. Se dă $f(x)=\dfrac{a^4(x+a)^3}{a^4(a^2+x^2)+2a^5x}:\left\{2(x-a):\left[\dfrac{ax-2x-a^2+2a}{ax}:\left(\dfrac{x(a-2)}{a}-\dfrac{a-2}{x}\right):\dfrac{1-\frac{2}{a}:\frac{x}{2a}}{a-2}+\right.\right.$ $\left.\left.+\dfrac{a-2}{a}\right]+2a-x-2\right\}$ Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiei $p: f(x)\in\mathbf{N}$.

R. $f(x)=1$.

24. a) Să se rezolve ecuaţia: $\dfrac{a^2(b+c)}{a-x}=\dfrac{b^2(a+c)}{b-x}$, unde necunoscuta este x iar a, b şi c sînt constante diferite de 0. b) Să se verifice că rădăcina ecuaţiei de la punctul a) este şi rădăcina ecuaţiei: $\dfrac{b^2(a+c)}{b-x}=\dfrac{c^2(a+b)}{c-x}$ (în aceleaşi condiţii).

R. a) $x=\dfrac{abc}{ab+bc+ca}$.

25. Să se aducă următoarea expresie la forma cea mai simplă:

$P(y)=\dfrac{a(9y^4-16)}{y+\dfrac{4}{3y}}+9y^3-7+\dfrac{\dfrac{3}{y}-2}{\dfrac{1}{ay}}$; $(a\neq0;\ y\neq0)$ şi apoi să se determine a astfel ca polinomul obţinut să fie de gradul întîi în y. Care este acest polinom ?

R. $P(y)=14y-10$; pentru $a=-1$.

26. Să se rezolve inecuaţia: $\dfrac{7y-5}{y+4}\leq 3$ şi apoi să se determine mulţimea numerelor întregi care o verifică.

R. Toate numerele întregi din intervalul $\left(-4, \dfrac{17}{4}\right]$.

27. Se dau expresiile:

$$A(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{4}{x^2-1}};\quad B(x)=\left(\dfrac{x}{x-5}+\dfrac{x-5}{x}-2\right):\dfrac{25}{x}.$$

a) Să se aducă $A(x)$ şi $B(x)$ la forma cea mai simplă.

b) Să se rezolve ecuaţia $A(x)+B(x)+\dfrac{3x^2A(x)\cdot B(x)}{4}=0$.

c) Să se reprezinte grafic : $y=\frac{1}{A(x)}+\frac{1}{B(x)}$.

d) Să se calculeze valorile numerice ale lui $A(x)$ şi $B(x)$ pentru

$$x=2\frac{1}{2}+\frac{1}{1\frac{1}{3}}-\sqrt{3{,}8025}+3{,}1(6).$$

e) Dacă $y\neq 1$ şi $x=\frac{y}{y-1}$ să se arate că:

$$[(x+y)^3-x^3-y^3][(x+y)^5-x^5-y^5]=15x^5y^5(xy-1).$$

R. a) $A(x)=\frac{1}{x-2}$; $B(x)=\frac{1}{x-5}$; b) $x_1=-\frac{14}{3}$; $x_2=2$(nu convine) d) $\frac{15}{37}$; $-1\frac{7}{8}$.

28. Se dă expresia:

$f(x)=[x^8-x^8(4\cdot 4^{99}-4^{100}+2^{24}-4^{12})-x^5]+x^5\cdot(4^{27}-2^{54})^3-x^3+1$, $x\in\mathbf{R}$; $x\neq 1$. a) Să se arate că $f(x)$ este pozitivă. b) Să se arate că $f(x)$ se divide prin: $x^4+x^3+x^2+x+1$. c) Să se verifice că $f(x)+x^5-2x^4+x^3\geq 0$.

29. Se dă inecuaţia: $\frac{2x-1}{6}-\frac{x+4}{2}>\frac{x-1}{9}$ definită pe mulţimea $A=\{2;\ -2;\ 3;\ -3;\ 5\}$. Să se determine mulţimea $x\in\mathbf{Z}$ ce satisface inecuaţia.

R. $\{-3\}$.

30. Se dă rombul $ABCD$ unde $m\sphericalangle(A)=60^\circ$, O este intersecţia diagonalelor, E simetricul lui O faţă de AD şi M intersecţia dreptelor OE şi AD.

1) Să se arate că punctele C, D şi E sînt pe aceeaşi dreaptă (coliniare).

2) Să se arate că patrulaterul $ABCE$ este trapez dreptunghic.

3) Dacă N este piciorul perpendicularei din O pe AE să se arate că $[AN]\equiv[NM]\equiv[OM]$ şi că MN este paralelă cu AO.

4) Să se arate că patrulaterul $ANMO$ poate fi înscris într–un cerc. Care este centrul cercului ?

5) Să se arate că $\frac{AM}{AB}=\frac{3}{4}$.

31. Se dă expresia: $f(x)=x^4-x^4(4\cdot 2^{99}+2\cdot 8^{33}-6\cdot 2^{99})^3-x^3+x^3\cdot[(x^{100}-3x^{99}-x^{99}(x-3)]-x+1$.

Să se verifice că $f(x)\geq 0$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$.

32. Se consideră expresia: $E(x,y)=x(x+2y)^2-(x-y)(x^2+xy+y^2)-4x^2y$.

a) Să se aducă la forma cea mai simplă şi să se descompună rezultatul în factori.

b) Să se afle valoarea numerică a expresiei date pentru: $x=2$ şi $y=-\frac{31}{2}:5{,}1(6)+3{,}5$.

R. a) $y^2(4x+y)$; b) $2\frac{1}{8}$.

33. Să se arate că: $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)(x^{16}+1)+2(x^{16}+1)$ este pătratul unui binom.

R. $(x^{16}+1)^2$.

34. Să se arate că suma pătratelor a trei numere consecutive mărită cu 1 este un număr divizibil cu 3.

35. Fie $E=\dfrac{x^2+2x+11}{x^2+2x+6}$. Să se afle valoarea maximă a lui E.

R. $E=2$.

36. Patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil. Se duc perpendicularele AA' şi BB' pe diagonalele BD şi AC. Să se arate că $A'B'||CD$.

Indicaţie. Se observă că patrulaterul $ABA'B'$ este inscriptibil.

37. Să se afle valoarea minimă a fracţiei $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-2x+3}$

Indicaţie. $x^2-2x+1=x^2-2x+1+2-2$.

R. 0.

38. Se dă un triunghi ABC în care $AB=AC=6$ cm şi $m(\sphericalangle A)=120^o$. Fie O centrul cercului circumscris acestui triunghi şi D punctul diametral opus lui A. a) Să se arate că triunghiul BCD este echilateral. b) Fie (Δ) perpendiculara în O pe planul triunghiului BCD şi un punct M pe (Δ). Să se arate că $[MB]\equiv[MC]\equiv[MD]$. c) Se consideră tetraedul $MBCD$. Să se arate că muchiile opuse sînt perpendiculare ($MB\perp CD$). d) Să se calculeze volumul tetraedului ştiind că $MB=6\sqrt{3}$ cm.

R. d) $54\sqrt{6}$ cm^3

39. Se consideră două conuri avînd ca axă de rotaţie dreapta (Δ). Baza unui con este cercul circumscris triunghiului echilateral BCD, iar baza celuilalt con este cercul înscris în acelaşi triunghi. a) Care este raportul volumelor celor două conuri, dacă înălţimile lor sînt egale ? b) Care este raportul volumelor celor două conuri dacă secţiunile lor axiale sînt triunghiuri echilaterale ?

R. a) $\frac{4}{1}$; b) $\frac{8}{1}$.

40. Fie piramida $VABCD$ cu baza dreptunghiul $ABCD$ în care $AB=16$ cm; $BC=12$ cm iar M şi N mijloacele lui AB respectiv BC şi Q mijlocul muchiei VA, $[VA]\equiv[VB]\equiv\equiv[VC]\equiv[VD]$. Să se determine raportul volumelor piramidelor $QMNB$ şi $VABCD$.

R. $\frac{1}{16}$.

41. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sînt invers proporţionale cu: 0,1(6); 0,125; 0,1 iar diagonala paralelipipedului este de 10 cm. Să se afle dimensiunile acestui paralelipiped.

R. $3\sqrt{2}$ cm; $4\sqrt{2}$ cm; $5\sqrt{2}$ cm.

42. Se dă şirul de rapoarte egale $\dfrac{1}{a}=\dfrac{2}{b}=\dfrac{4}{c}=\dfrac{8}{d}$ şi $ab=d=2c$. 1) Să se calculeze a, b, c, d. 2) Dacă şirul de rapoarte egale este $\dfrac{1}{a}=\dfrac{4}{b}=\dfrac{8}{c}=\dfrac{2}{d}$ şi $ab=c=d^2$ să se calculeze în acest caz a, b, c, d.

R. 1) 4; 8; 16; 32; 2) 2; 8; 16; 4.

43. Se dă ecuaţia $\left[\left(\frac{3x^6-x^{12}-1}{x^3-x^6+1}-x^3\right):(x^2+x+1)-x^4+x^3\right]=1$ şi mulţimile $A=\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$; $B=\{x;\ 1;\ 3;\ 4\}$; $x\in\mathbf{N}|x$ este rădăcina ecuaţiei date şi $x\in B$. Să se arate valoarea de adevăr a propoziţiei $p:(C_AB=C_BA=\{2\})$.

R. Falsă.

44. Care este numărul de două cifre care micşorat cu 5 să fie egal cu triplul răsturnatului său.

R. 92.

45. Pe un şantier, prin săparea unor fundaţii s–au format trei grămezi de pămînt în formă de con circular drept. Şuma dintre lungimea cercului de bază şi generatoarea primei grămezi este egală cu 30,12 m. Diferenţa dintre diametrul cercului de bază şi generatoarea aceleiaşi grămezi este egală ce 3 m. Volumul celei de–a doua grămezi reprezintă $1\frac{1}{8}$ din volumul primei grămezi iar a treia grămadă are volumul cu 3π m^3 mai mare decît prima grămadă. a) Să se afle volumul total al celor trei grămezi de pămînt. b) Cîte camioane cu capacitatea de 2 m^3 sînt necesare pentru transportul pămîntului din cele trei grămezi în timp de o zi, ştiind că fiecare camion face zilnic opt transporturi ?

R. a) $V=53\pi$ m^3; ($V_1=16\pi$ m^3; $V_2=18\pi$ m^3; $V_3=19\pi$ m^3; b) ≈10 camioane.

46. Se dă fracţia:

$$E(x)=\frac{8x^3+12x^2+50x+75-20x(2x+3)}{4x^2-4x-15}.$$

a) Să se aducă la forma cea mai simplă. b) Să se afle valoarea numerică a expresiei $E(x)$ pentru

$$x=\frac{6{,}8(3)-5\frac{5}{6}}{1{,}0816+0{,}9184}.$$

R. a) $2x-5$; b) -4.

47. Un lăcătuş vrea să- şi construiască dintr–o bară metalică o piesă care să aibă forma unei prisme drepte , avînd ca baze triunghiuri dreptunghice cu ipotenuza de 10 cm. Proiecţia uneia din catete pe ipotenuză este egală cu 3,6 cm, iar înălţimea în centimetri egală cu $\frac{3}{8}$ din numărul care exprimă mărimea ariei triunghiului de bază. Ştiind că bara metalică are formă de cilindru, la care se cunoaşte că raportul dintre aria laterală şi aria totală este $\frac{9}{14}$, că diametrul cercului de bază este cu 1 cm mai lung decît înălţimea cilindrului şi că densitatea metalului din care este construită bara cilindrică este de 7,8g/cm^3, se cere: 1) masa barei metalice 2) să se dovedească că, se poate construi piesa din bară, folosind operaţia de pilire şi tăiere; 3) să se afle masa metalului înlăturat din bară la construirea piesei.

R. ($V_1=216$ cm^3; $V_2=706{,}500$ cm^3) 1) $m_1=5\ 510{,}70$ g; 3) $m_2=3\ 825{,}90$g.

48. Se dă expresia $f(x)=(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1)$. Să se arate că dacă $x=2k+1$ cu $k\in\mathbf{N}$, $f(x)$ nu se poate termina cu 5.

49. Să se arate că expresia $F=7^{2n+1}+2^{3n+5}+2\cdot 2^{3n}$ este divizibilă cu 41.

Indicaţie. $49^n\cdot 7+8^n\cdot 32+2\cdot 8^n+7\cdot 8^n-7\cdot 8^n=F$.

50. Aria unui teren în formă de trapez este de 5 500 m^2. Ştiind că înălţimea este de 50 m şi baza mică întrece cu 10 m jumătatea bazei mari, să se afle dimensiunile bazelor trapezului.

R. 140 m; 80 m.

51. Să se treacă numărul $5\,211_7$ în baza 10.

R. $1\,821_{10}$.

52. Un siloz în formă de cilindru circular drept are diametrul interior egal cu jumătate din înălţime, iar suma dintre rază şi înălţime este egală cu 15 m. a) Să se afle volumul părţii interioare a silozului. b) Ce greutate are grîul ce se poate depozita în acest siloz, dacă 1 hl de grîu cîntăreşte 78 kg?

R. a) 108π $m^3 \approx 339{,}12$ m^3; b) 264 513,6 kg·9,8 ≈ 2 952 233 N.

53. Se dau expresiile:

$$E_1=\frac{x^2y+y^2x-2x-2y-xy+2}{xy-2};\quad E_2=\frac{x^2-y^2-2y-1}{x-y-1}.$$

1) Să se aducă E_1 si E_2 la forma cea mai simplă.

2) Să se rezolve ecuaţia: $\left(\frac{E_1+E_2}{x+y}-x\right)(x+1)=0.$

R. 1) $E_1=x+y-1$; $E_2=x+y+1$; 2) $x_1=2, x_2=-1$.

54. Diagonalele unui trapez isoscel se intersectează în punctul O. 1) Să se afle distanţele de la O la baza mare şi la baza mică a trapezului, ştiind că aceste distanţe sînt direct proporţionale cu numerele 8,5 şi 3,5 şi că $\frac{2}{5}$ din distanţa la baza mare este cu 4 cm mai mare decît 40% din distanţa la baza mică. 2) Dacă baza mică a trapezului este de 14 cm, latura neparalelă de 26 cm şi perimetrul de 100 cm, să se afle măsura unghiului format de o diagonală cu baza mare şi să se deducă apoi că diagonalele sînt perpendiculare. 3) Pe perpendiculara în O pe planul trapezului se ia un punct V aşa încît $OV=40$ cm. Să se afle volumul piramidei care are ca bază trapezul dat şi ca vîrf punctul V.

R. 1) 17; 2) 45°; 3) $V=7\,680$ cm^3.

55. Se dă expresia: $f(x)=\left(\frac{x^2-xy}{x^2y+y^3}-\frac{2x^2}{y^3+x^2y-x^3-xy^2}\right)\cdot\frac{y(x-y)}{x}+53$ şi mulţimea $A=\{x\in\mathbf{N}\,|\,x$ să se dividă cu 2 şi cu 9 şi $29<x<90\}$. Să se afle valoarea de adevăr a propoziţiei $p: f(x)$ este un element al mulţimii A.

R. $f(x)=54$; p adevărată.

56. Se dă expresia: $\frac{(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3}{ab+bc+ac+c^2}$. Să se arate că această expresie este divizibilă cu 3; a, b, c diferite de 0; a, b, c, aparţin lui N.

57. Se dă expresia $E=\frac{y^3+3y^2+3y+2}{y^3-y^2-y-2}$. Să se determine mulţimea valorilor lui $y\in\mathbf{N}$, pentru care E este un număr întreg.

R. $y\in\{0, 1, 3, 4, 6\}$

58. Intr–o prismă dreaptă în care bazele sînt pătratele $ABCD$ şi $A'B'C'D'$ se cunoaşte că perimetrul bazei $ABCD$ este $\frac{3}{4}$ din perimetrul secţiunii $A'D'CB$ (în formă de dreptunghi) iar $A'B$ este cu 4 cm mai mare ca latura AB. Să se calculeze lungimea laturii pătratului $ABCD$, aria secţiunii $A'D'CB$, înălţimea prismei, aria totală şi volumul prismei.

R. 6 cm; 60 cm^2; 8 cm; At=264 cm^2; V=288 cm^3.

59. Să se aducă la forma cea mai simplă.

$$E=\left(\frac{y-x}{x^4-x^2y^2}+\frac{1}{x^3-x^2y+y^3-xy^2}\right)\cdot\left(\frac{x^7-x^5y^2-x^4y^3+x^2y^5}{8x^3y-y^4}\right)\cdot\frac{4x^2+2xy+y^2}{3x^2+xy}.$$

R. 1.

60. Se dă un triunghi ABC în care $m(\sphericalangle A)=2m(\sphericalangle B)$ şi $AB=6$ cm. Bisectoarea unghiului A taie pe BC în D. Se cunoaşte că $AD=5$ cm şi $\frac{DB}{DC}=\frac{5}{7}$. Bisectoarea unghiului ADC taie pe AC în N. 1) Să se afle înălţimea ΔABC dusă din $\sphericalangle A$ pe BC. 2) Dacă $VD=3$ cm este înălţimea piramidei cu baza ABD să se afle aria totală a acestei piramide.

R. 1) $\frac{24}{5}$ cm; 2) 42 cm^2.

61. Se dă expresia:

$$E=\left[\left(\frac{x^3-\sqrt{2,0(3)+61\frac{29}{30}}}{x^2+2x+4}\right)^3+1\right]:\frac{x^2-5x+7}{x+2}.$$

Să se aducă la forma cea mai simplă. Pentru ce valoare a lui x, $E<-2$?

R. $E=(x-1)(x+2)$; $-1<x<0$.

62. Se dă $f(x)=\frac{(x^2+2x-3)^2}{(x+3)(x-1)}$. Să se determine mulţimea valorilor lui $x\in\mathbf{Z}$ pentru ca $f(x)<0$.

R. $-3<x<1$.

63. Un con este înscris într–un cilindru cu aceeaşi înălţime; generatoarele lor fac un unghi cu măsura de 30^{o}. In con este înscrisă o sferă. 1) Să se exprime volumul acestor corpuri în funcţie de raza bazei cilindrului. 2) Să se arate că volumele menţionate sînt invers proporţionale cu 3; 1; $\frac{27}{4}$. 3) Considerînd suma între generatoare şi raza conului egală cu 45 cm, să se afle aria laterală a conului.

R. 1) $\pi R^3\sqrt{3}$; $\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{3}$; $\frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{27}$. 3) 450π cm^2.

64. Să se efectueze: $\left(\frac{x^4+3x^2+2}{x^4-x^2-2}\right)^2+\frac{2x^2+4}{x^2-2}+1$.

R. $\frac{4x^4}{(x^2-2)^2}$.

65. Laturile bazei unei piramide triunghiulare sînt invers proporţionale cu $\frac{1}{6\sqrt{2}}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{14}$, iar diferenţa dintre laturile cele mai mari ale triunghiului este de 2 cm. Inălţimea piramidei este cu 20% mai mare decît latura cea mai mare a bazei. Se cere volumul piramidei.

R. $V=29{,}4$ cm^3.

66. Să se rezolve ecuaţia:

$$\left\{\left[\left(\frac{\frac{2^2\cdot 3^5\cdot 3^2\cdot 2^5\cdot 5^0}{2^4\cdot 3^7\cdot 5^3\cdot}+x^3}{25x^2-10x+4}\right)\cdot\frac{25x}{5x+2}\right]-1\right\}\cdot\left(\frac{x}{5}+1\right)=0\,.$$

R. –5; 5.

67. O gospodină a cumpărat cu suma de 111 lei linguriţe de 5 lei bucata şi cuţite cu 27 lei bucata . Cîte linguriţe şi cîte cuţite s–au cumpărat ?

R. 6 linguriţe şi 3 cuţite.

68. Se dă ecuaţia: $\frac{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}{(x^2+1)\cdot(x-1)^2}=x-3$ definită pe mulţimea $A=\{3;\ 4;\ 5;\ 6\}$. Să se determine valoarea de adevăr a propoziţiei r:$\{x\in \mathbb{N}\,|\,x$ o soluţie a ecuaţiei este un element al mulţimii $A\}$.

R. Propoziţia r este adevărată.

69. Se dă sistemul: $\begin{cases}\frac{x}{a+2}-\frac{y}{a-2}=1\\ 3x+2y=a-1\end{cases}$.

Să se discute sistemul în funcţie de a.

R. $\begin{cases} a\neq-\frac{2}{5} & \text{sistem compatibil şi determinat ,}\\ a=-\frac{2}{5} & \text{sistem incompatibil .}\end{cases}$

70. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} \dfrac{x^3+x^2y-2x^2-2xy+x+y}{xy(x-1)^2}=5 \\ \dfrac{xz}{x+z}=\dfrac{1}{6};\ \dfrac{yz}{y+z}=\dfrac{1}{7} \end{cases}$ **R.** $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)$.

71. O piramidă are ca bază un trapez dreptunghic $ABCD$ în care $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle D$ şi $m(\sphericalangle A)=90^o$. Faţa piramidei VBC este un triunghi echilateral şi este perpendiculară pe planul bazei. Se ştie că $AB=AD=3$ cm şi $DC=6$ cm. Se cere: 1) volumul piramidei; 2) unghiurile trapezului de bază.

R. 1) $\frac{27\sqrt{6}}{4}$ cm^3; 2) $m\sphericalangle(B)=135^o$; $m\sphericalangle(C)=45^o$.

72. Să se aducă expresia la forma cea mai simplă:

$$\left(1:\frac{x-2}{x^2-\frac{4b+4a}{a+b}}\right)^2-\frac{2}{x^2-4}\cdot\left[\frac{(x^3-8)(x+2)^2}{x^2+2x+4}\right]+1.$$ **R.** $(x+1)^2$.

73. a) Să se afle valoarea maximă a expresiei $E=\dfrac{4y^2-16y+24}{y^2-4y+5}$. b) Pentru ce valori ale lui $y\in\mathbf{N}$, E este un număr întreg ?

R. a) 8; b) $y\in\{1, 2, 3\}$.

74. Se dă ecuaţia: $\dfrac{16x^4-y+8x^3y-2x}{(4x^2+2x+1)(2x+y)}=3.$

După simplificarea fracţiei să se rezolve ecuaţia.

R. $x=2$.

75. Aria totală a unei prisme patrulatere regulate este de 1 602 cm^2 iar latura bazei este de 9 cm. Să se calculeze diagonala unei feţe laterale a prismei.

R. 41 cm.

76. Să se efectueze $\left(\dfrac{\dfrac{\sqrt{108}+\sqrt{300}}{\sqrt{3}}-x^4}{2+x}+8x-4x^2\right):(x+2)^2$. **R.** $2-x$.

77. Se dă mulţimea $A=\{2; 3\}$ şi $f(x)=\dfrac{6}{2x-3}$.

Să se determine $x\in A$ pentru care $f(x)$ este un număr întreg pozitiv.

R. a) $x=\{2; 3\}$.

78. a) Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$f(x)=\frac{x-1}{2}-\frac{x-1}{x+1}\left(x-\frac{1}{1-\frac{x-1}{x+1}}\right)-\frac{x^2+x+1}{x^4-x^3-x+1}+\frac{1}{(x-1)^2}.$$

b) Să se stabilească domeniul de definiţie a lui x pentru ca $f(x)<2$.

c) Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiei $p:\{x\in\mathbf{N}\,|\,2<x<3\}$.

R. a) $\frac{x-1}{x+1}$; b) $x\in(-\infty;-3)\cup(-1,\infty)$; c) falsă.

79. Intr-un trunchi de con este înscris un cilindru avînd aceeaşi înălţime şi una din baze comună. Generatoarele celor două corpuri sînt invers proporţionale cu numerele 0,25 şi 0,20 iar diferenţa lor este de 2 cm. Aria laterală a trunchiului de con este cu 60π cm^2 mai mare decît aria totală a cilindrului. Se cere înălţimea conului ce se formează prin prelungirea generatoarelor trunchiului de con dat, avînd ca bază, baza cea mică a trunchiului de con.

R. $\frac{8}{3}$ cm.

80. Dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi dreptunghic cu unghiul drept în A, să se arate că: $(a+b+c)^2=2(a+b)(a+c)>8bc$.

Indicaţie. $2(a+b)(a+c)>8bc$; $a^2+ac+ab>3bc$; $a^2-bc+ac-bc+ab-bc>0$.

81. Se dă ecuaţia:

$$\frac{\frac{x^6+6x^5+9x^4-9x^2-6x-1}{x^2-1}-10x^2-2}{x^2+6x-1}=10$$

definită de mulţimea $A=\{-5;-4;-3;+3;+4;+5\}$. Să se arate că soluţiile ecuaţiei aparţin lui A.

R. $x=\{-3;3\}$, deci $x\in A$.

82. Dacă un muncitor ar lucra 8 zile la o lucrare, al doilea ar termina-o în 18 zile. Dacă primul ar lucra 10 zile, atunci al doilea ar termina-o în 15 zile. In cîte zile ar termina lucrarea, dacă ar lucra împreună ?

R. 12 zile.

83. Unghiul la centru al unui sector de cerc este de 60°. Raza cercului este de 9 cm. Să se calculeze raza cercului înscris în sectorul de cerc.

R. 3 cm.

84. Două brigăzi ale unei asociaţii agricole seamănă sfeclă de zahăr pe o tarla în formă de triunghi ce are baza de 16 km. Pentru efectuarea lucrării se împarte tarlaua în două parcele proporţionale cu numărul lucrătorilor din fiecare brigadă. Ştiind că împărţirea s-a făcut printr-o dreaptă paralelă cu baza, dreaptă care are o lungime de 12 km şi este dusă la o distanţă de 750 de metri de bază, iar numărul lucrătorilor este de 96, să se afle: a) aria fiecărei parcele; b) numărul lucrătorilor din fiecare brigadă.

R. a) Aria tarlalei=24 km^2; Aria I=13,5 km^2; aria a-II-a=10,5 km^2;
b) numărul lucrătorilor este 54 şi 42.

85. Se dă ecuaţia: $\frac{8x^3y+16x^4-y-2x}{(2x+4x^2+1)(2x+y)}=7$ definită pe mulţimea $A=\{2;\ 3;\ 4;\ 5\}$. După simplificarea fracţiei să se rezolve ecuaţia.

R. $x=4$ deci $x\in A$.

86. Să se rezolve ecuaţia:

$$\frac{1}{1+ax}\cdot\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}\cdot\frac{\sqrt{1-b^2x^2}}{1+ax}\cdot\frac{(1+ax)^2}{1+bx}=x.$$

R. $x=1$.

87. O piramidă are ca bază un trapez isoscel în care se cunosc $AD=BC=10$ cm, baza mare $AB=15$ cm. Bisectoarea unghiului A intersectează diagonala BD în O. Fie $VO=$ $=8$ cm înălţimea piramidei şi $OB=9$ cm. Să se afle perimetrul triunghiului VOD.

R. 24 cm.

88. Raportul dintre aria laterală şi cea totală a unui cilindru circular drept este $\frac{4}{7}$, iar diametrul bazei cilindrului este cu 4 cm mai mare ca generatoarea. Să se afle volumul cilindrului.

R. 288 cm^3.

89. Să se arate că expresia y^2-3y+2 este divizibilă prin 2 dacă $y \in \mathbf{N}$.

R. $(y-1)(y-2)$ este produsul a două numere consecutive.

90. O grămadă de pietriş are forma conică cu raza bazei de 2 m şi generatoarea de 2,5 m. Cîte căruţe trebuie pentru a transporta pietrişul depozitat în 10 grămezi? 1 m^3 de pietriş are masa de 3 t, iar într–o căruţă se încarcă 0,5 t.

R. 377 căruţe.

91. Să se construiască un pătrat cunoscîndu–se suma dintre diagonală şi latura sa.

92. Perimetrul unui dreptunghi este de 120 cm, iar dimensiunile sale sînt direct proporţionale cu numerele 9 şi 11. 1) Să se calculeze dimensiunile dreptunghiului. 2) Să se afle aria laterală şi volumul conului cu raza egală cu baza dreptunghiului şi cu înălţimea egală cu înălţimea dreptunghiului.

R. 1) 33 cm; 27 cm; 2) ≈4 414,21 cm^2; 9 801π cm^3.

93. Să se verifice că sistemul:

$$\begin{cases}\dfrac{y^3+x^2+xy^2-y^2-x-y}{y^2-1+x-y}=4\\ x^2-y^2=8\end{cases}$$

admite o soluţie $x=3$ şi $y=1$.

94. Intr–un atelier mecanic s–a cerut unor lucrători să execute din bare cilindrice de metal nişte piese care să aibă forme de prisme drepte cu baza pătrat. Cunoscîndu–se că diametrul bazei $D=2$ dm şi generatoarea $G=3$ dm şi că diagonala pătratului bazei prismei trebuie să fie egală cu diametrul cercului de bază al cilindrului, iar înălţimea prismei egală cu generatoarea barei cilindrice, se cere: 1) să se afle latura pătratului de bază a prismei; 2) să se arate cît la sută din greutatea barei cilindrice se înlătură în oţinerea unei singure piese cerute. 3) Ştiind că trei muncitori pot lucra 24 de piese în patru ore, cîte piese pot lucra 5 muncitori în două ore?

R. 1) $L_4=\sqrt{2}$ dm; 2) 36% (cu aproximaţie); 3) 20.

95. Se dau expresiile: $E_1=\frac{x^4+x-2x^3}{x^3-x^2-x}$; $E_2=\frac{x^2-4x+3}{x-3}$. 1) Să se aducă la forma cea mai simplă E_1 şi E_2. 2) Să se rezolve ecuaţia $E_1\cdot E_2+2(x-1)+1=9a^2$ în care x este necunoscută. 3) Să se arate că ecuaţia $E_1+E_2+\frac{(x-1)^2}{4}+1=1$ are ca soluţie unul din elementele mulţimii $A=\{-3;\ -2;\ -1;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

R. 1) $x-1$; $x-1$; 2) $x=-3a$; $x=3a$; 3) $x\in A$; $x=1$.

96. Să se arate că fracţia $\frac{x+1}{2x+1}$ este ireductibilă oricare ar fi valoarea lui $x\in\mathbf{N}$.

Indicaţie. $2x+1-(x+1)=x$ dar x şi $x+1$ sînt numere consecutive şi au divizor comun numai pe 1.

97. Aria secţiunii diagonale care trece prin două muchii laterale opuse ale unui paralelipiped dreptunghic este egală cu aria unui pătrat de 1 681 cm^2. Diagonala bazei paralelipipedului este egală cu latura acelui pătrat şi lungimea dreptunghiului de bază a paralelipipedului este de 40 cm. Se cere: 1) aria laterală a paralelipipedului; 2) măsura unghiului format de diagonala paralelipipedului cu planul bazei.

R. 4 018 cm^2; 45^o.

98. Fie ecuaţia: $\left[\frac{2x-2y+(y-x)^2+1}{x-y+1}+x^2-y^2-1\right]:(x+y+1)+y=4$ definită pe mulţimea $A=\{3;4;5\}$. După simplificări în condiţii posibile, să se arate că mulţimea soluţiilor este inclusă în A.

R. $x=4\in A$.

99. Se dă o prismă oblică $ABCDA'B'C'D'$ cu baza un pătrat. Proiecţia muchiei $B'C'$ este muchia AD, muchia $AB=3$ cm iar $AA'=6$ cm. Se cere: 1) volumul prismei; 2) aria totală a prismei.

R. 1) $27\sqrt{3}$ cm^3; 2) $18(3+\sqrt{3})$ cm^2.

100. Să se arate că $x=4$ şi $y=3$ este o soluţie a sistemului

$$\begin{cases}\left[\left(\frac{2xy+3x^2-y^2}{3x-y}\right)^2-y^2\right]:(x+2y)=4\\[2ex] \frac{2x+3y}{2(x-y)^2-5y(y-x)}=1\end{cases}$$

101. Dacă a, b, c, sînt laturile unui triunghi să se arate că există relaţia: $a^2<2(b^2+c^2)$.

Indicaţie. $2bc<b^2+c^2$.

102. O piramidă are la bază un trapez isoscel cu perimetrul de 16 cm. Raportul bazelor trapezului este de $\frac{4}{7}$ iar suma acestora este de 11 cm. Inălţimea piramidei este cu

25% mai mare decît înălţimea trapezului de bază. Să se afle volumul piramidei.

R. $V=\frac{27,5}{3}$ cm^3.

103. Se dă ecuaţia: $\frac{(x^6+x^4y-y^3-x^2y^2)\cdot(x-2)}{(x^2-3x+2)(x^2+y)^2}\cdot\frac{1}{x^2-y}=\frac{x}{x-1}$. După simplificări posibile să se determine mulţimea soluţiilor $x\in\mathbf{N}$.

R. Nu are soluţie.

104. Intr–o piramidă cu baza un trapez dreptunghic $ABCD$ se dă: $m(\sphericalangle A)=m(\sphericalangle D)=90^\circ$; $AB=36$ cm; $AD=15$ cm. Diagonala mare BD este împărţită de diagonala mică AC în raportul de $\frac{3}{10}$. Inălţimea piramidei $VO=40$ cm, O fiind punctul de intersecţie a diagonalelor bazei. Se cere perimetrul triunghiului VOD şi volumul piramidei.

R. 90 cm; 4 680 cm^3.

105. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\setminus\{1\}\to\mathbf{R}$ dată prin $f(y)=\frac{12-4y+y^2-y^3}{6+y+y^2}\cdot\frac{1}{1-y}$. Să se determine mulţimea $A=\{y\in\mathbf{N}\mid f(y)<0\}$.

R. $A=\emptyset$.

106. Laturile bazelor unui paralelipiped dreptunghic sînt $AB=x$ şi $BC=y$. Să se determine înălţimea paralelipipedului cunoscînd că diagonala paralelipipedului este egală cu $x+y$.

R. $\sqrt{2xy}$.

107. Să se rezolve ecuaţia: $\left(\frac{\sqrt{28}}{x}:\frac{\sqrt{7}}{x^2}-\sqrt{3}\right)(2x+\sqrt{3})-3x+2=0$ definită pe mulţimea $A=\left\{1;\ \frac{2}{3};-\frac{1}{4};\ 3\right\}$. Să se găsească mulţimea soluţiilor $x\in A$.

R. $S=\left\{1;\ -\frac{1}{4}\right\}$.

108. Se dă ecuaţia: $\frac{(x^2+1)^2(x^2+x+1)}{x^4+x^3+2x^2+x+1}=10$ definită pe mulţimea $A=\{2;\ 3;\ 4;\ 6\}$. Să se arate că printre soluţiile ecuaţiei sînt elemente ale mulţimii A.

R. $x=3$.

109. Să se arate care elemente ale mulţimii {2; 3; 4; 6} aparţin următoarelor mulţimi: $A=\{x\mid x^3=6x^2-27\}$; $B=\{x\mid x^4=3x+10\}$.

R. $3\in A$; $2\in B$.

110. Dintr–o prismă de metal, triunghiulară regulată, cu latura bazei 3 dm şi înălţimea de 6 dm, se scoate o piramidă cu aceeaşi bază şi aceeaşi înălţime cu prisma. Din metalul rămas se toarnă prin topire, o nouă prismă triunghiulară regulată cu înălţimea de 1 dm. a) Se cere latura bazei prismei obţinute. b) Dacă noua prismă se taie printr–un plan care trece printr–o muchie a bazei şi prin mijlocul muchiei laterale opuse, se cere aria secţiunii obţinute.

R. a) 6 dm; b) $\frac{3\sqrt{109}}{2}$ dm^2.

111. Să se aducă expresia $f(x)$ la forma cea mai simplă

$$f(x)=\frac{x^4+y^4-3x^2y^2}{x^4+x^2-x^2y^2-x^3y-y^2-xy}:\frac{x^2-y^2+xy}{x^2+1}+2\ .$$

R. $f(x)=3$.

112. Să se afle c.m.m.d.c și c.m.m.m.c. al polinoamelor:

$$E_1=x^3+2x^2+2x+4,\ E_2=x^2-4 \text{ și } E_3=x^4+4x^3+6x^2+8x+8.$$

R. C.m.m.d.c.$=x+2$. C.m.m.m.c.$=(x+2)^2(x^2+2)(x-2)$.

113. Se dă mulțimea $A=\{1;\ 10;\ 7;\ 8\}$ și o submulțime B a mulțimii A cu două elemente. Dacă $B=\{x;\ 7\}$, să se găsească valoarea de adevăr a propozițiilor p: $C_BA=\varnothing$; r: $A-B=A\cap B$ știind că $x\in\mathbf{N}$ și este o rădăcină a ecuației:

$$\frac{x^4+x^2+1}{x^2-x+1}\cdot(x-1):(x^3-1)=x.$$

R. p:adevărată; $A-B=\{8;\ 10\}$; $A\cap B=\{1;\ 7\}$; $A-B\neq A\cap B$.

114. Se dau mulțimile $A=\{x\in\mathbf{N}\,|\,42<x<93\}$, $B=\{x\in\mathbf{N}\,|\,x\,|\,2\}$. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziției p: $A\cap B=A\cup B$.

R. p: falsă $(A\cap B\neq A\cup B)$.

115. Intr–o piramidă cu baza un trapez dreptunghic $ABCD$ se dă $m(\sphericalangle A)=m(\sphericalangle D)=90^\circ$; $AD=DC=a$; $m(\sphericalangle ABC)=45^\circ$. Inălțimea piramidei este $VC=a\sqrt{2}$. Se cere: 1) să se arate că $AC=BC$; d) să se afle aria laterală și volumul tetraedului $VABC$.

R. d) $a^2(2+\sqrt{3})$; $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

116. Un cilindru circular drept și un con circular drept au aceeași bază și aceeași înălțime, conul fiind înscris în cilindru. In con este înscris un alt cilindru avînd una din baze la $\frac{3}{8}$ din înălțimea conului, față de vîrful lui. Suma dintre generatoarea conului și raza cilindrului mare este de 16 cm, iar generatoarea cilindrului în care este înscris conul este de 8 cm. Se cere: raportul dintre aria laterală a cilindrului mic și aria totală a cilindrului mare.

R. $\frac{15}{112}$.

117. Fie

$$\left(\frac{3\sqrt{7}\sqrt{\frac{245x^4}{80}}}{\frac{\sqrt{343x^2}}{4}}-x\right)^2-16=0$$

definită pe mulțimea $A=\{-4;-3;-2;2;3;4;5\}$. Să se stabilească valoarea de adevăr a propozitiei p:$(x_1;\ x_2)$ elemente ale mulțimii A.

R. p: adevărată; $S=\{-2;\ 2\}$.

118. Se dă expresia:

$$f(x, y)=\left[\left(\frac{x}{xy-y^2}-\frac{y}{xy-x^2}+\frac{2}{y-x}\right)^2+\frac{2x^2y-2xy^2}{x^2y^2}+1\right]\cdot\frac{x^2y^2}{x-y+xy}\cdot\frac{1}{x-y+xy}$$

şi mulţimile $A=\{1; 2; 3; 4\}$, $B=\{2; 3; 4\}$. Să se arate valoarea de adevăr a propoziţiei $a{:}C_A B=f(x,y)=\{1\}=A-B$.

R. Propoziţia este adevărată.

119. Se dă expresia: $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x-1}{2-x}}$. Să se afle mulţimea valorilor lui x pentru care $f(x)>1$.

R. $\frac{3}{4}<x<2$; sau $x\in\left(\frac{3}{4};\ 2\right)$.

120. Intr-o sferă se înscrie un con cu secţiunea axială triunghiul isoscel ABC ($AB=AC=17$ cm). Prin A se duce $AM=10$ cm, $AM\cap BC=\{M\}$, şi AM taie sfera în $N(BM<MC)$. Ştim că $MB=9$ cm şi $NC=35{,}7$ cm. Să se afle volumul conului înscris în sferă. Să se calculeze perimetrul patrulaterului $ABNC$. Să se calculeze diametrul sferei.

R. 600π cm^3; 85 cm; $36\frac{1}{8}$ cm.

121. Să se efectueze:

$$\left[\left(1:\frac{\dfrac{x^4+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-x\sqrt{2}-2}{x^6-1}\right)+x^6\right]:(x^4+1)\ .$$

R. x^2+1.

122. Să se determine x şi y numere naturale astfel ca $2x+3y=16$.

Indicaţie. $16-3y>0$ rezultă că $y<5$; dar y este un multiplu de 2 căci $2x=M2$.

R. $x=2$; $y=4$; $x=5$; $y=2$; $x=8$; $y=0$.

123. Pentru ce valori ale lui $x\in\mathbf{R}$ inegalitatea

$$\frac{\left(\dfrac{4x^2+12x+9-2b^2x-3b^2}{2x+3-b^2}\right)^3-8x^3-36x^2-x^3(2x+1)}{(3-x)(2x+1)}:(x-1)\le 1$$ este adevărată?

R. $-5<x<1$.

124. Se dă un tetraedru $VABC$ în care avem $VC=VB=30$ cm şi $BC=36$ cm. Muchiile VA, AB, AC se împart în 3 părţi egale şi se notează cu M, N, P punctele cele mai apropiate de A. Se cere aria secţiunii MNP şi să se arate că aria acestei secţiuni este $\frac{1}{9}$ din aria feţei laterale VBC.

R. 48 cm^2.

125. Să se afle aria totală şi volumul unei prisme triunghiulare regulate cu latura bazei egală cu a cm, avînd înălţimea cît dublul laturii bazei sale.

R. $\frac{a^2}{2}(12+\sqrt{3})$ cm^2; $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ cm^3.

126. Să se efectueze:

$$2\cdot\left(\frac{\sqrt{19\cdot 16+11\cdot 16-14\cdot 16}}{x^2}-1\right):\left(\frac{4}{x}+1\right)+\left(\frac{4-x}{x}\right)^2+1.$$

R. $16/x^2$.

127. O piramidă are ca bază un triunghi ABC, $AB=10$ cm; $AC=14$ cm şi $BC=12$ cm. Pe latura AB se ia un punct D şi se duce paralela DE la $BC(E\in AC)$ aşa fel încît perimetrul triunghiului ADE să fie egal cu perimetrul trapezului $BDEC$. Inălţimea piramidei VD este de 40 cm. Se cere perimetrul secţiunii VDE.

R. 90 cm.

128. Un turist pleacă dintr–un sat la oraş. Dacă merge cu 4 kilometri mai mult pe zi faţă de viteza planificată soseşte la oraş cu o zi mai devreme faţă de timpul stabilit. Dacă însă merge cu 5 km mai puţin pe zi faţă de viteza planificată iniţial, atunci soseşte la oraş cu 2 zile mai tîrziu. Care este distanţa dintre sat şi oraş şi în cîte zile trebuia să fie parcursă această distanţă după plan?

R. 120 km; 6 zile.

129. Să se arate că numărul $1\,947=2\,200\,010_3$ şi că $5\,211_7=1\,821$.

130. Două robinete curgînd împreună pot umple un bazin în 1 oră şi 20 de minute; dacă se deschide primul robinet pentru 10 minute, iar al doilea pentru 12 minute, se umple $\frac{2}{15}$ din bazin. In cît timp umple bazinul fiecare robinet singur?

R. 120 minute şi 240 minute.

131. Se dă expresia: $E=\dfrac{\left[\dfrac{x^2-4}{(x+2)^2}\right]^2+\dfrac{2x-4}{x+2}+1}{8x^2}\cdot(x+2)^3$. Pentru ce valori ale lui x expresia este un număr întreg?

R. $x=2k$, $(k\in\mathbf{Z})$.

132. Se dă expresia: $(3x^3+8x^2+5x+2):(x+2)$. Să se găsească restul împărţirii fără a efectua operaţia.

R. 0.

133. Se dă expresia $f(x)=\dfrac{x^8+x^4+1}{x^4+x^2+1}$, $x\in\mathbf{N}$. Să se arate că dacă $x=2k$, $f(x)$ nu se poate termina cu numărul 6.

134. Fie $E=\dfrac{4x^2-x-3}{5x^2-3x-2}$. a) Pentru ce valori ale lui x, $(x\in\mathbf{N})$ E se simplifică? b) Pentru ce valori ale lui x, E este negativă?

R. a) $x=7k+1$, b) $\frac{-3}{4}<x<\frac{-2}{5}$.

135. Se dă expresia $f(x)=\dfrac{9x+8}{10x+7}$. Să se determine valoarea lui x pentru care $f(x)$ se simplifică, $(x\in\mathbf{N})$.

R. $x=17k+1$.

136. Se dă trapezul dreptunghic cu baza mare $AB=16$ cm, baza mică $CD=9$ cm şi înălţimea $AD=12$ cm şi diagonalele $BD\cap AC=\{O\}$. a) Să se arate că $BD\perp AC$. b) Să se arate că ΔADC şi ΔDOC sînt echivalente.

137. Se dă ecuaţia:

$$\left\{\left[\frac{(\sqrt{1,0201}+0,99)^2-\frac{x^2}{4}}{2+\frac{x}{2}}\right]-1\right\}\cdot\frac{8}{x^2-7x+10}=-\frac{4}{25}$$

definită pe mulţimea $A=\{12;\ 15;\ 22;\ 30;\ 31\}$. Să se găsească mulţimea soluţiilor $\{x\in\mathbf{N}\,|\,x$ element al mulţimii $A\}$.

R. $x=30\in A$.

138. Intr–un trapez dreptunghic $ABCD$ cu baza mare AB şi unghiurile drepte A şi D, unghiul ACD este congruent cu unghiul ABC. Se duce perpendiculara din vîrful D pe diagonala AC şi se notează cu E piciorul acestei perpendiculare. Se dau: $AD=5$dm şi $CD=\frac{15}{4}$ dm. 1) Să se afle lungimea segmentului DE. 2) Să se calculeze perimetrul şi aria trapezului $ABCD$. 3) Se roteşte trapezul $ABCD$ în jurul bazei mari. Să afle aria totală şi volumul corpului astfel format.

R. 1) $DE=8$ dm; 2) $P=22,5$ dm; $A=28,125$ dm^2.

139. Se dă expresia:

$$E=\frac{\frac{(x+y)^2}{xy}}{\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+1}:\frac{\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2}}\quad \text{unde}\quad y=\frac{12}{15}+\frac{0,1+\frac{\sqrt{1,0404}}{10,2}\left(2,2+\frac{54\cdot 4}{2^3}\right)}{\left(4,4:\frac{1}{5}\right)+129}.$$

1) Să afle numărul y. 2) Să se arate că forma cea mai simplă pentru E este $(x+y)$. Pentru ce valori ale lui x expresia E nu are sens? 3) Să se afle mulţimea numerelor x întregi pentru care $-7<x+\frac{1}{2}<-2$.

R. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $x=y$ şi $x=-y$, $x=0$ şi $y=0$; 3) $\{-7;-6;-5;-4;-3\}$.

140. Trei copii au vîrstele de 8, 13 şi 14 ani. Tatăl lor a hotărît să le depună cîte o parte din suma de 23 000 lei la CEC, astfel ca pînă la vîrsta de 18 ani, cînd devin majori, capitalurile împreună cu dobînzile de 5% anual, socotite faţă de primul an, să crească devenind egale. Ce sumă va depune pentru fiecare?

Indicatie. x, y, z fiind sumele depuse, iar dobînda fiind de 5% pe an, în final sumele vor fi: $\frac{3x}{2}$; $\frac{5y}{4}$; $\frac{6z}{5}$. Cum aceste sume trebuie să fie egale se ajunge la o proporţie.

R. $6\,666\frac{2}{3}$ lei; 8 000 lei; $8\,333\frac{1}{3}$ lei.

141. Fie ecuaţia $\frac{x(x^4+2x^3+4x^2+3x+2)}{(x^2+x+2)(x^2+x+1)}=4$ definită pe mulţimea $A=\{2,3,4\}$. Fie $B=\{2,3,5,6\}$. Să se stabilească valoarea de adevăr a propoziţiei p: $C_AB=x$ una din soluţiile ecuaţiei.

R. p este adevarată.

142. Se dă expresia:

$$F=\frac{(x^2y+x^2+xy^2+y^2+x+y+2xy)(1-x)(x+3)}{3-x^2-2x}.$$

1) Să se aducă F la forma cea mai simplă. 2) Să se arate că F adusă la forma cea mai simplă este divizibilă prin 2 pentru orice $x\in\mathbf{N}$ şi $y\in\mathbf{N}$.

Indicaţie. 1) După simplificare obţinem $F=(x+y)(x+1)(y+1)$. 2) F este divizibilă prin 2 dacă unul din factorii lui F este divizibil prin 2. Dacă x şi y sînt numere pare $(x+1)$ şi $(y+1)$ sînt impare, dar suma $(x+y)$ este pară $\rightarrow F$ este divizibil prin 2. Dacă x este par şi y este impar sau invers, avem unul din factori par $\rightarrow F$ este divizibil prin 2. Dacă x şi y sînt impare $\rightarrow x+1$ şi $y+1$ sînt pare deci F este divizibil prin 2.

R. 1) $(x+y)(x+1)(y+1)$.

143. Un trapez isoscel $ABCD$ ($BC>AD$, $BC=2a$, $AD=2b$) este circumscris unui cerc de centru O. Fie M şi N punctele în care CD, respectiv AB sînt tangente cercului şi E punctul de intersecţie al diagonalelor. 1) Să se calculeze raza cercului în funcţie de a şi b. 2) Să se arate că punctele M, E şi N sînt coliniare. 3) Să se calculeze ME (tot în funcţie de a şi b). 4) Paralela din O la bază taie pe CD în P. Din compararea segmentelor OP, OM şi EM să se deducă inegalităţile dintre media aritmetică, media geometrică şi media armonică a numerelor pozitive a şi b, înţelegîndu-se prin media armonică numarul x, unde $\frac{2}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

Indicaţie. Se ţine seama că laturile neparalele ale trapezului sînt egale cu semisuma bazelor şi că înălţimea este diametrul cercului. Se studiază asemănarea triunghiurilor formate din care se deduce raportul lor de asemănare; rezultă ME şi $NE\,||\,BC$. Se ţine seama de propietatea liniei mijlocii a unui trapez, de mărimea razei aflate la punctul 1) şi se calculează EM.

R. 1) $R=\sqrt{ab}$; 3) $ME=\frac{2ab}{a+b}$.

144. Se consideră ecuaţiile: $x^2-4x+3=0$; $x^2-(a^2+1)x+3a=0$, unde a este un număr real. Pentru ce valori ale lui a ecuaţiile au o rădăcină comună?

Indicaţie. Prima ecuaţie are două radăcini numerice. Pe rînd, se pune condiţia ca una din ele să verifice ecuaţia a doua. Se obţin două ecuaţii de gradul II în a care dau 4 soluţii pentru parametrul a.

R. $\{-1;\ 0;\ 2;\ 3\}$.

145. a) Să se afle două numere naturale b şi c astfel încît pentru orice k natural par să avem: $b(1-c)(-1)^{k+1}-(b+c)(-1)^{k+2}+1=0$.

G.M.

Indicaţie. Se ţine seama de puterile numărului -1 şi egalitatea devine: $-b(1-c)-(b+c)+1=0$ de unde $b=\frac{c-1}{c-2}$ cu condiţia $c\neq 2$, $b=1+\frac{1}{c-2}$.

R. $b=2$; $c=3$.

b) Să se găsească minimul expresiei $E=a^2+b^2-3a-3b$ unde a şi b sînt numere reale.
c) Dacă $a>3$, $b>3$ să se arate ca $E>0$.

Indicatie. Formăm pătrate perfecte: $E=a^2-3a+\frac{9}{4}+b^2-3b+\frac{9}{4}-\frac{9}{2}=\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\left(b-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}$. Pentru $a=b=\frac{3}{2}$ expresiile din paranteze se anulează, deci minimul expresiei E este $-\frac{9}{2}$. Dacă $a>3\Rightarrow a^2>3a\Rightarrow a^2-3a>0$; $b>3\Rightarrow b^2>3b\Rightarrow b^2-3b>0$, deci $E=a^2+b^2-3a-3b=a^2-3a+b^2-3b>0$.

146. Se consideră un trapez care se roteşte: a) în jurul bazei mici; b) în jurul bazei mari. Cînd este mai mare volumul obţinut, în cazul a) sau în cazul b)? Volumele pot fi egale?

R. Volumul mai mare corespunde cazului a). Volumele nu pot deveni egale.

147. Care sînt singurele poligoane regulate ce se pot obţine prin secţionarea unui cub cu un plan? Justificaţi răspunsul.

R. Triunghiul echilateral, pătratul şi hexagonul regulat.

148. Dintr–o piesă uzată în formă de con circular drept cu raza bazei de 2 dm şi înălţimea de $2\sqrt{2}$ dm se taie un corp în formă de cub cu una din feţe aşezate pe baza conului, de volum maxim. Să se arate că în felul acesta se foloseşte mai putin de un sfert din material.

Indicaţie. Problema revine la înscrierea unui cub într–un con dat. Se va afla muchia cubului, apoi se compară volumul cubului cu volumul conului.

149. Se consideră: $A(x)=(1-2x)^{244}\cdot(2-3x^2)^{247}\cdot(3-4x^2)^{248}$; $(x\in\mathbf{R})$.

1) După efectuarea ridicărilor la putere, a înmulţirilor, a reducerilor se poate obţine polinomul $A(x)$ ordonat după puterile lui x. Fără a face aceste calcule, să se afle suma coeficienţilor polinomului ordonat după puterile lui x.

2) Să se arate că: $A(x)\cdot[a(-1)^{k+1}+a(-1)^{k+2}+(-1)^{k+2}+(-1)^{k+3}]=0$, pentru orice a şi x reali şi orice k natural.

Indicaţie. Se ştie că se poate obţine suma coeficienţilor unui polinom $P(x)$ dacă se calculează $P(1)$. Se vor cosidera cazurile pentru k par şi impar şi se va ţine seamă de puterile numărului -1.

R. 1) $(+1)\cdot(-1)\cdot(+1)=-1$.

150. Se dă prisma hexagonală $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ cu toate muchiile egale cu a. Să se determine forma şi aria secţiunii determinate de planul $BDA'E'$.

R. Dreptunghi; $a^2\sqrt{6}$.

151. Notăm produsele:

$$A=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{8}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{100}\right);$$

$$B=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{99}\right);$$

$$C=\left(1-\frac{1}{101}\right)B.$$

Să se arate că: a) $A<B$; b) $A<\frac{1}{10}<B$; c) $A<C<B$.

Indicație. Se compară factorii produselor. Se face produsul AxB și se gasește $AxB=\frac{1}{100}=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}$ dar cum $A<B \Rightarrow A<\frac{1}{10}$; $B>\frac{1}{10}$.

152. Un dreptunghi $ABCD$ cu laturile $AB=4$ m și $AD=3$ m se roteste în jurul unei drepte care trece prin A și este paralelă cu diagonala BD. a) Care este aria corpului de rotație obtinut? b). Care este volumul corpului de rotație obținut prin rotirea dreptunghiului dat în jurul unei axe dusă din A perpendiculară pe AC?

Indicație. Aria corpului se compune din aria laterală a trunchiului de con cu BC generatoare plus aria laterală a trunchiului de con cu DC generatoare plus aria laterală a conurilor cu generatoarele AD și AB.

R. a) $\frac{336\pi}{5}$ m^2; b) 60π m^3.

153. a) Să se găsească două polinoame de gradul II, $P(x)$ și $Q(x)$ astfel ca $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{2x-1}{x+2}$. b) Să se arate ca $P(x)-2Q(x)$ este un polinom de gradul I. c) Polinomul $R(x)=P^2(x)+Q^2(x)$, se divide prin (x^2+1)?

Indicație. Polinoamele $P(x)$ și $Q(x)$ trebuie să conțină un același factor liniar, deci ele vor fi de forma: $P(x)=(2x-1)(ax+b)$; $Q(x)=(x+2)(ax+b)$.

154. Pentru vopsirea unui cub sînt necesare 6 kg de vopsea. a) Dacă, după ce am vopsit cubul, îl tăiem în cubulețe cu latura de 2 ori mai mică, de cîte kg mai avem nevoie pentru a vopsi și părțile neacoperite încă de culoare? b) Dar dacă tăiem cubul în cubulețe cu latura de trei ori mai mică cîtă vopsea mai este necesară?

Indicație. a) Se formează opt cuburi prin 3 secțiuni mari cît o față a cubului inițial.

R. a) 6 kg; b) 12 kg.

155. Să se rezolve ecuația: $Y\cup\{1;2\}=\{1;2;8\}$

Indicație. din $Y\cup\{1;2\}=\{1;2;8\}\Rightarrow 8\in Y \rightarrow Y$ nu poate conține nici un element diferit de 1; 2; 8 căci ar apărea în reuniune $\rightarrow Y$ va fi oricare din submulțimile lui $\{1;2;8\}$ care îl conțin pe 8.

R. $Y=\{8\}$ sau $\{1;8\}$ sau $\{2;8\}$ sau $\{1;2;8\}$.

156. Pentru ce valori ale lui x avem

$$F=\frac{(x-3)(x-4)-(3-x)(6-x)-4+(x-1)^2}{5(x-3)-(x-1)(x-3)}<-1 \quad ?$$

R. $x>6$.

157. Să se construiască pe același grafic dreptele (d_1) și (d_2) reprezentate de funcțiile $y=x+3$ și $y=4-x$.

158. Doi stîlpi verticali sînt înfipți într-un plan orizontal A și C fiind respectiv bazele lor; $AB=CD=16$ dm. Stîlpul CD este ancorat cu două cabluri: unul fixat în punctul E, situat în plan orizontal, astfel încît $EC=12$ dm și al doilea fixat în punctul A astfel încît cablul $AD=5\sqrt{17}$ dm. Stîlpul AB este ancorat cu un singur cablu din punctul E, astfel încît $AE=5$ dm. a) Din triunghiul ACE să se calculeze m($\sphericalangle AEC$). b) Se cer măsurile unghiurilor BEC și DEA. c) Se cere tangenta trigonometrică a unghiului DAE.

Indicație. a) Se calculează AC și se deduce că triunghiul ACE este dreptunghic. b) Se folosește una din reciprocele teoremei celor trei perpendiculare.

R. a) m($\sphericalangle AEC$)=90°; b) m($\sphericalangle BEC$)=m($\sphericalangle DEA$)=90°; c) tg($\sphericalangle DAE$)=4.

159. Să se determine A, B, C, D numere întregi pare şi diferite între ele, astfel încît suma $\frac{1}{A}+\frac{9}{B}+\frac{7}{C}+\frac{4}{D}$ să fie cît mai mare posibilă.

Indicaţie. Numărătorii fiind daţi, fracţiile vor avea valoarea cea mai mare, dacă au numitorii cei mai mici posibili. Cu numerele pare cele mai mici se formează fracţii convenabile.

160. Se dă expresia $f(x)=\frac{x+13}{x-7}$ şi mulţimile: $M=\{x \in \mathrm{N} \mid 0<x<30\}$, valorile lui x fiind două numere consecutive neprime pentru care $f(x)$ este un număr întreg şi $N=$ {divizorii unui număr cu două cifre care este 3/8 din răsturnatul său}. Să se arate că $M \cap N=9$ şi $M-N=8$.

161. Să se construiască un triunghi ABC în care $m(\sphericalangle B)=90^{\circ}$; $m(\sphericalangle C)=45^{\circ}$ şi perimetrul este de 21 cm.

Indicaţie. La extremităţile segmentului de 21 cm se construiesc unghiuri de măsuri egale cu $22^{\circ}30'$ şi apoi se foloseşte proprietatea mediatoarei.

162. O piramidă triunghiulară $VABC$ are înălţimea de 9 cm. În triunghiul ABC care este baza piramidei, înălţimea CD împarte latura AB astfel: $\frac{AD}{BD}=\frac{2}{7}$. Aria triunghiului ACD este de 40 cm². La $\frac{2}{3}$ de bază se face secţiunea $A'B'C'$ paralelă cu baza. Să se calculeze volumul piramidei $V'A'B'C'$.

R. 20 cm³.

163. Pe laturile AB şi AC ale triunghiului ABC se ridică perpendiculare în punctul A şi se ia $[AB']\equiv[AB]$, $[AC']\equiv[AC]$. Să se demonstreze că mediana AD a triunghiului ABC, prelungită, este perpendiculară pe $B'C'$.

Indicaţie. Fie A' simetricul punctului A în raport cu D, se formează paralelogramul $ABA'C$; se studiază unghiurile acestui paralelogram în legătură cu unghiurile triunghiului $AB'C'$.

164. Fie a, b, c numere reale pozitive care satisfac egalitatea: $(b+c+a)(b+c-a)=2bc$. Să se arate că a, b, c sînt laturile unui triunghi dreptunghic.

165. Se dă un cub cu muchia a. Să se calculeze distanţele de la punctele A, C şi B' la diagonala BD. Să se arate că aceste trei segmente sînt concurente, într-un punct T. Să se arate că $\frac{BT}{TD'}=\frac{1}{2}$. Să se determine măsura unghiului dintre AB' şi AC.

Indicaţie. Vezi $\Delta CBD'$ în care $CO \perp BC$; $O \in BD'$.

R. a) $a\sqrt{6}/3$; d) 60°.

166. Un cilindru are raza de 3 cm şi înălţimea de 10 cm. Pe axa lui se ia un punct M situat la o distanţă x de la baza cilindrului şi se scoate conul care are ca bază, baza cilindrului şi vîrful M. a). Să se exprime în funcţie de x volumul corpului rămas după această scoatere. b) Să se alcătuiască tabloul de variaţie al funcţiei. c) Să se construiască graficul acestei funcţii (se vor lua ca unităţi, pe axa absciselor, cîte 1 cm pentru fiecare cm de înălţime, pe axa ordonatelor cîte 1 cm pentru 10 π cm³). d) Să se determine x astfel încît corpul rămas să aibă un volum dat a cm³. Intre ce limite

trebuie să fie cuprins numărul a pentru ca problema să fie posibilă în cazul dimensiunilor date în enunţul problemei ?

Indicaţie. Prezentăm tabelul de variaţie pentru cîteva valori:

x	0	2	4	$\cdots$	10
V	90π	84π	78π	$\cdots$	60π

R. a) $V=90\pi-3\pi x$; $x\in[0,10]$. b) Funcţia este descrescătoare, avînd valoarea maximă pentru $x=0$, cînd corpul rămîne cilindric şi minimul pentru $x=10$, cînd conul ajunge cu vîrful în centrul celeilalte baze a cilindrului. d) Cu condiţia $0\le x\le 10$ se obţine $60\pi\le a\le 90\pi$.

167. Un buştean cilindric cu raza de 12 cm şi înălţimea de 3 m se ciopleşte la un capăt astfel încît să aibă un vîrf conic, înălţimea conului fiind x cm. a) Să se exprime în funcţie de x volumul corpului obţinut prin cioplire. b) Să se alcătuiască tabelul de variaţie al acestei funcţii. c) Să se construiască graficul funcţiei.

R. a) $V=12\pi(3\,600-8x)$. b) Volumul are un maxim pentru $x=0$, cînd corpul rămîne cilindric ($V=43\,200\pi$ cm^3) şi un minim pentru $x=300$, cînd corpul capătă forma de con ($V=14\,400\pi$ cm^3).

168. Pe o sferă cu raza de 2 dm se consideră o calotă de înălţime x. a) Să se exprime aria calotei în funcţie de x. b) Intre ce limite poate varia înălţimea x ? c) Intre ce limite poate varia aria calotei ? d) Să se alcătuiască tabelul de variaţie şi să se facă graficul acestei funcţii. e) Să se determine x astfel ca aria calotei să fie egală cu un număr dat a. Intre ce limite poate fi cuprins numărul a, pentru ca problema să fie posibilă ?

R. a) $A=4\pi x$; b) $0\le x\le 4$; c) $0\le A\le 16\pi$; d) funcţia este crescătoare, avînd un minim 0, pentru $x=0$, şi un maxim pentru $x=5$, în valoare de 16π; e) $x=a/4\pi$; $0\le a\le 16\pi$.

169. Un cilindru are înălţimea de 10 cm, iar raza x variabilă. a) Să se exprime aria sa laterală în funcţie de x şi să se construiască graficul acestei funcţii, cînd x variază de la 0 la 5 ($x\in\mathbf{N}$). (Pe axa absciselor se ia ca unitate 1 cm, pe axa ordonatelor se ia ca unitate 20π cm^2.) Să se exprime volumul său ca funcţie x şi să se construiască graficul acestei funcţii cînd x variază de la 0 la 5. (Pe axa absciselor – aceeaşi unitate ca mai înainte; pe axa ordonatelor se ia ca unitate 10π cm^3.)

R. a) $20\pi x$ cm^2; b) $10\pi x^2$ cm^3.

VI. EXERCIŢII DE ALGEBRĂ REZOLVATE CU INDICAŢII METODICE PENTRU CLASELE V – IX

Am urmărit an de an, temele date la matematică la diferite concursuri, inclusiv admiterea în treapta I şi a II–a.

Pentru treapta I de liceu, la algebră, accentul s–a pus pe descompunerea în factori a unei expresii algebrice ca şi pe simplificarea şi interpretarea unei fracţii algebrice în special.

Din propria experienţă ca şi din consultarea lucrărilor elevilor la asemenea concursuri, am tras concluzia că marea majoritate a concurenţilor încearcă, la întîmplare, să obţină o descompunere în factori sau să aducă la forma cea mai simplă o fracţie algebrică şi dacă nu a reuşit prima încercare de a obţine un produs de factori, intră în panică şi astfel ratează lucrarea.

In acest sens doresc să vin în sprijinul elevilor concurenţi şi să le ofer o orientare în descompunerea în factori a unei expresii algebrice, ca şi în simplificarea şi interpretarea fracţiilor algebrice.

La astfel de teme, în general, trebuie rezolvate probleme de tipul următor: a) să se descompună $f(x)$ în factori; b) să se aducă $f(x)$ la forma cea mai simplă; c) pentru ce valori ale necunoscutei, $f(x)$ este număr în $\mathbf{Z}$ sau $f(x) \in \mathbf{N}$; d) pentru ce valori ale necunoscutei, $f(x)$ este negativă sau pozitivă; e) pentru ce valori ale necunoscutei $f(x)$ se simplifică; f) pentru ce valori ale lui x, $f(x)$ este fracţie periodică; g) pentru ce valori ale lui x, $f(x)$ este maximă sau minimă.

Referitor la punctul a) (descompunere în factori) recomand elevilor următoarele:

1. Se cercetează expresia dată dacă conţine sau nu un *factor comun*. Exemplu: $x(1-y+y^2)-1+y-y^2=(y^2-y+1)(x-1)$.

2. Dacă expresia dată nu conţine factor comun, se cercetează toţi termenii expresiei date, pentru a putea obţine din ei sau dintr–o parte din aceşti termeni, o *formulă cunoscută*. Exemplu: $x^3-x^2y+xy^2-y^3=x^3-y^3-x^2y+xy^2=(x-y)(x^2+xy+y^2)-$ $-xy(x-y)=(x-y)(x^2+y^2)$.

3. *Grupare de termeni*. Exemplu: $1+x-y-xy-yz+z=(1+x+z)(1-y)$, se poate face gruparea a cîte doi termeni sau direct a cîte trei.

4. *Se adună şi se scade aceeaşi expresie la expresia dată*, ţinînd seama că astfel trebuie să obţinem o formulă cunoscută. Exemple: a) $x^4+2x^2y^2-3y^4$. Se vede uşor că avem nevoie de y^4 ca să putem obţine $(x^2+y^2)^2$; $x^4+2x^2y^2+y^4-y^4-3y^4=$ $(x^2+y^2)^2-4y^4=(x^2+y^2-2y^2)(x^2+y^2+2y^2)$; b) $x^4+2x^2y^2+9y^4$. Cele două pătrate perfecte x^4+9y^4 ne indică ce expresie trebuie să adăugăm şi să scădem pentru a obţine pătratul binomului $(x^2+3y^2)^2=x^4+6x^2y^2+9y^4$. Cum expresia dată conţine pe $2x^2y^2$, este uşor de observat că trebuie să adăugăm pe $4x^2y^2$ ca să obţinem $6x^2y^2$ de care avem nevoie pentru formarea binomului. Obţinem: $(x^2+3y^2)^2-4x^2y^2=(x^2+3y^2-2xy)(x^2+3y^2+2xy)$. Se pot utiliza şi alte procedee.

5. Din expresia dată, se alege un termen pe care îl scriem în alt mod. Exemple: a) $xy-4x-3y+11=0$; $xy-4x-3y+12-1=0$ şi avem $xy-4x-3y+12-1=(y-4)(x-3)-1$;

b) $\dfrac{6x^2+5xy+y^2}{2x+y}=\dfrac{6x^2+3xy+2xy+y^2}{2x+y}=\dfrac{3x(2x+y)+y(2x+y)}{(2x+y)}=3x+y$. De observat că numitorul fracţiei ne–a orientat spre termenul de la numărător ce trebuie să–l descompunem şi cum trebuie descompus, ca să putem obţine ca factor comun numitorul fracţiei.

6. $P(1)$, $P(2)$ etc. Exemplu: $x^3-8x^2+19x-12$; $P(1)=1-8+19-12=0$. Polinomul se împarte la $x-1$ şi astfel se obţine uşor descompunerea lui în factori.

7. *Algoritmul lui Euclid.* Exemplu: $\frac{6x^3+13x^2+15x-25}{2x^3+4x^2+4x-10}$; prin împărţiri succesive obţinem factor comun x^2+3x+5.

8. *Metoda substituţiei unei expresii dintr–o expresie dată.* Exemplu: în expresia $\frac{(x^2-1)(x^2-3)+1}{(x^2-1)(x^2-4)+2}$ notăm $x^2-1=y$; $\frac{(x^2-1)(x^2-1-2)+1}{(x^2-1)(x^2-1-3)+2}=\frac{y(y-2)+1}{y(y-3)+2}=\frac{(y-1)^2}{(y-1)(y-2)}=$ $=\frac{y-1}{y-2}=\frac{x^2-1-1}{x^2-1-2}=\frac{x^2-2}{x^2-3}$.

9. *Utilizarea formulei de descompunere a trinomului de gradul al doilea.*

Exemplu: $f(x)=\frac{6x^2-5x+1}{6x^2+x-1}$; $f(x)=\frac{6(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})}{6(x-\frac{1}{3})(x+\frac{1}{2})}=\frac{2x-1}{2x+1}=1-\frac{2}{2x+1}$ $(x\neq\frac{1}{3}$ şi $-\frac{1}{2})$.

10. *Artificii de calcul pentru a obţine pătrate perfecte dintr–o expresie dată.* Exemplu: $n^2-np+p^2-mp+m^2-mn>0$; $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$. In ambele cazuri se înmulţesc expresiile cu doi şi se obţin pătrate perfecte.

11. Pentru descompunerea unei expresii într–un produs de factori, sau pentru simplificarea unei fracţii algebrice, am prezentat prin exemple, mai multe procedee. Consider că este înteresant şi util să prezint exemplificat, o variantă a unuia dintre procedeele menţionate şi anume: împărţirea expresiei date prin necunoscuta la pătrat, prin care este exprimată. Iată cîteva exemle:

Să se descompună în factori:

a) $E_1=x^4+x^3-4x^2+x+1$, b) $E_2=x^4-3x^3-6x^2+3x+1$.

c) Să se arate că polinomul: $9a^4-24a^3+34a^2-24a+9$ este un pătrat perfect.

In toate aceste cazuri împărţim prin x^2, respectiv prin $a^2(x\neq0,\ a\neq0)$ şi obţinem:

a) $x^2+x-4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=x+\frac{1}{x}+x^2+\frac{1}{x^2}-4$. Notăm $x+\frac{1}{x}=y$ şi cum $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+$ $+\frac{1}{x^2}\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$. Expresia dată devine $y^2+y-6=(y+3)(y-2)$ şi înlocuind obţinem $E_1=(x^2+3x+1)(x-1)^2$.

Se poate observa că putem împărţi expresia prin $x-1$, $(x\neq1)$ şi obţinem $x^4+x^3-4x^2+x+1=(x-1)(x^3+2x^2-2x-1)$ dar $x^3-1+2x(x-1)=(x-1)(x^2+3x+1)$ $\Rightarrow x^4+$ $+x^3-4x^2+x+1=(x-1)^2(x^2+3x+1)$.

b) $x^2-3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-6=x^2+\frac{1}{x^2}+3\left(\frac{1}{x}-x\right)-6$. Notăm $\frac{1}{x}-x=y$, atunci $x^2+\frac{1}{x^2}=$ $=y^2+2$ şi expresia dată devine $y^2+3y-4=(y-1)(y+4)$.

Deci $E_2=(x^2+x-1)(x^2-4x-1)$.

c) Să arătăm că expresia $9a^4-24a^3+34a^2-24a+9$ este un pătrat perfect.

Impărţind prin a^2 obţinem: $9\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)-24\left(a+\frac{1}{a}\right)+34$; $a+\frac{1}{a}=y$; $a^2+\frac{1}{a^2}=y^2-2\rightarrow$ $\rightarrow 9y^2-24y+16=\left(y+\frac{4}{3}\right)^2$.

Recomand elevilor să studieze cu atenţie folosirea expresiilor $x+\frac{1}{x}$ şi $x^2+\frac{1}{x^2}$, pentru a putea sesiza obţinerea lor dintr–o expresie dată.

INEGALITĂŢI

Deoarece la multe dintre concursurile de matematică (examene de treaptă, olimpiade) s–au dat inegalitaţi, dăm cîteva exerciţii rezolvate din acest capitol.

Elevii trebuie să cunoască cîteva tipuri de inegalităţi cu ajutorul cărora să poată rezolva şi altele. De exemplu: fiind date numerele pozitive a, b si c să se arate că:

1) $\frac{a^2+b^2}{ab}\geq 2$.

Rezolvare. $\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}\geq 2\rightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\rightarrow a^2+b^2\geq 2ab$ deci $a^2-2ab+b^2\geq 0$; $(a-b)^2\geq 0$ c.c.t.d.

2) $a^2-ab+b^2\geq 0$.

Rezolvare. Utilizăm inegalitatea $\frac{a^2+b^2}{ab}\geq 2$ sau $\frac{a^2+b^2}{2}\geq ab$. Cum $a^2+b^2>\frac{a^2+b^2}{2}\geq ab\rightarrow a^2-ab+b^2>0$.

3) $a+\frac{1}{a}\geq 2$.

Rezolvare. $a^2+1\geq 2a$; $a^2+1-2a\geq 0$.

4) Folosind $a+\frac{1}{a}\geq 2$, să se rezolve inegalitatea: $a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 6$.

Rezolvare. Inegalitatea se poate scrie $a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+c+\frac{1}{c}\geq 6$, deci $a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+c+\frac{1}{c}\geq 2+2+2=6$.

5) Folosind aceeaşi inegalitate $a+\frac{1}{a}\geq 2$, să se arate că, dacă $a+b+c=1$ atunci $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9$.

Rezolvare. Deoarece $a+b+c=1\rightarrow\frac{a}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{1}{a}\rightarrow 1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{1}{a}$ sau $\frac{1}{b}=1+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$ sau $\frac{1}{c}=1+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\rightarrow$ $\rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\geq 3+2+2+2=9$ (vezi punctul 1).

6) Folosiţi inegaliatea $a^2+b^2\geq ab$, pentru a rezolva inegalităţile: $a^2+b^2+c^2+d^2\geq ab+ac+ad+bc+bd+cd$; $a^2+b^2\geq\frac{(a+b)^2}{2}$ şi $a^2+b^2+c^2\geq\frac{(a+b+c)^2}{2}$.

7) Fiind cunoscute $\frac{x+y}{2}=m_a$ (media aritmetică), $\sqrt{xy}=m_g$ (medie geometrică), $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=m_h$ (media armonică), $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}=m_p$ (media pătratică), $x,y>0$, să se arate că:

$$m_h \le m_g \le m_a \le m_p.$$

Indicație. Să arătăm că: $\sqrt{xy} \ge \frac{2xy}{x+y}$ adică $m_g \ge m_h$; $\frac{4x^2y^2}{(x+y)^2} \le xy$, $(x+y)^2 \ge 4xy$; $(x+y)^2-4xy \ge 0$; $x^2+2xy+y^2-4xy \ge 0 \to (x-y)^2 \ge 0$. Similar se rezolvă și celelalte inegalități.

Aplicații.

Să se arate că:

1) $ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c) \ge 6abc$, $a>0$, $b>0$, $c>0$.

Indicație. Se împarte totul cu abc și apoi se aplică $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge 2$.

2) $a^2+b^2+c^2+d^2 \ge ab+ac+ad+bc+bd+cd$.

R. Folosim $a^2+b^2>2ab$; $a^2+d^2>2ad$; $a^2+c^2>2ac$; $b^2+d^2>2bd$; $b^2+c^2>2bc$; $c^2+d^2>2cd$. Se adună cele 6 inegalitați și se obține c.t.d.

3) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca>0$ oricare ar fi $a,b,c \in \mathbf{R}$.

Indicație. Se înmulțește inegalitatea cu 2 și se obține: $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2>0$.

4) Dacă a,b,c sînt laturile unui triunghi atunci: $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2 \ge 9abc$.

Indicație. Impărțind cu abc avem, $\frac{(b+c)^2}{bc}+\frac{(c+a)^2}{ca}+\frac{(a+b)^2}{ab} \ge 9$ sau $\frac{b^2+c^2}{bc}+2+\frac{c^2+a^2}{ca}+2+$ $+\frac{a^2+b^2}{ab}+2 \ge 9 \to \frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge 3 \to \frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c} \ge 3$, dar într-un triunghi avem $\frac{b+c}{a}>1$, $\frac{c+a}{b}>1$ și $\frac{a+b}{c}>1$ deci $b+c>a$, $c+a>b$, $a+b>c$ adunînd cele 3 inegalități obținem inegalitatea cerută.

5) Fie $f(a)=\frac{(a+5)^2-(a-5)^2}{(2a+5)^2+(2a-5)^2}$, să se arate că $f(a) \le \frac{1}{2}$, $a \in \mathbf{R}$.

Indicație. Efectuînd calculele obținem $f(a)=\frac{10a}{4a^2+25}$; $\frac{1}{f(a)}=\frac{4a^2+25}{10a}=\frac{2a}{5}+\frac{5}{2a}$ adică o relație de forma $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge 2 \to f(a) \le \frac{1}{2}$.

6) Să se rezolve ecuația: $\frac{x^2-6x+14}{x-3}+\frac{x^2+2x+2}{x+1}=\frac{x^2-8x+9}{x-4}+\frac{x^2+4x+10}{x+2}$ $(x \ne -1,-2,3,4)$.

Am prezentat această ecuație, pentru că elevii sînt tentați să încerce a rezolva ecuația prin aducerea la același numitor a fracțiilor date, ceea ce ar conduce la calcule foarte greoaie și complicate.

R. $\frac{x^2-6x+9+5}{x-3}+\frac{x^2+2x+1+1}{x+1}=\frac{x^2-8x+16-7}{x-4}+\frac{x^2+4x+4+6}{x+2}$; $\frac{(x-3)^2+5}{x-3}=\frac{(x-3)^2}{x-3}+\frac{5}{x-3}=x-3+\frac{5}{x-3}$.

Se prezintă fiecare fracție sub această formă și ecuația se rezolvă foarte ușor fără calcule laborioase.

Pentru rezolvarea cu succes a exercițiilor de algebră cu privire la fracții, voi încerca să ajut elevii, prin rezolvarea unor exerciții mai deosebite.

Exemple. Se dau expresiile:

$$a)\ f(x)=\frac{x+1}{4};\ b)\ f(x)=\frac{4}{x+1}\ \text{și}\ c)\ f(x)=\frac{2x+1}{x-3}.$$

Pentru ce valori ale lui x, $f(x)$ este număr întreg?

Rezolvare. a) $f(x)=\frac{x+1}{4}$, trebuie ca $x+1$ să fie multiplu de 4, ca să putem obține $f(x)$ număr întreg $\rightarrow x+1=M_4, x=M_4-1$. Să verificăm pentru $M_4=8$, atunci $M_4-1=8-1=7$; $f(7)=\frac{7+1}{4}=2$ c.c.t.d.

b) $f(x)=\frac{4}{x+1}$, în acest caz $x+1$ trebuie să fie unul dintre divizorii lui 4 $\rightarrow x+1=\pm4 \rightarrow x=3$ și $x=-5$; $x+1=\pm2 \rightarrow x=1$ și $x=-3$; $x+1=\pm1 \rightarrow x=0$ și $x=-2$. Deci $x\in\{-5, -4, -3, -2, 0, 1, 3\}$.

c) $f(x)=\frac{2x+1}{x-3}$ (cazul cel mai des întîlnit). Această expresie o scriem astfel $\frac{2x+1}{x-3}=\frac{x-3+x+4}{x-3}=f(x)$ (adică scriem numitorul fracției și-l completăm ca să obținem numărătorul) $\rightarrow f(x)=\frac{x-3}{x-3}+$ $+\frac{x+4}{x-3}=1+\frac{x-3+7}{x-3}=1+1+\frac{7}{x-3}=2+\frac{7}{x-3}$ (astfel am ajuns la un exemplu asemănător cu cel din cazul b). $f(x)=2+\frac{7}{x-3}$, $x-3$ trebuie să fie unul dintre divizorii lui 7 deci: $x-3=\pm7 \rightarrow x=10$ și $x=-4$, $f(10)=3$ și $f(-4)=1$; $x-3=\pm1 \rightarrow x=2$ și $x=4$, $f(2)=-5$, $f(4)=9$.

Menționez că am prezentat fracții foarte simple în care se puteau observa numerele întregi pentru $f(x)$ la o simplă privire. Există însă și cazuri mai dificile.

Să se rețină că: în primul caz cînd uzăm de multiplu, necunoscuta este la numărătorul fracției, în al doilea caz cînd folosim divizorii, necunoscuta este la numitor, iar în al treilea caz necunoscuta este și la numărător și la numitor.

Alte tipuri de probleme rezolvate. a) Se dă expresia $f(x)=\frac{3x^6+6x^3+10}{x^6+2x^3+2}$ să se determine valoarea lui $x\in\mathbf{Z}$ pentru care $f(x)$ este maximă. Să se afle valoarea maximă a lui $f(x)$.

Rezolvare. Se observă că x^6+2x^3+2 se poate pune în evidență din $3x^6+6x^3+10$ deci $f(x)=\frac{3x^6+6x^3+6+4}{x^6+2x^3+2}=\frac{3(x^6+2x^3+2)+4}{x^6+2x^3+2}=\frac{3(x^6+2x^3+2)}{x^6+2x^3+2}+\frac{4}{x^6+2x^3+2}=3+\frac{4}{x^6+2x^3+1+1}=3+\frac{4}{(x^3+1)^2+1}$ pentru ca numitorul fracției să fie minim trebuie ca $x^3+1=0$ deci $f(x)=3+\frac{4}{0+1}=7$.

b) Se dă $f(x)=\frac{8x^2+2x-3}{10x^2-x-2}$. Să se determine valorile naturale ale lui x pentru care $f(x)$ se simplifică.

Rezolvare. $f(x)=\frac{8x^2-4x+6x-3}{10x^2-5x+4x-2}=\frac{(4x+3)(2x-1)}{(5x+2)(2x-1)}=\frac{4x+3}{5x+2}$. Se știe din aritmetică că dacă număratorul și numitorul unei fracții au un divizor comun atunci și diferența lor are același divizor. Exemplu: $\frac{15}{25}$ au divizor pe 5; diferența $25-15=10$ are și ea divizor pe 5. Calculăm diferența $5x+2-4x-3=x-1$; eliminăm pe x și efectuăm iarăși scăderea $5(4x+3)-4(5x+2)=20x+15-20x-8=7$ $\rightarrow x-1=M_7 \rightarrow x=M_7+1$. Luăm de exemplu $x=14+1=15$.

Verificare: $\frac{4\cdot15+3}{5\cdot15+2}=\frac{63}{77}$ se simplifică prin 7.

c) Se dă $f(x)=\frac{x^3-x^2+x-1}{x^4+2x^3-x^2-2x}=\frac{(x^2+1)(x-1)}{x^4+3x^3-x^3+2x^2-3x^2-2x}=\frac{x^2+1}{x^3+3x^2+2x}$. c_1) Pentru ce valori ale lui $x\in\mathbb{Z}$, $f(x)$ este un număr întreg? c_2) Să se arate că $f(x)$ este periodică.

Rezolvare. Pentru rezolvarea punctului c_1), s-a arătat procedeul. Pentru rezolvarea punctului c_2), se ține seama că pentru ca o fracție să fie periodică, numitorul fracției trebuie să fie 3 sau multiplu de 3, iar numărătorul trebuie să nu fie divizibil cu 3. In cazul de mai sus, avem $\frac{x^2+1}{x(x^2+3x+2)}=\frac{x^2+1}{x(x+1)(x+2)}=f(x)$. Se observă că la numitor avem un produs de trei factori– numere consecutive–care știm că este divizibil cu 3, iar x^2+1 nu este divizibil cu 3, deci $f(x)$ este periodică.

d) Să se stabilească semnul funcției: $f(x)=\frac{x-3}{x+2}$

Rezolvare. Aflăm rădăcina numărătorului și pe cea a numitorului: $x-3=0 \rightarrow x=3$; $x+2=0\rightarrow x=-2$. Studiem semnul funcției de la numărător și al funcției de la numitor și apoi pe cel al funcției date.

x	$-\infty$ -2 0 3 $+\infty$
$x-3$	− − − − − − − − − − − − 0 + + + +
$x+2$	− − − − 0 + + + + + + + + + + + +
$f(x)$	+ + + + | − − − − − − − 0 + + + +

Deci $f(x)>0$ pentru $x\in(-\infty,-2)\cup(3;+\infty)$; $f(x)<0$ pentru $x\in(-2,3)$ și $f(x)=0$ pentru $x=3$.

Pentru o mai bună înțelegere a tabelului de variație a unei funcții voi mai prezenta un caz.

e) Să se rezolve inecuația: $(x+1)\cdot(x-2)\geq0$.

Rezolvare. Se alcătuiește tabelul de mai jos:

x	$-\infty$ -1 2 $+\infty$
$x+1$	− − − − − 0 + + + + + + + + + +
$x-2$	− − − − − − − − − − − 0 + + + + +
$(x+1)(x-2)$	+ + + + + 0 − − − − 0 + + + + +

Pentru ca să avem $(x+1)\cdot(x-2)\geq0$ trebuie ca: $x\in(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$.

In scopul orientării elevilor cu privire la rezolvarea unor ecuații a căror necunoscute sînt numere întregi consider necesar să prezint cîteva exemple.

Să se rezolve în numere întregi ecuațiile:

1) $6xy+15x-4y=23$.

Rezolvare. Se studiază ecuația în sensul de a se obține un produs de factori în membrul I al ei:

$6xy+15x-4y-10-13=0 \rightarrow 6xy+15x-4y-10=13 \rightarrow 3x(2y+5)-2(2y+5)=13 \rightarrow (3x-2)(2y+5)=13 \rightarrow 3x-2=13$ şi $2y+5=1$ sau $3x-2=1$ şi $2y+5=13$ sau $3x-2=-13$ şi $2y+5=-1$ sau $3x-2=-1$ şi $2y+5=-13$. Din aceste relaţii se determină valorile lui x şi y.

2) $x^2+y^2+z^2=9$.

Rezolvare. $x^2 \le 9 \rightarrow x \in [-3,3]$; $x \in \{\pm 3; \pm 2; \pm 1\}$. Pentru $x=\pm 2$. avem $4+y^2+z^2=9$; $y^2+z^2=5$; $y^2 \le 5 \rightarrow$ $\rightarrow y \in \{\pm 2; \pm 1; 0\}$ şi procedeul continuă.

3) $2x^2+y^2+2y+1=0$.

Rezolvare. Scriem $+1=3-2$; $2x^2+y^2+2y+3=2; x^2+x^2+y^2+2y+1+1+1-2x+2x=2$ (am adăugat şi scăzut $2x$).

Deoarece $y^2+2y+1=(y+1)^2$, ne orientăm cum să descompunem şi ceilalţi termeni ca să putem obţine pătrate perfecte.

$(x-1)^2+(y+1)^2+(x+1)^2=2$

$0 + 1 + 1 = 2$ luăm toate cazurile posibile.

$1 + 0 + 1 = 2$

$1 + 1 + 0 = 2$

4. Să se determine rădăcinile întregi ale ecuaţiei $2x+3y-3=0$ în cazul cînd $x \in [-3;6]$ şi $y \in [-1;5]$.

Rezolvare. $3y=3-2x$; $y=\frac{3-2x}{3}=1-\frac{2x}{3}$. Pentru ca y să fie număr întreg trebuie ca x să fie multiplu de $3 \rightarrow x \in \{-3;0;3;6\}$.

5. Se dau ecuaţiile:

a) $x^3-xy+y=13$; b) $xy-4x-3y+11=0$; c) $-15x^2+11xy-2y^2=11$, x şi y numere întregi.

Să se determine x şi y.

Rezolvare. a) $x^3-xy+y-1=12 \rightarrow (x-1)(x^2+x+1)-y(x-1)=12$; $(x-1)(x^2+x+1-y)=12 \rightarrow x-1=1$ deci $x=2$ şi $x^2+x+1-y=12$; $x-1=3$ deci $x=4$ şi $x^2+x+1-y=4$. Se iau toţi divizorii lui 12 şi se obţin mai multe soluţii. b) Se scrie $11=12-1$; $xy-4x-3y+12=1$; $x(y-4)-3(y-4)=1$; $(y-4)(x-3)=1 \rightarrow x-3=1$ deci, $x=4$ şi $y-4=1$ deci $y=5$ etc. c) Scriem $11xy=5xy+6xy \rightarrow -15x^2+5xy+6xy-2y^2=11$; $5x(y-3x)+2y(3x-y)=11$; $(y-3x)(5x-2y)=11 \rightarrow y-3x=1$; $5x-2y=11$. Se obţine $x=-13$, $y=-38$ etc.

6. Să se rezolve sistemele $(x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z})$:

$$\text{a)} \begin{cases} xy+x+y=11 \\ x^2y+y^2x=30 \end{cases}, \quad \text{b)} \begin{cases} x^2y+xy^2=30 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6} \end{cases}$$

Rezolvare. a) $x+y=11-xy$; $xy(x+y)=30 \rightarrow xy(11-xy)=30 \rightarrow 11-xy=5$; $xy=6 \rightarrow x=2; y=3$ sau $x=3, y=2$.

b) Scriem $\frac{x+y}{xy}=\frac{5}{6}$ se înmulţesc ecuaţiile şi obţinem $(x+y)^2=25$; $x+y=\pm 5$. Se formează mai multe sisteme şi se obţin soluţiile: (1;5); (5;1); (2;3); (3;2).

7. Se dă funcţia: $f(x)=\dfrac{2x^{k+1}+x^k+2x+1}{x^{k+1}+x^k+x+1}$; $k \in \mathbb{N}$.

a) Să se aducă $f(x)$ la forma ireductibilă.

Rezolvare. $f(x)=\dfrac{2x^k \cdot x+x^k+2x+1}{x^k \cdot x+x^k+x+1}==\dfrac{x^k(2x+1)+2x+1}{x^k(x+1)+x+1}=\dfrac{(x^k+1)(2x+1)}{(x^k+1)(x+1)}=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

b) Pentru ce valori ale lui x, $f(x)$ este număr întreg?

Rezolvare. $\frac{2x+1}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}+\frac{x}{x+1}=1+\frac{x}{x+1} \to x=0;\ f(x)=1.$

c) Pentru ce valori ale lui x, $f(x)$ este negativă?

Rezolvare.

x	$-\infty$ -1 $-\frac{1}{2}$ $+\infty$
$2x+1$	$- - - - - - - - - -$ 0 + + + + +
$x+1$	$- - - - -$ | + + + + + + + + + +
$\frac{2x+1}{x+1}$	+ + + + + | $- - - -$ 0 + + + + +

$f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$ este ireductibilă dacă $x\neq 0$.

Dacă x este par, $2x+1$ este impar şi de asemenea $x+1$ este impar şi fracţia nu se simplifică. La fel şi pentru x impar.

PROBLEME DIVERSE

1. Fie f şi g două funcţii liniare. Determinaţi funcţiile şi reprezentaţi grafic funcţiile ştiind că:

$$2f(x+1) + g(x-1)=2x+14;$$
$$f(x+1)-2g(x-1)=6x-18,\ x\in\mathbf{R}.$$

Rezolvare. $4f(x+1)+2g(x-1)=4x+28$ (am înmulţit prima relaţie cu 2);

$f(x+1)-2g(x-1)=6x-18.$

Deci $5f(x+1)=10x+10 \to f(x+1)=2x+2$ şi $g(x-1)=-2x+10.$

Deoarece $f(x)$ este funcţie de gradul I, ea se scrie: $f(x)=ax+b$ deci $f(x+1)=a(x+1)+b=2x+2$; $ax+a+b=2x+2$, $ax=2x \to a=2$, $a+b=2$, $b=0$, deci $f(x)=2x$.

$g(x-1)=-2x+10$; $ax-a+b=-2x+10$; $ax=-2x$; $a=-2$; $-a+b=10$; $2+b=10 \to b=8$, deci $g(x)=-2x+8$.

2. Fie $f(x)=\frac{6x^4+13x^3+15x^2-25x}{2x^4+4x^3+4x^2-10x}$, să se arate că nu există $x\in\mathbf{Z}$ pentru care $f(x)\in\mathbf{Z}$.

Rezolvare. Se obţine $f(x)=\frac{(6x-5)(x^2+3x+5)}{2(x-1)(x^2+3x+5)}$. Cum numărătorul nu se împarte la $x-1$ şi nici la 2, ca $f(x)$ să se simplifice, ar trebui ca numărătorul să se împartă la x^2+3x+5 şi se împarte. Putem folosi direct algoritmul lui Euclid însă este mai greoi.

Se obţine $f(x)=\frac{6x-5}{2x-2}=3+\frac{1}{2x-2} \to 2x-2=1 \to 2x=3$ deci $x=\frac{3}{2}$; $2x-2=-1 \to 2x=1$ deci $x=\frac{1}{2}$.

3. Pentru ce valori ale lui m, funcţia $f(x)=(m-2)x+m$ este crescătoare, descrescătoare, constantă?

Rezolvare.

$m-2>0 \to m>2$; $f(x)$ este crescătoare pentru $m \in (2;+\infty)$;

$m-2<0 \to m<2$, $f(x)$ este descrescătoare pentru $m \in (-\infty;2)$;

$m-2=0 \to m=2$, $f(x)$ este constantă.

4. Suma tuturor muchiilor unui paralelipiped drept este 48 m, iar diagonala este $5\sqrt{2}$ m . Să se afle aria totală a paralelipipedului.

Rezolvare.

$\begin{cases} 4x+4y+4z=48, \\ x^2+y^2+z^2=(5\sqrt{2})^2 \end{cases} \to x+y+z=12;\ (x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=144, x^2+y^2+z^2=(5\sqrt{2})^2 \to$

$\to 50+2(xy+yz+zx)=144 \to 2(xy+yz+zx)=94$ care este aria totală.

5. Fie $P(x)=x^3-x^2+x-1$, să se scrie trei polinoame care îl divid în afară de cel dat.

Rezolvare.

$x^2(x-1)+x-1=(x^2+1)(x-1);\quad x^2+1=x^2+1+2x-2x=(x+1)^2-\left(\sqrt{2x}\right)^2=\left(x+1-\sqrt{2x}\right)\left(x+1+\sqrt{2x}\right).$

$P(x)=(x-1)\left(x+1-\sqrt{2x}\right)\left(x+1+\sqrt{2x}\right).$

6. Descompuneţi în factori: a) $16x^9+\frac{1}{4}$ şi b) $x^3+2x^2(x-1)-1$.

Rezolvare. a) $16x^9+\frac{1}{4}=\frac{64x^9+1}{4}=\frac{(4x^3)^3+1}{4}=\frac{(4x^3+1)(16x^6-4x^3+1)}{4}$; b) $x^3+2x^2(x-1)-1=x^3-1+2x^2(x-1)=$

$=(x-1)(x^2+x+1)+2x^2(x-1)=(x-1)(x^2+x+1+2x^2)=(x-1)(3x^2+x+1).$

7. Determinaţi valorile lui m şi n ştiind că polinoamele $5x^2y+mxy^2-xy^2+2xy$ şi $-x^2y+3xy^2+2xy+nx^2y$ au aceeaşi formă canonică.

Rezolvare. Comparăm cele două polinoame: $5x^2y+mxy^2-xy^2+2xy=-x^2y+3xy^2+2xy+nx^2y \to$

$\begin{cases} 5x^2y+x^2y=nx^2y, \\ 3xy^2+xy^2=mxy^2 \end{cases} \to 6x^2y=nx^2y \to n=6;\ 4xy^2=mxy^2 \to m=4.$

8. Fie $f(x)=\dfrac{(4x+1)(2x^2-2x+1)}{(2x-1)(2x^2-2x+1)}$.

a) Pentru ce valori ale lui x, $f(x)$ este număr întreg ?

b) Pentru ce valori ale lui x, $f(x)$ este negativ ?

Rezolvare. a) $\frac{4x+1}{2x-1}=2+\frac{3}{2x-1}$, deci pentru $x=2, f(x)=3$ şi pentru $x=1, f(x)=5$. b) Pentru $x\in\left(-\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}\right)$.

9. Să se deducă relaţiile între a şi b din egalităţile: $x+\frac{1}{x}=y+\frac{1}{y}=a$ şi $xy=b$.

Rezolvare. $x^2+1=ax \to x^2-ax+1=0,\ y^2+1=ay \to y^2-ay+1=0,$ deci $x=y$ şi $x^2y^2=(ax-1)^2,\ b^2=(ax-1)^2;$

$b=ax-1;\quad ax=b+1;\quad x=\frac{b+1}{a};\quad y=\frac{b+1}{a};\quad b=\frac{(b+1)^2}{a^2}.$

10. Se dă fracţia: $f(x)=\dfrac{4x^3-32}{x^3+(x+2)^3}$. a) Arătaţi că ea se mai poate scrie sub forma $2-\dfrac{6}{x+1}$. b) Pentru ce valori ale lui x, $f(x)$ este număr întreg? c) Pentru ce valori ale lui x, $f(x)$ este negativ?

Rezolvare. a) $\frac{4x^3-32}{x^3+(x+2)^3}=\frac{4(x-2)(x^2+2x+4)}{2(x+1)(x^2+2x+4)};\quad \frac{2x-4}{x+1}=\frac{x+1+x-5}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}+\frac{x-5}{x+1}=1+\frac{x-5}{x+1}=1+\frac{x+1-6}{x+1}=$

$= 1+\frac{x+1}{x+1}-\frac{6}{x+1}=2-\frac{6}{x+1}$ c.c.t.d. b) Pentru ca $f(x)=2-\frac{6}{x+1}$ să fie număr întreg trebuie ca $x+1=\pm 6$; $x+1=\pm 1$; $x+1=\pm 2$; $x+1=\pm 3$ (divizorii lui 6). c) Pentru $x\in\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

11. Suma mai multor numere naturale consecutive este 30.Să se afle aceste numere. Cîte soluții sînt? Pot fi numere formate din două cifre?

Rezolvare. Numerele fiind consecutive, un număr par + unul impar este număr impar dar suma lor este 30 număr par deci nu pot fi două numere.

$x+(x+1)+(x+2)=30 \rightarrow x=9$ iar numerele sînt 9, 10, 11.

$x+(x+1)+(x+2)+(x+3)=30 \rightarrow x=6$ iar numerele sînt 6, 7, 8, 9.

$x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)=30.$ Deci numerele sînt 4, 5, 6, 7, 8.

12. Să se determine toate numerele naturale $\neq 0$ care au propietatea: $x^2+y^2+z^2=14$.

Rezolvare. $x^2<14 \rightarrow x<4$, x poate fi 3,2 sau 1 cum 2 și 1 nu verifică → că numărul este 3. $x=3 \rightarrow x^2=9$; $9+y^2+z^2=14 \rightarrow y^2+z^2=5$; $y^2<5 \rightarrow y=2$ sau $y=1$. Obținem tripletele (1,2,3)(1,3,2)(2,1,3)(2,3,1)(3,1,2)(3,2,1).

VII. PROBLEME DE GEOMETRIE REZOLVATE DATE LA CONCURSURI

1. Fie triunghiul dreptunghic ale cărui catete sînt b şi c, iar înălţimea h. a) Să se arate că: $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$. b) Să se arate că dacă triunghiul dat are un unghi de 15° atunci înălţimea dusă din unghiul drept pe ipotenuză este $\frac{1}{4}$ din ipotenuză c) Să se calculeze raza cercului înscris triunghiului ABC cunoscînd ipotenuza şi catetele. Dacă se dă ipotenuza de 10 cm şi raza de 2 cm să se afle catetele.

Fig. VII.1

Rezolvare. a) Triunghiul fiind dreptunghic avem: $c^2b^2=(b^2+c^2)h^2 \to h^2=\frac{c^2b^2}{b^2+c^2} \to \frac{1}{h^2}=\frac{b^2+c^2}{c^2b^2} \to \frac{1}{h^2}=\frac{b^2}{c^2b^2}+\frac{c^2}{c^2b^2}=\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}$ b) Vezi figura VII.1. AM fiind mediană rezultă că ΔAMC isoscel deci $m(\angle AMC)=150^\circ \to m(\angle AMD)=30^\circ$ deci $AD=\frac{1}{2}AM$, dar $AM=\frac{1}{2}BC \to AD=\frac{1}{4}BC$. c) $b^2+c^2=a^2 \to b+c=2r+a \to r=\frac{b+c-a}{2}$.

Caz particular: $BC=10$cm; $r=2$ cm. $x^2+y^2=100$ şi $x+y=10+4$. Dar $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$; $196-2xy=100 \to xy=48$ şi cum $x+y=14$, obţinem $x=8, y=6$.

2. Triunghiul ABC are măsura unghiului cu vîrful în B dublul măsurii unghiului cu vîrful în C. a) Cît de mare poate fi măsura unghiului C? b) Să se arate că bisectoarea unghiului B şi mediatoarea laturii BC sînt concurente în punctul D, ce aparţine laturii AC. c) Ce fel de triunghi este ABC, dacă $[AD]\equiv[DE]$?(E este mijlocul lui BC.)

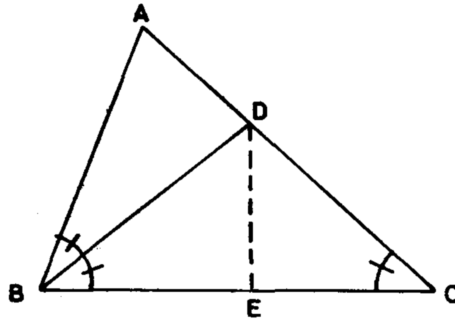


Fig. VII.2

Rezolvare. a) Avem $m(\sphericalangle A)+m(\sphericalangle B)+m(\sphericalangle C)=180^0$, dar prin ipoteză $m(\sphericalangle B)=2m(\sphericalangle C)$ atunci $m(\sphericalangle A)+$ $+3m(\sphericalangle C)=180°$, deci $3m(\sphericalangle C)<180°$ sau $m(\sphericalangle C)<60°$.
b) Triunghiul BDC fiind isoscel rezultă că mediatoarea (fig VII.2) bazei BC trece prin vîrful D. Deci, bisectoarea BD, mediatoarea ED şi AC sînt concurente în D.
c) Punctul D se află pe bisectoarea unghiului B. Deoarece DE este distanţa lui D la latura BC şi în plus avem condiţia $[DE]\equiv[AD]$rezultă că $DA\perp AB$. Deci triunghiul ABC trebuie să fie dreptunghic în A.

3. Fie $ABCD$ $[m(\sphericalangle A)=m(\sphericalangle D)=90°]$ un trapez dreptunghic cu baza mare AB congruentă cu diagonala mică AC şi baza mică DC congruentă cu înălţimea trapezului. a) Să se arate că perpendiculara în C pe BC este bisectoarea unghiului ACD. b) Fie L intersecţia bisectoarei unghiului ACD cu AD. Să se arate că triunghiul BCL este isoscel.

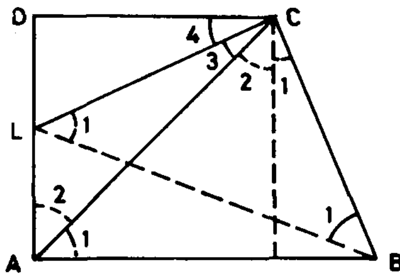


Fig. VII.3

Rezolvare. a) Construim $CL\perp CB$, avem $m(\sphericalangle BCL)=90°$. Ducem $CM\perp AB$ (fig.VII.3). Figura $AMCD$ este un pătrat ; deci $m(\sphericalangle DCM)=90°$. Triunghiul ABC este isoscel deoarece $[AB]\equiv[AC]$ (prin ipoteză). Avem $m(\sphericalangle A_1)=45°$, $m(\sphericalangle ABC)=67°30'$, $m(\sphericalangle MCB)=90°-m(\sphericalangle MBC)=90°-$ $-67°30'=22°30'$. Din $m(\sphericalangle C_1)+m(\sphericalangle C_2)+m(\sphericalangle C_3)=90^0$, deducem că $m(\sphericalangle C_3)=20°30'$, iar din $m(\sphericalangle C_2)+$ $+m(\sphericalangle C_3)+m(\sphericalangle C_4)=90°$, deducem că $m(\sphericalangle C_4)=22°30'$. Rezultă că $m(\sphericalangle C_3)=m(\sphericalangle C_4)$.

4. Fie $ABCD$ un trapez (AB baza mare, DC baza mică,) avînd $AB=10$ cm, $BC=CD=3{,}75$ cm, $AD=5$ cm. Fie E şi F respectiv picioarele înălţimilor duse din D şi C. Se prelungesc laturile neparalele, notînd cu I intersecţia lor. Să se arate că AD şi BC sînt perpendiculare, că $\frac{AD}{BC}=\frac{CF}{BF}$ şi că $DE^2=AE\cdot BF$.

Rezolvare. Ducem din D o paralelă la CB şi notăm cu G intersecţia ei cu AB; obţinem rombul $BCDG$ (fig VII.4) deci $DG=3{,}75$ cm, $GB=3{,}75$ cm şi $AG=6{,}25$ cm. Triunghiul ADG fiind dreptunghic, conform

Fig. VII.4

Fig. VII.5

reciprocei teoremei lui Pitagora, rezultă că $AD \perp DG$; dar $DG || BC$, prin construcție. Avem $AD \perp BC$. Triunghiurile BCF și DAE sînt asemenea, deoarece sînt dreptunghice și au $m(\sphericalangle BCF) = m(\sphericalangle DAE)$ (ca unghiuri cu laturile perpendiculare: $BC \perp AD$, $CF \perp AE$). Rezultă $\frac{BC}{AD} = \frac{CF}{AE} = \frac{BF}{DE}$. Luînd $\frac{CF}{AE} = \frac{BF}{DE}$ și ținînd seama că $[CF] \equiv [DE]$, avem $DE^2 = AE \cdot BF$. Considerînd $\frac{BC}{AD} = \frac{BF}{DE}$ și înlocuind $DE = CF$, obținem $\frac{BC}{AD} = \frac{BF}{CF}$; deci $\frac{AD}{BC} = \frac{CF}{BF}$.

5. Se consideră piramida regulată $VABC$ avînd $[AB] \equiv [BC] \equiv [CA] = a$ și $[VA] \equiv \equiv [VB] \equiv [VC] = b$, $(b > a)$. Se notează cu P proiecția vîrfului A pe muchia VB. Să se calculeze: a) aria triunghiului PAC; b) volumul tetraedului $PAVC$.

Rezolvare. a) Triunghiurile isoscele VAB și VBC sînt congruente (fig.VII.5). De aceea $CP \perp BV$; $[CP] \equiv [AP]$. Rezultă că muchia VB este perpendiculară pe planul APC. Fie VH înălțimea triunghiului VAB, găsim $VH = \sqrt{(VA)^2 - (AH)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$. Scriind aria triunghiului VAB în două moduri diferite deducem: $AP = \frac{AB \cdot VH}{VB} = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$. Fie PQ înălțimea triunghiului isoscel PAG. Obținem: $PQ = \sqrt{AP^2 - AQ^2} = \frac{a}{2b}\sqrt{3b - a^2}$ și deci Aria $\Delta PAC = \frac{1}{2} AC \cdot PQ = \frac{a^2}{4b}\sqrt{3b^2 - a^2}$.

b) Deoarece $VB \perp (APC)$, segmentul VP este înălțime în piramida $PAVC$. Găsim

$$PV = \sqrt{AV^2 - AP^2} = \frac{2b^2 - a^2}{2b} \text{ și deci vol } (PAVC) = \frac{1}{24} \cdot \frac{a^2(2b^3 - a^2)}{b^2}\sqrt{3b^2 - a^2}$$

6. Se dă ΔABC cu aria 96 cm^2. Laturile sale sînt proporționale cu 3, 4, 5. Fie N mijlocul laturii AC și $MN \perp BC$, $N \in AC$. Se cer: a) laturile ΔABC; b) raza cercurilor înscris și circumscris triunghiului ABC; c) volumul piramidei $VABC$, știind că $m(\sphericalangle VBC) = 120°$ și muchiile $[VA] \equiv [VB] \equiv [VC]$.

Rezolvare. a) Aria $\Delta ABC = 96$ cm^2, aria ΔABM = aria ΔAMC (fig.VII.6). Aria ΔMNC este de 4 ori mai mică decît aria ΔABC (s-a micșorat baza de două ori, deci aria ΔMNC este de 4 ori mai mică) $96:4 = 24$cm^2. Dar cum laturile ΔABC sînt proporționale cu 3,4,5 → că laturile lui sînt $4 \cdot 3 = 12$cm; $4 \cdot 4 = 16$ cm; $4 \cdot 5 = 20$ cm.

Fig. VII.6

b) $r=\frac{2\cdot 96cm}{48}=4cm$, $R=\frac{BC}{2}=100cm$;. c) ΔVBC este isoscel cu unghiul de 120^0, $x^2-\frac{x^2}{4}=\frac{3x^2}{4}=100\Rightarrow$ $\Rightarrow 3x^2=400\Rightarrow x^2=\frac{400}{3}\Rightarrow x=\frac{20\sqrt{3}}{3}\Rightarrow VM=\frac{10\sqrt{3}}{3}$ deci volumul piramidei este

$$V_{VABC}=\frac{96\cdot 10\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{96\cdot 10\sqrt{3}}{9}cm^3.$$

7. Fie piramida $VABC$ cu baza triunghiul dreptunghic ABC [m($\sphericalangle A$)=90°], în care unghiul m($\sphericalangle B$)=2m($\sphericalangle C$). Bisectoarea unghiului B intersectează pe AC în punctul D, $DE\perp BC$, $E\in BC$, $BC=2a$. Să se afle aria laterală şi volumul piramidei $VABC$, ştiind că $[VA]\equiv[VB]\equiv[VC]$ şi $VB=2a$.

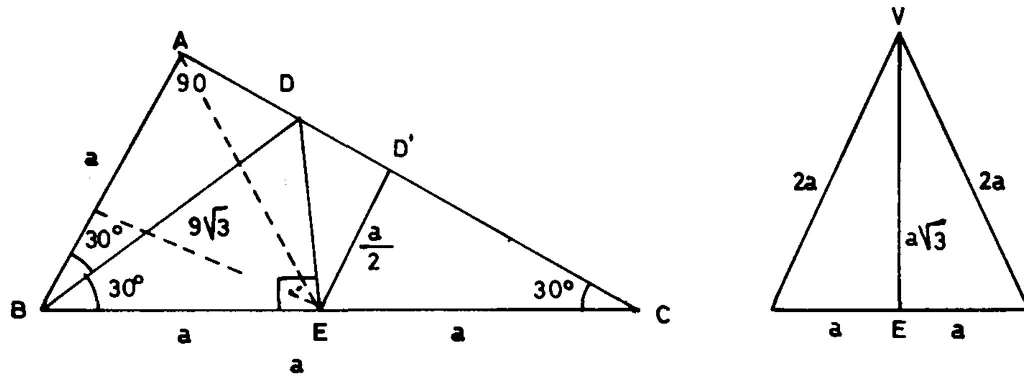


Fig. VII.7

Rezolvare. ΔBDC isoscel, $DE\perp BC$, dar D este pe bisectoarea $BD\rightarrow[DE]\equiv[AD]$; m($\sphericalangle A$)=90°, m($\sphericalangle C$)=30°; m($\sphericalangle B$)=60° (fig.VII.7). Ştim că $[VA]\equiv[VB]\equiv[VC]$, $[AE]\equiv[EC]\equiv[BE]=R$ (raza cercului circumscris ΔABC;(E este mijlocul lui BC). $DE\perp BC$ în Δ isoscel BDC → înălţimea piramidei este $VE=a\sqrt{3}$. Aria laterală şi volumul se află imediat

8. Se dă paralelipipedul dreptunghic $ABCD$ $A'B'C'D'$. Dacă perpendicularele din B,D şi A' pe diagonala AC' sînt concurente în $U\in AC'$, atunci paralelipipedul este un cub.

Rezolvare. In triunghiurile dreptunghice: ABC', $AA'C$ şi ADC avem respectiv (fig.VII.8) $AB^2=AU\cdot AC'$; $A'A^2=AU\cdot AC'$ şi $AD^2=AU\cdot AC'$ → că $[AB]\equiv[A'A]\equiv[AD]$.

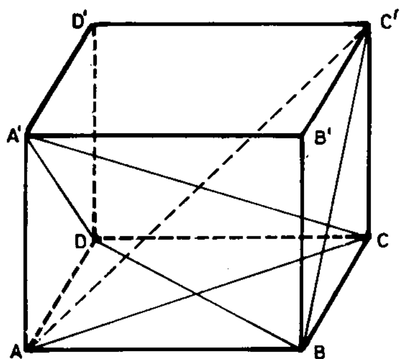


Fig. VII.8

9. Un paralelipiped are toate muchiile egale cu a şi toate feţele romburi cu un unghi de 60°. Să se calculeze volumul paralelipipedului.

Rezolvare. $AA'B'B$ romb cu 60^o (fig.VII.9); $A'AB$ triunghi echilateral. $\Delta A'AB$ fiind echilateral,

$A'N$ =înălţime= $a\frac{\sqrt{3}}{2}$ $AN=\frac{a}{2}$, $AO=2x$ şi $NO=x$,

$m(\sphericalangle OAN)=30^o$, $AO^2-ON^2=\frac{a}{4}$; $4x^2-x^2=\frac{a}{4}\Rightarrow$

$\Rightarrow 12x^2=a^2\rightarrow x^2=\frac{a^2}{12}$; $x=\frac{a}{2\sqrt{3}}\rightarrow AO=2x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$;

$A'A^2-AO^2=A'O^2=a^2-\frac{3a^2}{9}=\frac{6a^2}{9}\Rightarrow A'O=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

$V=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3}=\frac{a^3\sqrt{2}}{2}\text{cm}^3$.

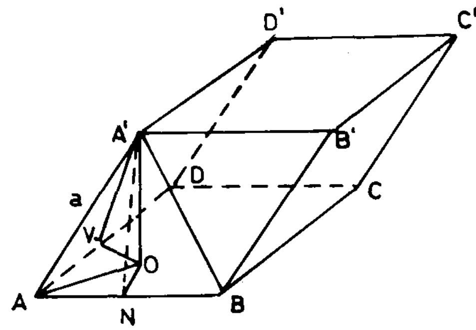


Fig.VII.9

10. Să se arate că suma distanţelor oricărui punct interior la feţele tetraedrului regulat $VABC$ este constantă.

Rezolvare. In cazul unui triunghi echilateral ABC suma distanţelor dintr-un punct luat în interiorul triunghiului la laturile sale este constantă:

Aria $\Delta ABC=\frac{B\cdot H}{2}=\frac{\ell h_1}{2}+\frac{\ell h_2}{2}+\frac{\ell h_3}{2}\Rightarrow \ell h=\ell(h_1+h_2+h_3)\Rightarrow H=h_1+h_2+h_3$, unde B este baza triunghiului, H înălţimea sa, ℓ latura şi h_1, h_2, h_3 distanţele de la punct la laturile triunghiului. In cazul nostru, volumul tetraedului este: $V=\frac{B\cdot H}{3}=\frac{Bh_1}{3}+\frac{Bh_2}{3}+\frac{Bh_3}{3}+\frac{Bh_4}{3}$, unde B este aria bazei, H înălţimea tetraedului iar h_1, h_2, h_3 şi h_4 distanţele de la un punct de pe înălţime la feţele tetraedului. $BH=B(h_1+h_2+h_3+h_4)$ deci suma distantelor $h_1+h_2+h_3+h_4$ este constantă.

11. Fie Ox, Oy, Oz trei semidrepte în spaţiu astfel ca unghiurile dintre aceste semidrepte să fie de 60°. a) Să se arate că una dintre semidrepte are ca proiecţie un segment pe bisectoarea celorlalte două. b) Fie A un punct pe Oz. Notînd $OA=a$ şi cu A' proiecţia lui A pe planul bazei, să se calculeze AA'.

Rezolvare. a) Din A ducem perpendicularele AD şi AE pe Ox şi Oy. (fig.VII.10). Se formează două triunghiuri dreptunghice congruente. Punctul A se proiectează pe bisectoarea OA'. In $\Delta OA'D$ avem $OD=\frac{a}{2}$. Il determinăm pe OA': notăm $A'D=x$, deci

$4x^2-x^2=\frac{a^2}{4}\Rightarrow 12x^2=a^2\Rightarrow x=\frac{a}{2\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

Avem $OA'=2\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. b) In $\Delta OAA'$ dreptunghic în A', avem $A'A^2=a^2-\frac{3a^2}{9}=\frac{6a^2}{9}$, deci $AA'=a\frac{\sqrt{6}}{3}$.

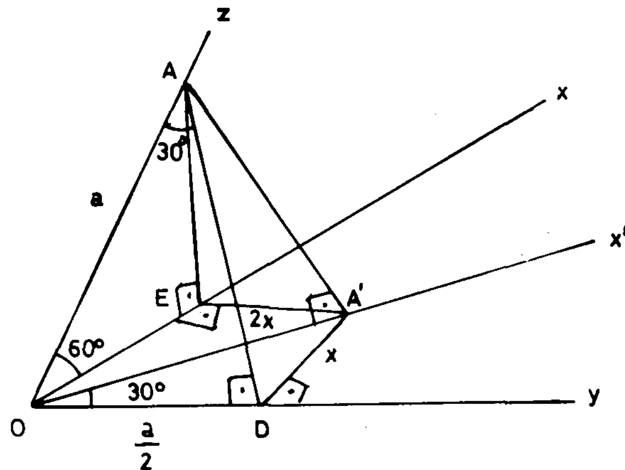


Fig. VII.10

12. Demonstraţi că triunghiul ale cărui laturi satisfac relaţia: $\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}=0$ este isoscel.

Rezolvare. $bc(c-b)+ac(a-c)+ab(b-a)=0 \Rightarrow c^2(b-a)-c(b-a)(b+a)+ab(b-a)=0 \Rightarrow (b-a)(c^2-cb-ac+ab)=(b-a)\cdot[c(c-b)-a(c-b)]=(b-a)(c-b)(c-a)=0 \Rightarrow \begin{cases} b-a=0 \text{ deci } b=a \text{ sau} \\ c-b=0 \text{ deci } c=b \text{ sau} \\ c-a=0 \text{ deci } c=a \end{cases}$

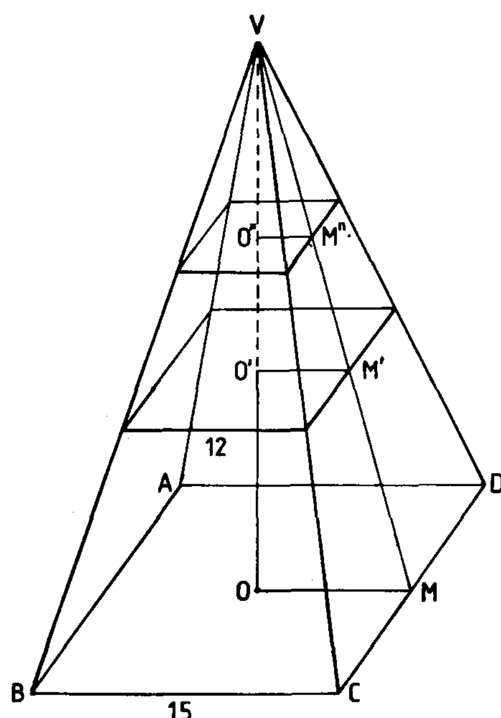


Fig.VII.11

13. Volumul unui trunchi de piramidă patrulateră regulată este de 7 ori mai mare decît volumul unui paralelipiped dreptunghic cu lungimea de 7 dm, lăţimea de 40 cm şi înălţimea de 0,3 m. Inălţimea trunchiului de piramidă este de 4 dm, iar latura bazei mici este de 2,25 ori mai mare decît înălţimea. Să se afle: a) volumul trunchiului; b) latura bazei mari; c) aria laterală a trunchiului; d) la ce distanţă de planul bazei mari trebuie făcută o secţiune paralelă cu bazele astfel ca aria acestei secţiuni să fie 144 dm^2.

Rezolvare. a) $V=7\cdot 84$ dm^3; $\frac{4}{3}(\ell^2+81+\sqrt{\ell^2\cdot 81})=$ $=588$ dm^3; $\ell^2+81+9\ell=441$; $\ell^2+9\ell-360=0 \Rightarrow \ell=$ $=15$ dm (fig.VII.11); d) Fie $VO''=y$, $O'O=x$, atunci din $\Delta VO''M''\sim\Delta VO'M'$ şi $\Delta VO'M'\sim\Delta VOM$ obţinem: $\frac{y}{y+4-x}=\frac{9}{12}$ şi $\frac{y+4-x}{y+4}=\frac{12}{15} \Rightarrow y=12-3x$ şi $5x=y+4$. Deci $x=2$ şi $y=6$.

14. O prismă dreaptă are baza un trapez dreptunghic $ABCD$ cu diagonala $AC\perp BC$; $BC=10$ cm. Linia mijlocie MN a trapezului intersectează diagonalele în P şi Q, $PQ=4$ cm. Inălţimea prismei este de 10cm. Să se calculeze volumul prismei.

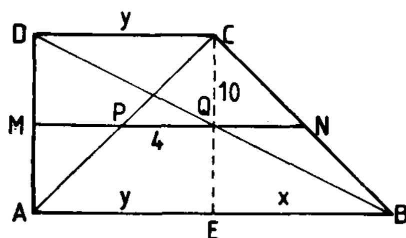


Fig.VII.12

Rezolvare. $MN=\frac{x+2y}{2}$ (fig.VII.12); $PQ=MQ-MP=$ $\frac{x+y}{2}-\frac{y}{2}=\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2}=4$ deci $x=8$. In ΔBCE avem: $CE^2=100-64=$ $=36$; $CE=6$ cm. In ΔABC dreptunghic, aplicăm teorema înălţimii $6^2=x\cdot AE$ deci $36=8\cdot AE$; $AE=y=\frac{36}{8}=4,5$ cm; $AB=4,5+x=12,5$ cm. $DC=4,5$ cm.

Volumul este: $V=\frac{(12,5+4,5)6}{2}\cdot 10=510$ cm^3.

15. Intr-un cerc de rază R se înscrie un triunghi dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A)=90^o$. Arcele AC şi AB sînt invers proporţionale cu numerele 1,(3) şi 0,(6). Pe perpendiculara ridicată în A se ia segmentul $AV=\frac{3R}{2}$. (fig.VII.13). Să se afle: a) măsura arcelor AC şi AB; b) aria ΔVBC c) unghiul dintre planele VBC şi ABC.

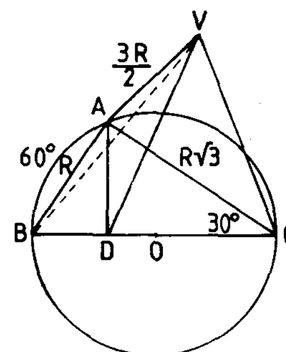


Fig.VII.13

Rezolvare. $1,(3)=1\frac{3}{9}=1\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$; $0,(6)=\frac{2}{3}$. Numerele inverse sînt: $\frac{3}{4}$ şi $\frac{3}{2}$; $\frac{x}{\frac{3}{4}}=\frac{y}{\frac{3}{2}}=\frac{x+y}{\frac{9}{4}}=\frac{180^o}{\frac{9}{4}}=80^o\Rightarrow x=60^o$ şi $y=120^o$. b) Aria $\Delta VBC=\frac{2R\cdot VD}{2}$;

(fig.VII.13); $AD=\frac{R\cdot R\sqrt{3}}{2R}=\frac{R\sqrt{3}}{2}$. In ΔVAD, dreptunghic în A, aplicăm teorema lui Pitagora:

$$VD=\sqrt{\left(\frac{3R}{2}\right)^2+\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2}=R\sqrt{3}.\ \text{Aria } \Delta VBC=R^2\sqrt{3}.\ \text{c) } tg\sphericalangle D=\frac{AV}{AD}=\frac{\frac{3R}{2}}{\frac{R\sqrt{3}}{2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}\Rightarrow \sphericalangle D=60^o.$$

16. O prismă oblică are ca bază un triunghi echilateral ABC cu $AB=4$cm. Faţa $CBB'C'$ este un romb cu un unghi de 60^o şi este perpendiculară pe bază. Se cer volumul şi aria totală a prismei.

Rezolvare. $\Delta C'CB$ este echilateral şi congruent cu ΔABC (fig.VII.14). $C'H^2=12\Rightarrow$ $\Rightarrow C'H=2\sqrt{3}$ cm. $V=\frac{16\sqrt{3}}{4}\cdot 2\sqrt{3}=24$ cm^3. Aria totală este formată din ariile a două triunghiuri echilaterale, două poligoane de arii egale şi aria rombului dat. Aplicînd teorema celor trei perpendiculare obţinem: $C'H\perp HG, HG\perp AC\Rightarrow C'G\perp AC$. Deci $GH^2=HC^2-GC^2=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$ cm. Inălţimea în $AA'C'C$ este : $C'G=\sqrt{3+12}=\sqrt{15}$ cm.
Aria totală $=2(4\sqrt{15})+2(4\sqrt{3})+4\cdot 2\sqrt{3}=$
$=8\sqrt{15}+8\sqrt{3}+8\sqrt{3}=8\sqrt{3}(2+\sqrt{5})$ cm^2.

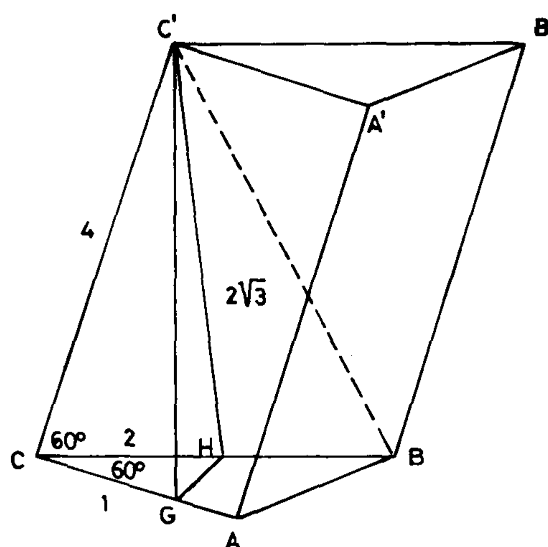


Fig.VII.14

17. Fie $OABC$ o piramidă triunghiulară cu muchiile OA, OB, OC perpendiculare două cîte două şi cu $OA=30$; $OB=40$; $OC=70$.
Să se determine distanţa d de la vîrful O la planul ABC, $O\notin(ABC)$ (fig.VII.15, pag.322).

Rezolvare. Luăm ca bază ΔOAB şi OC înălţimea piramidei (1) $V=\frac{40\cdot 30}{2}\cdot 70\cdot\frac{1}{3}=\frac{A_{\Delta ABC}\cdot d}{3}$.

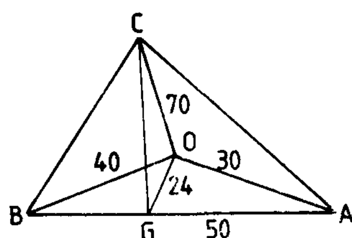


Fig.VII.15

$OG=24$, $CG=\sqrt{70^2+24^2}$. Aria $\Delta ABC=\frac{AB\cdot CG}{2}$. Din egalitatea (1) se determină d.

18. O piramidă are baza $ABCD$ un dreptunghi cu $AB=2a$, $BC=a$ şi înălţimea $SD=2a$ (fig.VII.16). Pe muchia SB se ia la mijlocul ei punctul P. a) Să se arate că ΔAPC este isoscel şi să se afle aria sa. b) Să se afle aria laterală a piramidei.

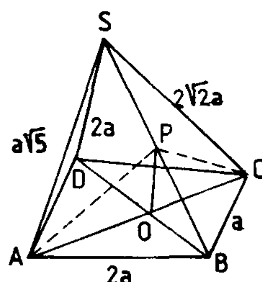


Fig. VII.16

Rezolvare. a) Aplicînd teorema celor trei perpendiculare, obţinem: ΔSAB, ΔSBC triunghiuri dreptunghice cu aceeaşi ipotenuză. Cum AP şi PC sînt mediane în triunghiuri congruente obţinem că ΔAPC este isoscel. In ΔSBD, PO este linie mijlocie, deci $PO=a$. In concluzie: $A_{\Delta APC}=\frac{PO\cdot AC}{2}=\frac{a\cdot a\sqrt{5}}{2}=\frac{a^2\sqrt{5}}{2}$; b) $A_{\Delta SDC}=\frac{2a\cdot 2a}{2}=$ $=2a^2$; $A_{\Delta SCB}=\frac{a\cdot 2a\sqrt{2}}{2}=a^2\sqrt{2}$; $A_{\Delta SAD}=\frac{a\cdot 2a}{2}=a^2$, $A_{\Delta SAB}=$ $=\frac{2a\cdot a\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}a^2$. Aria laterală este $\left(3+\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)a^2$.

19. O piramidă are muchiile laterale congruente şi ele formează cu planul bazei unghiuri de 45°. Baza este un trapez isoscel cu un unghi de 60° iar bazele trapezului sînt de 6 cm şi 8 cm. Să se determine: a) raza cercului circumscris trapezului; b) volumul piramidei.

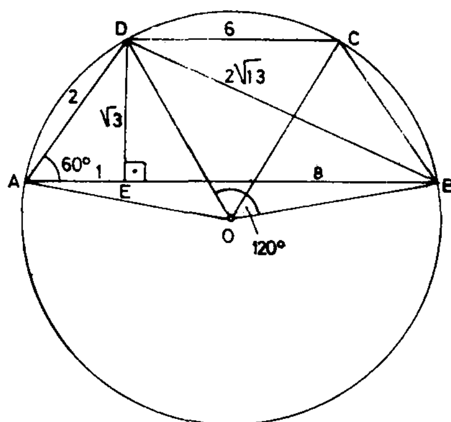


Fig. VII.17.

Rezolvare. a) Cercul are centrul la intersecţia mediatoarelor laturilor trapezului (fig.VII.17). Cum $m(\sphericalangle DAB)=60^\circ$ atunci $m(\sphericalangle BOD)=120^\circ$. In ΔADE dreptunghic în E, avem $AD=2$, $AE=1$, $DE=\sqrt{3}$.

In ΔDEB, dreptunghic în E, avem $BD=\sqrt{DE^2+EB^2}=$ $=2\sqrt{13}$. Aplicînd o consecinţă a teoremei lui Pitagora generalizată şi anume teorema cosinusului obţinem: $BD^2=OB^2+OD^2-2\cdot OB\cdot OD\cdot\cos 120^\circ$; $52=R^2+$ $+R^2-2R^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=3R^2$; $R=\frac{2}{3}\sqrt{39}$ cm. b) Raza cercului circumscris coincide cu înălţimea piramidei deoarece ele formează unghiuri de 45°. Înălţimea piramidei este $\frac{2\sqrt{39}}{3}$ cm. Deci $V=\frac{(8+6)\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{39}}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{14\sqrt{13}}{3}$ cm^3.

20. Pe planul triunghiului dreptunghic isoscel ABC ($AB=AC=a$) ducem perpendiculara $AA'=a$. Din A' ducem o perpendiculară $A'D=a\sqrt{2}$ pe AA'. Să se arate

că triunghiul BCD este echilateral.

Rezolvare. In $\Delta A'AD$ (fig.VII.18) dreptunghic în A, aplicăm teorema lui Pitagora, deci $AD=a\sqrt{3}$. Triunghiurile ADB şi ADC sînt congruente şi dreptunghice respectiv în B şi D, deci:

$BD=\sqrt{AD^2-AB^2}=a\sqrt{2}$ şi $DC=\sqrt{AD^2-AC^2}=a\sqrt{2}$. Deci ΔBDC este echilateral.

21. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic cu $AB=9$ cm, $AD=15$ cm şi $AA'=20$ cm. Se cere distanţa de la vîrful B' la diagonala AD'.

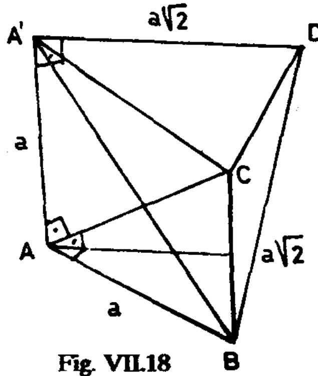


Fig. VII.18

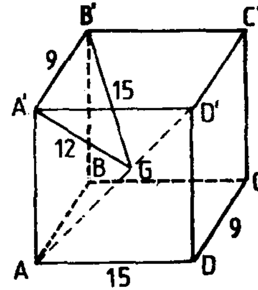


Fig. VII.19

Rezolvare. $\Delta A'D'A$ dreptunghic, obţinem $A'D'^2+A'A^2=AD'^2$ deci $AD'=25$ cm.(fig.VII.19).

Inălţimea $A'G$ în $\Delta AD'A'$ este $A'G=\frac{15\cdot 20}{25}=12$ cm. Iar în $\Delta GA'B'$ dreptunghic în A' avem: $B'G=15$ cm.

22. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile proporţionale cu numerele 2, 3, 5. Ştiind că diagonala paralelipipedului este $2\sqrt{38}$ cm, să se afle dimensiunile paralelipipedului.

Rezolvare. $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}$; $\frac{x^2}{4}=\frac{y^2}{9}=\frac{z^2}{25}=\frac{x^2+y^2+z^2}{38}=\frac{4}{1}$; $\frac{x^2}{4}=\frac{4}{1}\Rightarrow x=4$ cm ; $\frac{y^2}{9}=\frac{4}{1}\Rightarrow y=6$ cm; $\frac{z^2}{25}=\frac{4}{1}\Rightarrow z=10$ cm.

23. Se dă un cub $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cu muchia egală cu a şi se notează cu M mijlocul lui DD_1. Prin diagonala AC şi punctul M se duce un plan ce determină în cub secţiunea ACM. Se cere: a) aria secţiunii ACM. b) tangenta unghiului format de planul secţiunii ACM cu planul $ABCD$. c) Distanţa de la D la planul ACM.

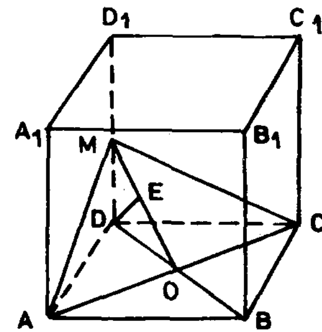


Fig.VII.20

Rezolvare. a) Avem $MD\perp P(ABCD)$, $DO\perp AC$, deci $MO\perp AC$ (fig.VII.20). Din triunghiul MOD calculăm pe MO: $MO=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{2a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Aria triunghiului MAC este $a\sqrt{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$. b) AC este muchia diedrului căci $MO\perp AC$; $DO\perp AC$. Rezultă că MOD este unghiul plan corespunzător unghiului diedru. Prin urmare avem $tg(\sphericalangle MOD)=\frac{MD}{DO}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. c) Planul MAC este perpendicular pe planul MDO, deoarece conţine dreapta AC perpendiculară pe planul MOD. Deci distanţa de la D la planul MAC este înălţimea triunghiului MDO, anume DE: $DE=\frac{MD\cdot DO}{MO}=\frac{a}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{a\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{6}$

VIII. EXERCIŢII DE ALGEBRĂ REZOLVATE PENTRU OLIMPIADE

1. Determinaţi numerele reale x şi y pentru care $x^2+y^2+2a(-x-y+a)\geq 0$.

Rezolvare. Efectuînd calculele şi grupînd termenii obţinem:

$(x^2-a)^2+(y-a)^2 \geq 0$ cum $(x-a)^2 \geq 0$ şi $(y-a)^2 \geq 0$ atunci $x=y=a$.

2. Să se arate că dacă a,b,c, sînt laturile unui triunghi atunci satisfac relaţia:

$$a^2b^2+c^4-b^4-a^2c^2=0.$$

Rezolvare. $a^2b^2-a^2c^2+(c^2-b^2)(c^2+b^2)=a^2(b^2-c^2)+(c^2-b^2)(c^2+b^2)=0 \Rightarrow a^2(b^2-c^2)-(b^2-c^2)(c^2+b^2)=0 \Rightarrow (b^2-c^2)(a^2-c^2-b^2)=0 \Rightarrow a^2-c^2-b^2=0 \Rightarrow a^2=b^2+c^2$ deci triunghiul este dreptunghic sau din $b^2-c^2=0 \Rightarrow b=c$ deci triunghiul este isoscel.

3. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia: $2x^2+5xy+3y^2-21=0$.

Rezolvare. $2x^2+3xy+2xy+3y^2=21 \Rightarrow 2x(x+y)+3y(x+y)=21 \Rightarrow (2x+3y)(x+y)=21=3\cdot 7=21\cdot 1$.

Deci $\begin{cases} 2x+3y=7; \\ x+y=3. \end{cases} \Rightarrow x=2, y=1$. Cazul $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+3y=21 \end{cases}$ nu convine.

4. Se consideră polinomul $B(x)=x^6-x^5-2x^2+3x-1$; $x\in\mathbf{R}$ şi un polinom $A(x)$ de gradul 100 care are suma coeficienţilor egală cu 50. Să se găsească suma coeficienţilor restului împărţirii lui $A(x)$ la $B(x)$.

Rezolvare. $A(x)=(x^6-x^5-2x^2+3x-1)\cdot C(x)+R(x)$; $A(1)=0\cdot C(1)+R(1)=0+R(1)=50$.

5. Se dau expresiile:

$E_1=a^2(x+1)+2(2b^2x+2b^2+x)+2$; $E_2=(ax+b)^2-(x+2)^2$, $a\in\mathbf{R}$, $b\in\mathbf{R}$, $x\in\mathbf{R}$.

a) Să se arate că nu există nici un număr a sau b astfel ca E_1 să nu depindă de x.

b) Pentru ce numere a şi b, $E_2=0$ şi pentru ce numere x, $E_1=0$?

Rezolvare. a) $E_1=(a^2+4b^2+2)x+a^2+4b^2+2$; se observă că pentru orice $a\in R$ şi $b\in R$, $a^2+4b^2+2\neq 0$, deci E_1 depinde de x; b) $E_1=(a^2+4b^2+2)(x+1)$, iar $E_1=0$ pentru $x+1=0$, adică pentru $x=-1$ oricare ar fi a şi b. $E_2=[(a+1)x+b+2][(a-1)x+b-2]$, iar $E_2=0$ dacă $(a+1)x+b+2=0$ sau $(a-1)x+b-2=0$ deci $a=-1$ şi $b=-2$, iar $x(a-1)+(b-2)$ este adevărată pentru orice x cînd $a=1$ şi $b=2$.

6. Să se determine toate perechile de numere (x, y) întregi care verifică ecuaţia:

$$x^2-xy+y^2=x+y.$$

Rezolvare. Ecuaţia poate fi scrisă: $x^2-xy+y^2-x-y=0$. Se înmulţeşte cu 2 şi apoi se adună şi se scade cifra 2 ca să obţinem o sumă de pătrate. Rezultă $2x^2-2xy+2y^2-2x-2y+2=2$ care poate fi scrisă: $x^2+x^2-2xy+y^2+y^2-2x-2y+1+1=2$; $(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=2$. Deoarece $x, y\in\mathbf{Z} \Rightarrow x-y$, $x-1$, $y-1\in \mathbf{Z}$ şi deci $(x-y)^2$, $(x-1)^2$, $(y-1)^2\in \mathbf{N}$.

Din aceasta rezultă următoarele posibilităţi:

$(x-y)^2+(y-1)^2+(x-1)^2=2$	Mulţimea soluţiilor (x,y)	(x,y)
1 + 1 + 0 =2	(0, 1)	(2, 1)
1 + 0 + 1 =2	(1, 0)	(1, 2)
0 + 1 + 1 =2	(0, 0)	(2, 2)

7. Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţia:

$$2x^2+y^2+2y+1=0.$$

Rezolvare: $2x^2+y^2+2y+3-2=0 \Rightarrow (x+1)^2+(x-1)^2+(y+1)^2=2$. Rezultă următoarele posibilităţi:

$$(x+1)^2+(x-1)^2+(y+1)^2=2$$

$$0 + 1 + 1 = 2$$

$$1 + 0 + 1 = 2$$

$$1 + 1 + 0 = 2.$$

8. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia: $\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}=\frac{1}{4}$.

Rezolvare. $6y+4x=3xy$; $4x<3xy$; $3y>4$; $y>1\frac{1}{3}$; $6y<3xy \Rightarrow 3x>6 \Rightarrow x>2$. Soluţiile sînt: $x=3, y=4$ şi $x=6, y=2$.

9. Să se găsească rădăcinile întregi ale ecuaţiei $x^4+y^4+2=4xy$.

Rezolvare. $x^4+y^4+2=4xy$ se adună $2x^2y^2$ şi se scade $2x^2y^2$ şi obţine: $x^4-2x^2y^2+y^4+2x^2y^2-4xy+2=0$; $(x^2-y^2)^2+2(xy-1)^2=0 \Rightarrow x^2-y^2=0$ şi $xy-1=0 \Rightarrow (x,y)\in\{(-1;-1),(1,1)\}$.

10. Să se afle $a,b\in\mathbf{Z}$ astfel încît suma coeficienţilor polinomului

$$P(x)=a(1-b)\,(3x^2-4)^{k+1}-b(1-2x)^k-a(2x-3x^2)^{k+2}+1 \text{ să fie zero.}$$

Rezolvare. $P(1)=a(1-b)\,(-1)^{k+1}-b(-1)^k-a(-1)^{k+2}+1=0$. Dacă k este par obţinem: $-a(1-b)-b-a+1=0$; $-2a+ab-b+1=0 \Rightarrow ab-2a-b+2-1=0 \Rightarrow (a-1)(b-2)=1$. $a-1=\pm1 \Rightarrow a=2, a=0$; $b-2=\pm1 \Rightarrow b=3, b=1$. Dacă k este impar obţinem $a=-2$, $b=1$ şi $a=4$, $b=3$.

11. Segmentele de lungimi a,b,c care satisfac relaţia:

I. $a^2+2(b^2+c^2)=2a(b+c)$ pot fi laturile unui triunghi ?

II. Dar cele ce satisfac relaţia: $2a^2+b^2+c^2=2a(b+c)$?

Rezolvare. I. $a^2+b^2+b^2+c^2+c^2-2ab-2ac=0$, adunăm şi scădem $2bc$ şi obţinem $(a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc)+(b^2+c^2-2bc)=0 \Rightarrow (a-b-c)^2+(b-c)^2=0 \Rightarrow a-b-c=0 \Rightarrow a=b+c$ şi $b-c=0$ deci $b=c$. Ca segmentele să fie laturile unui triunghi trebuie ca $a<b+c$ deci I contrazice.

II. $a^2+b^2+a^2+c^2-2ab-2ac=0 \Rightarrow (a^2+b^2-2ab)+(a^2+c^2-2ac)=0 \Rightarrow (a-b)^2+(a-c)^2=0 \Rightarrow a-b=0$; $a=b$ şi $a-c=0 \Rightarrow a=c$ deci triunghiul este echilateral.

12. Fie a,b,c numere reale pozitive, diferite două cîte două. Demonstraţi că dacă $a-b=\frac{b-c}{ab}$, $b-c=\frac{c-a}{ac}$ şi $c-a=\frac{a-b}{ab}$ atunci $a=b=c$, $a^2b^2c^2=1$.

Rezolvare. $\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{a^2b^2c^2}=(a-b)(b-c)(c-a)$;

$a^2b^2c^2(a-b)(b-c)(c-a)=(b-c)(c-a)(a-b) \Rightarrow a^2b^2c^2=1$.

13. Să se arate că: $(a^2+b^2)c+(b^2+c^2)a+(c^2+a^2)b \geq 6abc$.

Rezolvare. $\frac{(a^2+b^2)c}{abc}+\frac{(b^2+c^2)a}{abc}+\frac{(c^2+a^2)b}{abc} \geq 6\frac{abc}{abc} \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{b^2+c^2}{bc}+\frac{c^2+a^2}{ac} \geq 6$ dar $\frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2$; $\frac{b^2+c^2}{bc} \geq 2$ şi $\frac{c^2+a^2}{ac} \geq 2$ şi inegalitatea este verificată. Se poate utiliza şi relaţia $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$.

14. Să se arate că: $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

Rezolvare. Expresia devine: $abc+ac^2+b^2c+bc^2+a^2b+a^2c+ab^2+abc \geq 8abc$. Prin împărţire cu abc se obţine $1+1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geq 8$, deoarece ştim că $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$.

15. Dacă $a+b=2$ să se arate că $a^2+b^2>2$.

Rezolvare. $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$; $4-2ab>2$ adică $2-ab>1$; $-ab>-1$; $ab<1$. Dacă din 4 scădem $2ab<2$ obţinem un număr mai mare ca 2

16. Se consideră expresia raţională: $f(x)=\frac{x^4+y^4-2x^8+(x+y)^4}{x^2-x^4+y^2+xy}$.

a) Să se aducă $f(x, y)$ la forma cea mai simplă. b) Să se arate că $f(x, y) \geq 0$.

Rezolvare. a) $x^4+y^4+(x+y)^4-2x^8=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2+(x+y)^4-2x^8=[(x+y)^2-2xy]^2-2x^2y^2+$ $+(x+y)^4-2x^8=(x+y)^4-4xy(x+y)^2+4x^2y^2-2x^2y^2+(x+y)^4-2x^8=2(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2-2x^8=2[(x+y)^4$ $-2xy(x+y)^2+x^2y^2]-2x^8=2[(x+y)^2-xy]^2-2x^8$.

$$f(x,y)=\frac{2[(x+y)^2-xy-x^4][(x+y)^2-xy+x^4]}{x^2-x^4+y^2+xy}=\frac{2(x^2+2xy+y^2-xy-x^4)(x^2+2xy+y^2-xy+x^4)}{(x^2-x^4+y^2+xy)}=2(x^4+x^2+y^2+xy).$$

b) Cum $f(x,y)=2(x^2+xy+y^2+x^4)=2y^2\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}+1\right]+2x^4$ atunci $f(x,y) \geq 0$ pentru orice $x,y \in \mathbf{R}$, deoarece avem $2x^4>0$ şi $2y^2>0$, iar în paranteza dreaptă notînd $\frac{x}{y}=t$ obţinem un trinom de gradul doi în t, avînd discriminantul negativ (deci în acest caz trinomul este strict pozitiv, deoarece păstreaza semnul coeficientului lui t^2.)

17. Folosindu-se diagrama funcţiei, să se determine numărul tuturor funcţiilor definite pe mulţimea (1,2) cu valori în (3,5).

R. 4.

18. Fie funcţia $f:\mathbf{R}-\mathbf{R}$ definită astfel: $f(x)=\begin{cases} 3x-4 & \text{dacă } x<-1 \\ -7 & \text{dacă } -1 \leq x<3 \\ -3x+2 & \text{dacă } x \geq 3 \end{cases}$

Să se determine $f(-2)$; $f(-1)$; $f(2)$; $f(4)$.

R. $f(-2)=-10$; $f(-1)=f(2)=-7$; $f(4)=-10$.

19. Fie funcţia $f:\mathbf{Z}\to\{0,1,2,3,4,5\}$ definită astfel: $f(x)$ este restul împărţirii lui x la 6. Să se determine $f(-12)$, $f(-9)$, $f(3)$, $f(9)$, $f(272)$.

Rezolvare. Ştim că $D=I\cdot C+r$. Pentru numerele x şi 6 există $p\in\mathbf{Z}$ astfel încît $x=6p+f(x)$ şi $0<f(x)<6$. De aici pentru $x=-12$, se obţine $p=-2$ şi deci $f(-12)=0$, pentru $x=-9$, avem $-9=6(-2)+3$ deci $f(-9)=3$. La fel obţinem $f(3)=(9)=3$ şi $f(272)=2$.

20. Există un număr întreg m astfel încît să existe funcţia f: $A=\{1,2,3\}\to B=\{1,2,3\}$ definită după formula $f(x)=x^2+m$?

Rezolvare. Presupunem că există o astfel de funcţie, atunci $f(1)=1+m$; $f(2)=4+m$; $f(3)=9+m$. Dacă $f(1)=1\Rightarrow m=0$; în acest caz $f(2)=4$ şi $f(3)=9$, dar 4 şi 9 nu aparţin mulţimii B. Dacă $f(1)=2\Rightarrow 1+m=2$; $m=1$; în acest caz $f(2)=5$ şi $f(3)=10$, dar 5 şi 10 nu aparţin mulţimii B. Considerînd şi cazul $f(1)=3\Rightarrow 1+m=3$; $m=2$, $f(2)=6$ şi $f(3)=11$. Deci nu există un număr întreg m care să îndeplinească condiţiile cerute.

21. Se dă $f(x)=(x^2+2x+2)^2-x$. a) Să se arate că oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$, $f(x)$ este pozitivă. b) Să se scrie $f(x)$ ca produs de factori fără a utiliza radicalul. c) Pentru ce valori ale lui $x\in\mathbf{R}$, $f(x)=0$?

Rezolvare. $f(x)=(x^2+x+x+1+1)^2-x=(x^2+x+1+x+1)^2-x=(x^2+x+1)^2+2(x^2+x+1)(x+1)+(x+1)^2-x=(x^2+x+1)(x^2+3x+4)$. Pentru ca $f(x)$ să fie zero $\Rightarrow x^2+x+1=0$ sau $x^2+3x+4=0$.
Dar nici una din ecuaţiile obţinute nu are soluţii în mulţimea numerelor reale $\Rightarrow f(x)$ nu poate fi zero. Cum $x^2+x+1>0$ şi $x^2+3x+4>0$, $(\forall)x\in\mathbf{R}\Rightarrow f(x)>0$.

22. Să se determine legătura dintre rădăcinile ecuaţiilor $ax^2+bx+c=0$ şi $cx^2+bx+a=0$.

Rezolvare. $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$; $x'_1+x'_2=\frac{-b}{c}$; $x_1x_2=\frac{c}{a}$; $x'_1x'_2=\frac{a}{c}$; $x_1x_2+x'_1x'_2=\frac{c}{a}+\frac{a}{c}>2$.

23. Fără a rezolva ecuaţia să se găsească suma pătratelor rădăcinilor ecuaţiei: $(x^2+2x)^2-5(x^2+2x)+3=0$.

Rezolvare. Se notează $x^2+2x=y$ (1) şi se obţine $y^2-5y+3=0$, care are două radăcini $y_1=\frac{5+\sqrt{13}}{2}$ şi $y_2=\frac{5-\sqrt{13}}{2}$.

Inlocuind în ecuaţia (1) valoarea lui y_1, obţinem : $x^2+2x-\frac{5+\sqrt{13}}{2}=0\Rightarrow 2x^2+4x-(5+\sqrt{13})=0$.

$$\left.\begin{aligned} &x_1+x_2=-2\\ &x_1x_2=-\frac{5+\sqrt{13}}{2}\end{aligned}\right\}\ x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=9+\sqrt{13}$$

Inlocuind în ecuaţia (1) valoarea lui y_2 obţinem : $x^2+2x-\frac{5-\sqrt{13}}{2}=0\Rightarrow 2x^2+4x-5+\sqrt{13}=0$.

$$\left.\begin{aligned} &x_3+x_4=-2\\ &x_3x_4=\frac{\sqrt{13}-5}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow x_3^2+x_4^2=(x_3+x_4)^2-2x_3x_4=9-\sqrt{13}$$

Deci: $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=18$.

24. Să se determine mulţimile A şi B şi numerele reale p şi q ştiind că: $A=\{x\in R/\ x^2+x+p=0\}$; $B=\{x\in R/\ x^2+qx-4=0\}$ şi $A\cup B=\{-2,-1,1,4\}$.

Rezolvare. $x_1+x_2=-1$; $x_1x_2=p$. Din $x_1+x_2=-1$ rezultă că $x_1=-2$ şi $x_2=1$ iar $p=x_1x_2=-2$. Referindu-ne la mulţimea B avem: $x'_1+x'_2=-q$ şi $x'_1x'_2=-4$ $\Rightarrow$ $x'_1=-1$ şi $x'_2=4$ atunci $x'_1+x'_2=3=-q \Rightarrow q=-3$. Deci $A=\{-2,1\}$ şi $B=\{-1,4\}$.

25. Arătaţi că oricare ar fi numerele reale m, n şi p cu $m\neq n$ ecuaţia $(m-n)x^2+2(n-p)x+p-m=0$ are soluţii reale. Ce se întîmplă dacă $m=n$?

Rezolvare. $\Delta=(n-p)^2-(m-n)(p-m)=n^2-2np+p^2-mp+m^2+np-mn$ $\Rightarrow$ $n^2-np+p^2-mp+m^2-nm>0$, deoarece amplificînd această inegalitate cu 2 obţinem $n^2+n^2-2np+p^2+p^2-2mp+m^2+m^2-2nm=(n-p)^2+(n-m)^2+(p-m)^2>0$.

26. Dacă x şi y satisfac relaţia $ax^2+2bxy+cy^2=0$, să se determine $\frac{x}{y}$ $(y\neq 0)$.

Rezolvare. $\frac{ax^2}{y^2}+2b\frac{xy}{y^2}+\frac{cy^2}{y^2}=0$, notăm $\frac{x}{y}=z$ şi avem ecuaţia $az^2+2bz+c=0$.

27. Să se determine valorile parametrului m astfel încît ecuaţia $x^2-6x+m=0$ să aibă două rădăcini reale dintre care una să fie dublul celeilalte.

R. $\Delta=36-4m=0$; $m=8$.

28. Să se arate că $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ este iraţional.

Rezolvare. In triunghiul dreptunghic ABC luăm $AB=\sqrt{2}$ şi $AC=\sqrt{3}$, atunci ipotenuza este $\sqrt{5}$. Suma a două numere iraţionale $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ este un număr iraţional.

29. Să se arate că oricare ar fi numărul întreg n suma $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}$ se reprezintă printr-o fracţie periodică.

Rezolvare. $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}=\frac{3(n+1)^2-1}{n(n+1)(n+2)}$. Numitorul este produsul a trei numere consecutive care este divizibil cu 3 iar numărătorul nu este divizibil cu 3 rezultă că fracţia este număr periodic mixt.

30. Să se determine numerele naturale x şi y care verifică relaţia $x^2-y^2=135$.

Rezolvare. $x^2-y^2=5\cdot 27$; $(x+y)(x-y)=5\cdot 27 \Rightarrow x+y=27; x-y=5 \Rightarrow x=16; y=11$.

31. Să se afle rădăcinile întregi ale ecuaţiei: $x^4+y^4+2=4xy$.

Rezolvare. $x^4+y^4-4xy+2=0$. Se adună şi se scade $2x^2y^2$ şi se obţine: $(x^2-y^2)^2+2(xy-1)^2=0 \Rightarrow x=1, y=1; x=-1, y=-1$.

32. Să se rezolve ecuaţia: $\sqrt{\frac{18x}{x+2}}+\sqrt{\frac{x+2}{18x}}=2$.

R. Se notează $y=\sqrt{\frac{18x}{x+2}}$ şi se obţine $x=\frac{2}{17}$.

33. Să se rezolve ecuaţia: $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$.

Indicație. Notăm $u=\sqrt[4]{97-x}$, $v=\sqrt[4]{x}$ și obținem $u+v=5$; $u^4+v^4=97$. Dar
$u^4+v^4=(u^2+v^2)^2-2u^2v^2=[(u+v)^2-2uv]^2-2u^2v^2 \Rightarrow 97=(25-2uv)^2-2u^2v^2 \Rightarrow u^2v^2-50uv+264=0$.
Se află u și v apoi se determină x.

R. $x_1=16; x_2=81$.

34. Să se afle restul și cîtul împărțirii polinomului $P(x)=x^4-x^3+3x^2-1$ la polinomul x^2-3x+2 fără a efectua împărțirea.

Rezolvare. $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$. Se calculează: $P(1)$ și se obține restul 2, iar pentru $P(2)$ se obține restul 19. Restul este de forma $ax+b$. Se obține $a+b=2$ și $2a+b=19 \Rightarrow a=17$, $b=-15$. Deci restul este $17x-15$.

35. Să se determine funcțiile f și g, $f(x)=ax+b$ și $g(x)=\frac{1-a}{2}x+C$, $a<0$, știind că cele două drepte sînt perpendiculare în punctul de coordonate $M(0,1)$.

Rezolvare. 1) $ax+b=f(x)$ trece prin punctul de coordonate (0,1) obținem $a\cdot 0+b=1 \Rightarrow b=1$.
2) $\frac{1-a}{2}\cdot x+C=g(x)$; $0+C=1 \Rightarrow C=1$, deoarece și a doua dreaptă trece prin $M(0,1)$. Inlocuim $a=x$ în $g(x)$ și obținem $\frac{(1-a)a}{2}+1=g(a)$; $a(a-1)=2$ și cum $a<0 \Rightarrow a=-1$. Deci $f(x)=-x+1$ și $g(x)=x+1$.

36. Să se determine numărul a astfel ca polinomul $P(x)=x^{20}+x^{16}+x^{12}+x^8+x^4+a$ să fie divizibil cu $Q(x)=x^3+x^2+x+1$.

Rezolvare. $x^3+x^2+x+1=(x+1)(x^2+1)$; $P(-1)=5-a=0$, $a=5$.

37. Scrieți numerele naturale 13 și 31 ca diferențe de pătrate de numere naturale, generalizați pentru orice număr impar.

Rezolvare. $(x-y)(x+y)=13 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-y=1 \\ x+y=13 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x=14 \Rightarrow x=7, y=6$. $x-y=13$ și $x+y=1$ nu are soluții naturale. Se procedează similar și pentru 31. Pentru cazul general se ține seama că un număr este par iar altul impar și unul este cu o unitate mai mic ca celălalt.

38. Se știe că $x^2-y^2+2yz-z^2=40$ și $x-y+z=2$.
a) Să se calculeze $x+y-z$. b) Să se determine valoarea lui x.

Rezolvare. $x^2-(y-z)^2=40 \Rightarrow (x-y+z)(x+y-z)=40$; $2(x+y-z)=40 \Rightarrow x+y-z=20$, deci $x=11$.

39. Să se determine x și y numere întregi astfel încît $x-y=48$ și $\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}=18$.

R. $x=49, y=1$.

40. Fie polinomul
$P(X)=X^2+(X+2)^2+(X+4)^2+...+(X+98)^2-[(X+1)^2+(X+3)^2+...+(X+99)^2]$.
Să se determine $x\in\mathbf{R}$ pentru care $P(x)>0$.

Rezolvare. Grupînd convenabil urmează:
$P(x)=[x^2-(x+1)^2]+[(x+2)^2-(x+3)^2+...+[(x+98)^2-(x+99)^2]=(x-x-1)(x+x+1)+(x+2-x-3)(x+2+x+3)+...+(x+98-x-99)(x+98+x+99)=-(2x+1+2x+5+2x+9+...+2x+197)=-50\cdot 2x-(1+5+9+...+197)=$
$=-50(2x+99)$. Deci $-50(2x+99)>0 \Rightarrow x<-\frac{99}{2} \Rightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{99}{2}\right)$.

41. Să se arate că ecuația $x^3+y^3=x+y+1987$ nu are soluții în mulțimea numerelor întregi, **Z**.

Rezolvare. Ecuaţia din enunţ se mai poate scrie:

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)-(x+y)=1\,987 \leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2-1)=1\,987.$$

Notăm $x+y=S$ şi $xy=P$; atunci $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=S^2-2P$. Cu acestea, ecuaţia devine:

$$S(S^2-2P-1)=1\,987, (1).$$

Deoarece x şi y sînt numere întregi rezultă că S şi P sînt numere întregi. Ţinînd seama că 1 987 este număr prim, din (1) rezultă următoarele cazuri:

a) $\begin{cases} S=1 \\ S^2-3P-1=1\,987 \end{cases}$ b) $\begin{cases} S=1\,987 \\ S^2-3P-1=1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} S=-1 \\ S^2-3P-1=-1\,987 \end{cases}$ d) $\begin{cases} S=-1\,987 \\ S^2-3P-1=-1. \end{cases}$

Din a) deducem $P=-\dfrac{1\,987}{3}$ care nu e număr întreg, deci sistemul a) nu are soluţii în mulţimea $\mathbf{Z}$.

Din b) deducem $3P=S^2-2$; dar $S=1\,987=3\cdot 662+1$ adică $S=M3+1$. Prin urmare:

$$P=\frac{S^2-2}{3}=\frac{(M3+1)^2-2}{3}=\frac{M3+1-2}{3}=\frac{M3-1}{3}.$$

42. Aflaţi numerele pătrate perfecte de forma $4n^2-35$, $n\in\mathbf{N}$.

Rezolvare. Fie p^2 numărul natural căutat. Avem $4n^2-35=p^2$, $p,n\in\mathbf{N}$, de unde: $4n^2-p^2=35 \leftrightarrow (2n-p)(2n+p)=1\cdot 5\cdot 7$. Deoarece $2n-p<2n+p$ putem avea următoarele două cazuri:

$\begin{cases} 2n-p=5 \\ 2n+p=7 \end{cases}$ sau $\begin{cases} 2n-p=1 \\ 2n+p=35 \end{cases}$, cu soluţiile $n=3, p=1$ sau $n=9, p=17$. Deci numerele căutate sînt 1 şi 289.

43. Să se rezolve în numere naturale ecuaţia: $3x^2+2xy+3y^2=664$.

Rezolvare. Ecuaţia dată se mai poate scrie $2(x+y)^2+(x-y)^2=664$.

Notăm: $x+y=u$ şi $x-y=v$; $u,v\in\mathbf{N}$, (1). Urmează: $2u^2+v^2=664$. Rezultă că $v=2v_1$, $v_1\in\mathbf{N}$ adică ecuaţia devine: $u^2+2v_1^2=332 \Rightarrow u=2u_1, u_1\in\mathbf{N}$. Deci $2u_1^2+v_1^2=166 \Rightarrow v_1=2v_2, v_2\in\mathbf{N}$ adică $u_1^2+2v_2^2=83$. Dar: $0\le u_1\le 9$, iar pe de altă parte u este un număr natural impar. Deci: $u_1\in\{1,3,5,7,9\} \Rightarrow 2v_2^2\in\{82,74,58,34,2\} \Rightarrow v_2^2\in\{41,37,29,17,1\}$. Dar singurul pătrat este 1. Prin urmare deoarece $v_2\in\mathbf{N}$, $v_2=1$ şi $u_1=9$ implică $v_1=2$, rezultă că $u=18$ şi $v=4$. Din relaţia (1) urmează: $x+y=18$, $x-y=4$, adică $x=11$ şi $y=7$.
Dar ecuaţia dată este simetrică în x şi y prin urmare mai admite şi soluţia $x=7$ şi $y=11$.

44. Determinaţi cel puţin trei numere raţionale x, care nu sînt întregi, pentru care numărul $\sqrt{x-x^2}$ este raţional şi arătaţi că există oricît de multe numere raţionale x pentru care numărul $\sqrt{x-x^2}$ este raţional.

Rezolvare. Numerele raţionale căutate trebuie să fie situate în intervalul (0,1), (deoarece $x-x^2\ge 0$) şi nu trebuie să fie întregi.

De exemplu: $x=\frac{1}{2}, x=\frac{1}{5}, x=\frac{1}{10}$.

Fie $t\in\mathbf{Q}_+$. Notăm $\sqrt{x-x^2}=tx \Rightarrow x-x^2=t^2x^2 \Rightarrow 1-x=t^2x \Rightarrow x=\frac{1}{1+t^2}$.

45. Numărul real a fiind fixat, să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2x(y-a)=1 \\ 2y(z-a)=1 \\ 2z(u-a)=1 \\ 2u(x-a)=1 \end{cases}.$$

Rezolvare. Eliminînd din primele două ecuaţii necunoscuta y şi din ultimile două ecuaţii necunoscuta x obţinem sistemul:

$$\begin{cases} \frac{1}{2(z-a)}-\frac{1}{2x}=a \\ \frac{1}{2(x-a)}-\frac{1}{2z}=a \end{cases}$$

Eliminînd din acest sistem necunoscuta z, obţinem ecuaţia: $2x^2-2ax-1=0$ cu soluţiile $x_1=\frac{a+\sqrt{2+a^2}}{2}$ şi $x_2=\frac{a-\sqrt{2+a^2}}{2}$. In final obţinem soluţiile: $x=y=z=u=\frac{a+\sqrt{2+a^2}}{2}$ şi $x=y=z=u=\frac{a-\sqrt{2+a^2}}{2}$.

46. Determinaţi numerele întregi n astfel încît numărul $n^2+9n+14$ să fie pătratul unui alt număr întreg.

Rezolvare. Fie $k\in\mathbf{Z}$ astfel încît $n^2+9n+14=k^2 \Rightarrow 4n^2+36n+56=4k^2 \Leftrightarrow (2n+9)^2-4k^2=25 \Leftrightarrow (2n+9-2k)(2n+9+2k)=25$. Dar divizorii întregi ai numărului 25 sînt $-1,-5,-25,1,5,25$, deci distingem mai multe cazuri:

$$\begin{cases} 2n+9-2k=1 \\ 2n+9+2k=25 \end{cases} \Rightarrow 4n+18=26 \Leftrightarrow n=2;\ (n^2+9n+14=36).$$

Cazurile $\begin{cases} 2n+9-2k=-1 \\ 2n+9+2k=-25 \end{cases}$, $\begin{cases} 2n+9-2k=5 \\ 2n+9+2k=5 \end{cases}$ şi $\begin{cases} 2n+9-2k=-5 \\ 2n+9+2k=-5 \end{cases}$ se tratează analog şi în final, obţinem $n\in\{-11;-7;-2;2\}$.

47. Să se demonstreze că ecuaţia $\left[\frac{3x+1}{2}\right]+\left[\frac{3x+2}{2}\right]=6$ nu are soluţii întregi, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Rezolvare. Presupunem că $x=a\in\mathbf{Z}$ este o soluţie a ecuaţiei. Deosebim două cazuri:

1) $a=2p, p\in\mathbf{Z}$. Ecuaţia devine: $\left[\frac{6p+1}{2}\right]+\left[\frac{6p+2}{2}\right]=6 \Leftrightarrow \left[3p+\frac{1}{2}\right]+[3p+1]=6 \Leftrightarrow 3p+3p+1=6 \Leftrightarrow 6p=5 \Leftrightarrow p=\frac{5}{6}$, ceea ce contrazice ipoteza că $p\in\mathbf{Z}$.

2) $a=2p+1, p\in\mathbf{Z}$. Ecuaţia devine:

$\left[\frac{6p+4}{2}\right]+\left[\frac{6p+5}{2}\right]=6 \Leftrightarrow [3p+2]+\left[3p+2+\frac{1}{2}\right]=6 \Leftrightarrow 3p+2+3p+2=6 \Leftrightarrow 6p=2 \Leftrightarrow 3p=1 \Leftrightarrow p=\frac{1}{3}$, ceea ce contrazice

ipoteza că $p\in\mathbb{Z}$. Deci nici un număr întreg nu poate fi soluţia ecuaţiei.

48. Fie polinomul $P(x)=x^{15}+(m-1)x^3-m$ cu $m\in\mathbb{Z}$. Să se arate că $P(2)$ este divizibil cu 7 şi să se determine restul împărţirii polinomului $P(x)$ la $(x^2+x+1)^2$.

Rezolvare. Observăm că $7=2^3-1$. Atunci:

$$P(2)=2^3(2^3-1)(2^3+1)(2^6+1)+m(2^3-1)=(2^3-1)[2^3(2^3+1)(2^6+1)+m].$$

Pentru a găsi restul împărţirii polinomului la $(x^2+x+1)^2$, vom separa termenii din $P(x)$ care conţin acest factor. Observăm că $(x^3-1)^2=(x-1)^2(x^2+x+1)^2$. Deci $P(x)=x^{15}-x^3+m(x^3-1)=x^3(x^3-1)(x^3+1)(x^6+1)+$ $+m(x^3-1)=(x^3-1)[x^3(x^3+1)(x^6+1)+m]$. In paranteza dreaptă adăugăm şi scădem 4 şi obţinem: $P(x)=(x^3-1)[x^{12}-1+x^9-1+x^6-1+x^3-1+m+4]$. Termenii $x^{12}-1$, x^9-1, x^6-1, x^3-1 conţin ca factor pe x^3-1 deci şi pe x^2+x+1, deci $P(x)=(x^3-1)^2Q(x)+(m+4)(x^3+1)$. Deoarece $gr(x^3+1)\le gr(x^2+x+1)^2$ rezultă $R(x)=(m+4)(x^3+1)$.

49. Să se determine numerele întregi x şi y, prime între ele, astfel încît fracţia $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$ să fie echivalentă cu fracţia $\frac{5}{19}$.

Rezolvare. Arătăm mai întîi că fracţia $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$ este ireductibilă.

Deoarece $x^2+xy+y^2=x(x+y)+y^2=y(x+y)+x^2$, orice divizor al lui $x+y$ şi x^2+xy+y^2 trebuie să fie divizor şi pentru numerele x^2 şi y^2.

Dar singurul divizor comun al lui x^2 şi y^2 este 1, deoarece x şi y sînt prime între ele. Deci numerele $x+y$ şi x^2+xy+y^2 sînt prime între ele, adică fracţia $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$ este ireductibilă.

Deoarece şi $\frac{5}{19}$ este ireductibilă rezultă că fracţiile $\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$ şi $\frac{5}{19}$ sînt echivalente dacă şi numai

dacă: $\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+xy+y^2=19 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ (x+y)^2-xy=19 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$,

sistem care are soluţiile $x=2, y=3$ sau $x=3, y=2$.

50. Determinaţi numerele întregi m şi n astfel încît: $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{mn}=\frac{2}{5}$.

Rezolvare. Observăm că $m\neq0$ şi $n\neq0$, deci $m\in\mathbb{Z}^*$ şi $n\in\mathbb{Z}^*$. Relaţia din enunţ este echivalentă succesiv cu:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{mn}=\frac{2}{5} \leftrightarrow 2mn=5m+5n-5 \leftrightarrow 2mn-5n=5m-5 \leftrightarrow (2m-5)n=5m-5.$$

Deoarece $2m-5\neq0$ pentru orice $m\in\mathbb{Z}$ (dacă $2m-5=0 \Rightarrow m=\frac{5}{2}$, ceea ce contazice faptul că $m\in\mathbb{Z}$)

obţinem: $n=\frac{5m-5}{2m-5}$, (1).

Din $n\in\mathbf{Z}$ avem $\frac{5m-5}{2m-5}\in\mathbf{Z}^*$ şi cum $m\in\mathbf{Z}^*$ rezultă că $(2m-5)$ divide $(5m-5)$, (2).

Dar 2 nu divide $(2m-5)$, prin urmare $(2m-5,\ 2)=1$. Ţinînd seama de acest lucru, din (2) obţinem succesiv: $(2m-5)\,|\,2(5m-5) \Rightarrow (2m-5)\,|\,(10m-10) \Rightarrow (2m-5)\,|\,5(2m-5)+15$, (3).

Cum $(2m-5)$ divide $5(2m-5)$, din (3) rezultă că $(2m-5)$ divide 15, deci $2m-5\in\{\pm15;\ \pm5;\ \pm3;\ \pm1\}$ de unde $m\in\{-5;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 10\}$. Dar $m\neq0$, prin urmare $m\in\{-5;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 10\}$. Pentru aceste valori ale lui m aflăm valorile corespunzătoare ale lui n din (1). Observăm că pentru $m=1$ rezultă $n=0$, ceea ce nu convine. In final mulţimea soluţiilor (m,n) va fi: $\{(-5;2),(2;-5),(3;10),(4;5),(5;4),(10;3)\}$.

51. Dacă $n\in\mathbf{N}$ să se demonstreze că: $A=7^n\cdot3^{n+1}+3^n\cdot7^{n+1}+7\cdot21^n$ este divizibil cu 17; $B=5^n\cdot7^{n+1}+7^n\cdot5^{n+1}+17\cdot35^n$ este divizibil cu 29.

Rezolvare. Avem succesiv:

$A=7^n\cdot3^n\cdot3+3^n\cdot7^n\cdot7+7\cdot(3\cdot7)^n=7^n\cdot3^n\cdot3+3^n\cdot7^n\cdot7+7\cdot3^n\cdot7^n=3^n\cdot7^n(3+7+7)=$
$=3^n\cdot7^n\cdot17$. Deci A se divide cu 17.

$B=5^n\cdot7^n\cdot7+7^n\cdot5^n\cdot5+17\cdot7^n\cdot5^n=7^n\cdot5^n(7+5+17)=7^n\cdot5^n\cdot29$. Rezultă că B se divide cu 29.

52. Să se determine toate numerele naturale x, y, z pentru care $xy+yz+zx=11$. (Presupunem $x\le y\le z$).

Rezolvare. Să observăm că dacă $2\le x\le y\le z$, atunci $xy+yz+zx\ge4+4+4=12>11$ şi deci nu avem soluţii. Prin urmare, cel puţin unul din numere este 0 sau 1. Ţinînd seama de $x\le y\le z$, avem cazurile:

a) Dacă $x=0$ atunci $yz=11$, de unde obţinem $y=1$ şi $z=11$ sau $y=11$ şi $z=1$ (aceasta nu convine, deoarece $y>z$), deci avem soluţia $x=0, y=1, z=11$.

b) Dacă $x=1$, atunci $1=x\le y\le z$ şi ecuaţia dată este echivalentă cu $yz+y+z=11$. Avem subcazurile:

i) dacă $y=1$ atunci $z+z+1=11$, de unde $2z=10$ şi $z=5$; rezultă soluţia $x=1$, $y=1$, $z=5$.

ii) dacă $y=2$ atunci $2z+2+z=11$, de unde $3z=9$, adică $z=3$; rezultă soluţia $x=1$, $y=2$, $z=3$.

iii) dacă $y\ge3$ rezultă $z\ge3$ (deoarece $z\ge y$); atunci $yz+y+z\ge9+3+3=15>11$ şi deci nu avem soluţii.

Prin urmare, solţiile (x, y, z) ale ecuaţiei sînt: (0,1,11), (1,1,5), (1,2,3).

53. Să se arate că pentru orice $n\in\mathbf{N}$, $n\ge1$, numărul

$$A=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2(n^2+2n-1)+3$$ este natural, multiplu de 3.

Rezolvare. a) Numărul A este natural deoarece numărul $n(n+1)$ reprezintă produsul a două numere naturale consecutive, prin urmare este un număr natural divizibil prin 2, iar pătratul său $n^2(n+1)^2$ este un număr natural divizibil cu 4.

b) Arătăm că numărul natural A este multiplu de 3. Fie $n=3k$, $k\in\mathbf{N}^* \Rightarrow A=M3+3=M3$. Analog pentru $n=3k-1$, $k\in\mathbf{N}^*$. Pentru $n=3k+1$, $k\in\mathbf{N}$, observăm că:

$2n^2+2n-1=2(3k+1)^2+2(3k+1)-1=M3+3+2M3+2-1=M3$, deci A este multiplu 3.

54. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia: $x(x+2)(x+4)(x+6)+9=y^2$.

Rezolvare. Grupînd termenii în primul membru urmează:

$[x(x+6)][(x+2)(x+4)]+9=y^2$ sau $[x^2+6x][(x^2+6x)+8]+9=y^2$ sau $(x^2+6x)^2+8(x^2+6x)+16+(9-16)=y^2$ adică $(x^2+6x+4)^2-7=y^2$ sau $(x^2+6x+4-y)(x^2+6x+4+y)=7$.

Deci rezolvarea problemei date se reduce la rezolvarea următoarelor sisteme:

$$\begin{cases}x^2+6x+4-y=7\\x^2+6x+4+y=1\end{cases};\quad\begin{cases}x^2+6x+4-y=1\\x^2+6x+4+y=7\end{cases};\quad\begin{cases}x^2+6x+4-y=-7\\x^2+6x+4+y=-1\end{cases};\quad\begin{cases}x^2+6x+4-y=-1\\x^2+6x+4+y=-7\end{cases}.$$

Soluţiile sistemelor sînt: (0,–3), (–6,–3), (0,3), (–6,3), (–2,3), (–4,3), (–2,–3), (–4,–3).

55. Fie polinomul $P(X)=X^2+40$. Să se demonstreze că dacă $a,b\in\mathbf{N}$, $a>b$, atunci cel puţin unul din numerele $P(a)+P(b)$, $P(a)-P(b)$ este diferit de 1 şi nu este număr prim.

Indicaţie. $P(a)+P(b)=a^2+b^2+80$, $P(a)-P(b)=(a-b)(a+b)\geq 1$.

56. Fie $x, y\in\mathbf{R}$ astfel încît: $x+y=x^3+y^3=x^5+y^5=a$.
Determinaţi mulţimea tuturor valorilor pe care le poate lua a.

Rezolvare. Conform enunţului avem: $x+y=a$; $x^3+y^3=a$ şi $x^5+y^5=a$, (1).
Dacă $y=-x$ din cele trei relaţii obtinem $a=0$.
Ne propunem în continuare să găsim numerele $a\neq 0$ pentru care există x şi y verificînd relaţiile (1). Fie x şi y, rădăcinile ecuaţiei de gradul II: $z^2-az+p=0$. Avem $x+y=a$; $x^2+y^2=a^2-2p$; $x^3+y^3=a^3-3ap$; $x^4+y^4=a(x^3+y^3)-p(x^2+y^2)=a^4-4a^2p+2p^2$, deci $x^5+y^5=a^5-5a^3p+5ap^2$, (2).

Din relaţiile $x^3+y^3=a^3-3ap$ şi $x^3+y^3=a$ rezultă $a^3-3ap=a \Rightarrow p=\dfrac{a^2-1}{3}$, (3), deoarece $a\neq 0$. Din relaţia (2) şi $x^5+y^5=a$ rezultă $a=a^5-5a^3p+5ap^2 \Rightarrow a^4-5a^2p+5p^2=1$. Folosind relaţia (3) obţinem

$$a^4-5a^2\cdot\frac{a^2-1}{3}+5\left(\frac{a^2-1}{3}\right)^2=1 \Rightarrow a^4-5a^2+4=0 \Rightarrow (a^2-1)\cdot(a^2-4)=0 \Rightarrow a\in\{-2,-1,1,2\}.$$

In concluzie $a\in\{-2,-1,0,1,2\}$.

57. Polinomul $P(x)$ de gradul n $(n\geq 2)$ împărţit la polinoamele de gradul întîi $A(x)$ şi $B(x)$ dă respectiv resturile r_1 şi r_2. Se cere:

a) Să se arate că dacă $r_1\neq r_2$, atunci restul împărţirii lui $P(x)$ prin $A(x)\cdot B(x)$ nu poate fi o constantă.

b) Dacă $A(x)=x+1$, $B(x)=2x-3$, $r_1=2$ şi $r_2=7$, să se găsească restul împărţirii de la punctul a).

Rezolvare. a) Polinoamele de gradul întîi sînt de forma

$$A(x)=mx+n\ (m\neq 0),\ B(x)=px+y\ (p\neq 0).$$

Conform enunţului avem:

1° $P(x)=(mx+n)C_1(x)+r_1$. Făcînd $x=-\dfrac{n}{m}\Rightarrow P\left(-\dfrac{n}{m}\right)=r_1$, (1);

2° $P(x)=(px+q)C_2(x)+r_2$. Făcînd $x=-\dfrac{q}{p}\Rightarrow P\left(-\dfrac{q}{p}\right)=r_2$, (2).

3°. Presupunem prin absurd că $P(x)$ împărţit prin $A(x)\cdot B(x)$ dă restul r=constant. Putem scrie : $P(x)=(mx+n)\cdot(px+q)C(x)+r$. Pentru $x=-\dfrac{n}{m}$ şi avînd în vedere (1), obţinem $r_1=r$, (3).
Pentru $x=-\dfrac{q}{p}$ şi avînd în vedere (2), obţinem $r_2=r$, (4). Din (3) şi (4) rezultă $r_1=r_2$, contradicţie.

b) Conform ipotezei avem:

1°. $P(x)=(x+1)C_1(x)+2\Rightarrow P(-1)=2$,

2°. $P(x)=(2x-3)C_2(x)+7\Rightarrow P\left(\dfrac{3}{2}\right)=7$.

Folosind rezultatul de la a) putem scrie: $P(x)=(x+1)(2x-3)C(x)+R(x)$, unde $R(x)=ux+v$ $(u\neq 0)$ căci gr $R(x)<$ gr $(x+1)(2x-3)$.

Avem $P(x)=(x+1)(2x-3)C(x)+ux+v$. Pentru $x=-1$ sau $x=\frac{3}{2}$ rezultă: $-u+v=2$, $\frac{3}{2}u+v=7$. Deci $u=2$, $v=4$ şi $R(x)=2x+4$.

58. Să se determine lungimile laturilor triunghiului ABC ştiind că sînt numere întregi şi $a=16$, $\cos A=-\frac{1}{4}$.

Rezolvare. Cu notaţiile obişnuite, aplicînd teorema cosinusului avem:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \Rightarrow 256=b^2+c^2+\frac{bc}{2} \Rightarrow 2b^2+2c^2+bc-512=0 \ (1).$$

Deoarece $\cos A<0$, rezultă că A este obtuz, deci A este cel mai mare unghi şi corespunzător, a va fi cea mai mare latură. Să presupunem $b\leq c$, deci $1\leq b\leq c<a=16$. Atunci $2b^2+2c^2+bc\geq 5b^2$ şi folosind (1) putem scrie echivalent $512\geq 5b^2$ de unde obţinem $1\leq b\leq 10$, (2).

Gîndind egalitatea (1) ca o ecuaţie de gradul al doilea cu necunoscuta c, discriminantul acesteia va fi $\Delta=b^2-4\cdot 2\cdot(2b^2-512)=4\,096-15b^2$. Deoarece c este întreg, trebuie ca Δ să fie pătrat perfect. Ţinînd seama şi de (2), se observă uşor că singurele valori convenabile ale lui b sînt $b_1=5, b_2=8$. Corespunzător, din (1) obţinem $c_1=14, c_2=12$. Dacă vom considera $b\geq c$ obţinem în mod simetric $b_3=14$, $b_4=12$, respectiv $c_3=5$, $c_4=8$. Aşadar tripletele (a,b,c) căutate sînt: (16,5,14); (16,8,12); (16,14,5); (16,12,8).

59. Să se rezolve în numere naturale ecuaţia: $1+x+x^2+x^3=y^3$.

Rezolvare. In prealabil vom arăta că: $x^3<1+x+x^2+x^3\leq(x+1)^3$, $(\forall)\,x\in\mathbf{N}$, (1).

Intr-adevăr, inegalitatea din dreapta este evidentă. Inegalitatea din stînga este echivalentă cu $x^2+x+1>0$, $(\forall)\,x\in\mathbf{N}, \Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2>0$, $(\forall)\,x\in\mathbf{N}$, ceea ce este evident. Conform (1) avem că $x^3<y^3\leq(x+1)^3$, deci numărul natural y^3 fiind cuprins între două numere naturale consecutive şi strict mai mare decît x^3 rezultă că $y^3=(1+x)^3$ sau $y=1+x$. Inlocuind y în ecuaţia dată obţinem ecuaţia $2x^2+2x=0$ sau $2x(x+1)=0$ cu soluţiile $x=0$ şi $x=-1\notin\mathbf{N}$. Deci $x=0$ şi $y=1$.

60. Fiind dat pe axa reală punctul $A(a)$, se cere să se găsească pe aceeaşi axă punctul B la distanţa d $(d>0)$ de punctul A.

Rezolvare. Ataşînd lui B coordonata necunoscută x, problema revine la a rezolva ecuaţia: $|x-a|=d$, adică la a găsi mulţimea $M=\{x\,|\,|x-a|=d\}$. Notînd $M_1=\{x\,|\,|x-a|=d,\ x\geq a\}$ şi $M_2=\{x\,|\,|x-a|=d,\ x<a\}$, observăm că: $M=M_1\cup M_2$ şi vom trece la aflarea mulţimilor M_1 şi M_2.

$$M_1=\{x\,|\,|x-a|=d,\ x\geq a\}=\{x\,|\,x-a=d,\ x\geq a\}=\{x\,|\,x=d+a,\ x\geq a\};$$

$$M_2=\{x\,|\,|x-a|=d,\ x<a\}=\{x\,|\,-x+a=d,\ x<a\}=\{x=a-d,\ x<a\}.$$

Mulţimile M_1 şi M_2 nu sînt vide, deoarece $d>0\} \Rightarrow \begin{cases} d+a>a, \text{ deci } M_1=\{d+a\} \\ a-d<a, \text{ deci } M_2=\{a-d\} \end{cases}$

Mulţimea M se obţine reunind M_1 şi M_2. $M=M_1\cup M_2=\{a-d,\ a+d\}$. Problema are deci două soluţii:

$$B_1(a-d),\ B_2(a+d).$$

61. Să se rezolve ecuaţia: $|2x-1|+2|x+1|=3$.

Rezolvare. Rădăcinile ecuaţiilor $2x-1=0$, $x+1=0$ sînt $\frac{1}{2}$ şi -1. Notînd cu M_1, M_2, M_3 mulţimile soluţiilor ecuaţiei date în intervalele: $(-\infty,-1]$, $\left(-1,\frac{1}{2}\right]$ şi $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ urmează să găsim

$M=M_1\cup M_2\cup M_3$. Vom ordona calculele în felul următor:

$x\in(-\infty,-1]$	$x\in\left(-1,\frac{1}{2}\right]$	$x\in\left(\frac{1}{2},\infty\right)$
Ecuația devine: $1-2x+2(-x-1)=3 \Leftrightarrow -4x=4 \Leftrightarrow x=-1$ cum $-1\in(-\infty,-1] \Rightarrow M_1=\{-1\}$	$1-2x+2(x+1)=3 \Leftrightarrow 0x=0$, ecuație verificată pentru orice $x\in\mathbf{R}$. Dar deoarece ne găsim în cazul $x\in\left(-1,\frac{1}{2}\right]$, vom avea: $M_2=\left(-1,\frac{1}{2}\right]\cap\mathbf{R}=\left(-1,\frac{1}{2}\right]$	$2x-1+2(x+1)=3 \Leftrightarrow 4x=2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ cum $\frac{1}{2}\notin\left(\frac{1}{2},\infty\right)$ $M_3=\emptyset$

In concluzie, $M=M_1\cup M_2\cup M_3=\{-1\}\cup\left(-1,\frac{1}{2}\right]\cup\emptyset=\left[-1,\frac{1}{2}\right]$.

62. Să se rezolve inecuația: $|x-1|+|2x-3|>2$.

Rezolvare. Ecuațiile $x-1=0$ și $2x-3=0$ ne conduc la considerarea intervalelor $(-\infty,1]$, $\left(1,\frac{3}{2}\right]$, $\left(\frac{3}{2},\infty\right)$ și a mulțimilor soluțiilor inecuației date, situate în aceste intervale.

Ordonăm calculele ca în cazul precedent:

$x\in(-\infty,1]$	$x\in\left(1,\frac{3}{2}\right]$	$x\in\left(\frac{3}{2},\infty\right)$
Inecuația devine: $1-x+3-2x>2 \Leftrightarrow -3x>-2 \Leftrightarrow x<\frac{2}{3} \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$. Ne găsim în cazul $x\in(-\infty,1]$. Așadar, $M_1=(-\infty,1]\cap\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)=\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$	$x-1+3-2x>2 \Leftrightarrow -x>0 \Leftrightarrow x<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,0)$ $M_2=(-\infty,0)\cap\left(1,\frac{3}{2}\right]=\emptyset$	$x-1+2x-3>2 \Leftrightarrow 3x>6 \Leftrightarrow x>2 \Leftrightarrow x\in(2,\infty)$ $M_3=(2,\infty)\cap\left(\frac{3}{2},\infty\right)=(2,\infty)$

$$M=M_1\cup M_2\cup M_3=\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup\emptyset\cup(2,\infty)=\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup(2,\infty).$$

63. Să se arate că $|x^2-4x+3|+|x^2+x+2|\geq 3$, pentru orice $x\in\mathbf{R}$.

Rezolvare. Se observă că polinomul x^2+x+2 are $\Delta<0$, adică păstrează același semn (semnul lui "a") deci $x^2+x+2>0$, $(\forall)\ x\in\mathbf{R}$ adică $|x^2+x+2|=x^2+x+2$.

Inecuația devine deci $|x^2-4x+3|+x^2+x+2\geq 3$ adică $|x^2-4x+3|+x^2+x-1\geq 0$.

"Reperele" sînt rădăcinile lui x^2-4x+3, adică 1 și 3.

Avem deci:

$x\in(-\infty,1]\cup[3,\infty)$	$x\in(1,3)$
$x^2-4x+3+x^2+x-1\geq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x^2-3x+2\geq 0.$ Cum $\Delta<0$ rezultă $2x^2-3x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbf{R}$ deci $M_1=\{(-\infty,1]\cup[3,\infty)\}\cap\mathbf{R}=$ $=(-\infty,1]\cup[3,\infty)$.	$-x^2+4x-3+x^2+x-1\geq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 5x>4 \Leftrightarrow x\in\left(\frac{4}{5},\infty\right)$ $M_2=\left(\frac{4}{5},\infty\right)\cap(1,3)=(1,3)$.

$$M=M_1\cup M_2=(-\infty,1]\cup[3,\infty)\cup(1,3)=\mathbf{R}.$$

Să se rezolve sistemele:

64. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=37 \\ x^2+xz+z^2=28 \\ y^2+yz+z^2=19\ . \end{cases}$

Rezolvare. Scădem din prima ecuaţie pe a doua şi apoi pe cea de a treia din a doua şi obţinem: $(y-z)\ (x+y+z)=9$ şi $(x-y)(x+y+z)=9$ deci $y-z=x-y \Rightarrow x+z=2y$. Se substitue $x+z$ cu $2y$; $(x-y)y=3 \Rightarrow 3y^4-28y^2+9=0$; $y^4=x^2$ se găseşte $y_1=3, y_2=-3,\ y_3=\frac{\sqrt{3}}{3}, y^4=\frac{-\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x_1=4; x_2=-4;$ $x_3=\frac{10\sqrt{3}}{3}$ şi $x_4=\frac{-10\sqrt{3}}{3}$.

65. $\begin{cases} x+y+z=\ 30 \\ z^2=x^2+y^2 \\ x^2+y^2+z^2=338\ . \end{cases}$

Rezolvare. Se elimină z^2 din a doua şi a treia ecuaţie: $x^2+y^2=169$. Din prima ecuaţie avem $x+y-30=z$ şi ridicînd la pătrat obţinem: $x^2+y^2+900+2xy-60x-60y=z^2$; $x^2+y^2=z^2\Rightarrow 30(x+y)-xy=450$; $(x+y)^2-2xy=169$. Notăm cu $S=x+y$; $P=xy$ şi obţinem $x=5, y=12, z=13$, sau $x=12, y=5, z=13$.

66. $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=0 \\ 3x^2-4xy+y^2=-1\ . \end{cases}$

Rezolvare. Se împarte prima ecuaţie cu x^2; $\left(\frac{y}{x}\right)^2-3\left(\frac{y}{x}\right)+2=0,\ 3x^2-4xy+y^2=-1.$ Din prima ecuaţie obţinem: $\frac{y}{x}=1$ sau $\frac{y}{x}=2$. Sistemul este compatibil şi $(x,y)\in\{(-1,-2),\ \ (1,2)\}$.

67. $\begin{cases} -4x^2-3xy+y^2=-6 \\ 2x^2-\ xy-y^2=-4\ . \end{cases}$

Rezolvare. Inmulţim ambii membrii ai primei ecuaţii cu -2 şi ai celei de-a doua cu 3 obţinem: $\begin{cases} 8x^2+6xy-2y^2=12 \\ 6x^2-3xy-3y^2=12 \end{cases}$. Adunînd cele două ecuaţii se obţine $14x^2+3xy-5y^2=0$, apoi se studiază ca exerciţiul 64 şi obţinem:

$$\begin{cases}\frac{y}{x}=2\\ 2x^2-xy-y^2=-4\end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases}\frac{y}{x}=-\frac{7}{5}\\ 2x^2-xy-y^2=-4\end{cases}.$$

Se obţine: $x_1=1, y_1=2$ şi $x_2=-1,\ y_2=-2$.

68. $\begin{cases}x^2+y^2=8\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1\end{cases}.$ **R.** $x=2, y=2$.

Indicatie: $\left.\begin{matrix}x^2+y^2=(x+y)^2-2xy\\ x+y=xy\end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2y^2-2xy=8;\ xy(xy-2)=8.$

Pentru următoarele sisteme de ecuaţii algebrice voi prezenta numai răspunsurile, rezolvarea rămînînd pe seama elevului.

69. $\begin{cases}x^2-xy-y=5\\ 2x-3y=3\end{cases}.$ **R.** $(x, y)\in\left\{(3,1);\ \left(-4,-\frac{1}{3}\right)\right\}$.

70. $\begin{cases}x^2+3xy-y^2+2x-5y=-64\\ x-y=-7\end{cases}.$ **R.** $(x, y)\in\left\{(2,9);\ \left(-\frac{10}{3},\frac{11}{9}\right)\right\}$.

71. $\begin{cases}2x-3y=1\\ x^2-xy+5y^2=7\end{cases}.$ **R.** $(x, y)\in\left\{(2,1);\ \left(-\frac{27}{23},-\frac{29}{23}\right)\right\}$.

72. $\begin{cases}xy+x+y=11\\ x^2y+y^2x=30\end{cases}.$ **R.** $(x, y)\in\{(1,5);(5,1);(2,3);(3,2)\}$.

73. $\begin{cases}x^2+y^2=8\\ x+y=xy\end{cases}.$ **R.** $(x, y)\in\{(2,2)\}$.

74. $\begin{cases}x^3+y^3=1\\ x+y=1\end{cases}.$ **R.** $(x, y)\in\{(0,1);(1,0)\}$.

75. $\begin{cases}5x^2-6xy+5y^2=29\\ 7x^2-8xy+7y^2=43\end{cases}.$ **R.** $(x, y)\in\{(2,3);(-2,-3);(3,2);(-3,-2)\}$.

76. $\begin{cases}xy+x+y=7\\ xy-3(x+y)=-9\end{cases}.$ **R.** $(x, y)\in\{(3,1);(1,3)\}$.

IX. EXERCIŢII ŞI PROBLEME PROPUSE IN VEDEREA PREGĂTIRII PENTRU OLIMPIADELE DE MATEMATICĂ

1. Fie mulţimile:

$M=\{x; y; z$ trei numere consecutive neprime, astfel ca $xyz<990\}$.

$N=\{a; b; c$ trei numere naturale consecutive astfel ca $abc=336\}$.

a) Să se determine $M \cap N$. b) Să se arate că oricare ar fi $a; b; c$ trei numere naturale consecutive, avem abc divizibil prin 6.

R. $M=\{8;9;10\}$; $N=\{6;7;8\}$; a) $M \cap N=\{8\}$.

2. Se dă mulţimea $A=\{a; b \mid a \in \mathbf{N}; b \in \mathbf{N}$ prime între ele$\}$. In ce caz $a+b$ şi $a-b$ sînt prime între ele?

R. $a=2K$; $b=2K+1$; sau $b=2K$; $a=2K+1$.

3. Să se arate că fracţia $\dfrac{x^2+1}{x^3+3x^2+2x}$, $x \in \mathbf{N}$, este periodică.

4. Să se determine mulţimea C ale cărei elemente sînt valorile lui $x \in \mathbf{Z}$ pentru care expresia $-8+\dfrac{8}{x+3}$ este un număr în $\mathbf{Z}$.

R. $C=\{-1 ; 1; -2 ; -4 ; 5; -5 ; -7 ; -11\}$.

5. Fie fracţia: $\dfrac{6x^2-12x+6}{2x^2-7x+5}$. Să se afle mulţimea:

$$M=\left\{ x \in \mathbf{N} \,\middle|\, \frac{6x^2-12x+6}{2x^2-7x+5} \in \mathbf{N} \right\}$$

R. $M=\{1,2,3,4,7\}$.

6. Să se arate că dacă $x \in \mathbf{N}$ atunci expresia $x(2x^2+1)$ este divizibilă prin 3.

Indicaţie. Se substituie x pe rînd cu $K3$; $K3+1$ şi $K3-1$; unul din factorii expresiei devine multiplu de 3.

7. Să se arate că dacă x este un număr natural cu soţ, atunci expresiile $E_1=(x^2+4)x$ şi $E_2=x(x^2-4)$ sînt divizibile prin 8.

Indicaţie: $x=2K$, atunci:

$E_1=x(x^2+4)=2K(4K^2+4)=8K(K^2+1)=$ multiplu de 8;

$E_2=x(x^2-4)=2K(4K^2-4)=8K(K^2-1)=$ multiplu de 8.

8. Dacă x este un număr natural oarecare, expresia $E=x(x+1)(2x+1)$ este totdeauna divizibilă prin 6.

Indicaţie: $x(x+1)$ este totdeauna divizibilă cu 2. Numărul x împărţit la 3 poate da resturile 0, 1 sau 2, adică x poate fi $M3$, $M3+1$ sau $M3+2$.

Vom avea:

dacă $x=M3$, E fiind şi $M2$, este $M6$;

dacă $x=M3+1$ atunci $2x+1=M3$ şi $E=M6$;

dacă $x=M3+2$ atunci $x+1=M3$ şi $E=M6$.

9. Fie x un număr fără soţ, $x \in \mathbf{Z}$. Să se arate că $E=x^2-1$ este divizibil cu 8.

Indicaţie. Un număr x fără soţ este de forma $2K \pm 1$ deci avem $x^2=(2K \pm 1)^2=4K^2 \pm 4K+1=$ $=4(K^2 \pm K)+1=M8+1$ şi deci: $E=x^2-1=(M8+1)-1=M8$.

10. Să se determine mulţimea M ale cărei elemente sînt valorile lui $x \in \mathbf{N}$, astfel ca $\frac{x^2+2x+8}{x+2}$ să fie un număr natural.

Indicaţie. $\frac{x^2+2x+8}{x+2}=x+\frac{8}{x+2}$.

R. $M=\{0; 2; 6\}$.

11. Fie $ABCD$ un trapez (AD şi BC respectiv baza mare şi baza mică). Paralela dusă prin C la AB taie diagonala BD în M şi paralela tot la AB dusă prin D taie diagonala AC în N. Să se arate că AB este medie geometrică a segmentelor CM şi DN.

Indicaţie. Fie O punctul de intersecţie al diagonalelor. Se cunoaşte că diagonalele unui trapez se taie într-un raport egal cu raportul bazelor lui. Se scriu relaţiile din trapezele $ABCD$, $ABCM$ şi $ABND$ şi se ţine seama că: $\frac{OC}{OA}=\frac{OB}{OD}$.

12. Să se determine mulţimea C ale cărei elemente sînt valorile lui $x \in \mathbf{Z}$ astfel ca $\frac{x^2+4x+9}{x+4}$ să fie un număr în $\mathbf{Z}$.

Indicaţie: $\frac{x^2+4x+9}{x+4}=x+\frac{9}{x+4}$.

R. $C=\{-13; -7; -5; -3; -1; 5\}$.

13. Se dă mulţimea A ale carei elemente sînt valorile lui $x \in \mathbf{Z}$ pentru care $\frac{(x+1)(x+5)}{x+6} \in \mathbf{Z}$ şi mulţimea B ale cărei elemente sînt valorile lui $x \in \mathbf{Z}$ astfel ca $\frac{2x^2-8x+6}{x+4} \in \mathbf{Z}$. Să se determine $A \cap B$; $A-B$; $A \cup B$.

Indicaţie: $\frac{x^2+6x+5}{x+6}=x+\frac{5}{x+6}$ şi $\frac{2x^2-8x+6}{x+4}=2x+\frac{6}{x-4}$.

R. $A=\{-1; -5; -11; -7\}$;
$B=\{-2; 1; 2; 3; 5; 6; 7; 10\}$; $A \cap B=\{\phi\}$; $A-B=A$.

14. Să se determine mulţimea B ale cărei elemente sînt valorile lui $x \in \mathbf{Z}$ pentru care expresia $\frac{(x+6)(x-12)}{x-6} \in \mathbf{N}$.

R. $B=\{-6; -3; -2; 0; 2; 3; 4; 5; 12; 14; 24; 30; 78\}$.

15. Dacă x este un număr impar să se arate că expresia $E=x^{12}-x^8-x^4+1$ este divizibilă cu 512.

Indicaţie. $512=2^9$; $E=x^8(x^4-1)-(x^4-1)=(x^4+1)(x^2+1)(x^2+1)(x+1)(x+1)(x-1)(x-1)$. Dacă x este prin ipoteză fără soţ deci x^4 şi x^2 sînt tot fără soţ astfel cei 7 factori sînt toţi numere cu soţ. Pe lîngă aceasta, unul din factorii $x+1$ şi $x-1$ este divizibil cu $4=2^2$, dar ei figurează de cîte 2 ori.

$E=$ multiplu de 2^9=multiplu de 512.

16. Fie mulţimea M ale cărei elemente sînt trei numere consecutive x; y; $z\in\mathbf{N}$ neprime, astfel că $x+y+z<28$. Să se determine elementele acestei mulţimi şi să se arate că expresia $E=\dfrac{(x+y)(y+z)(z+x)+xyz}{xy+yz+zx}$ în care x, y, z sînt elementele multimii M este divizibilă cu 3.

R. $E=x+y+z$, $M=\{8;\ 9;\ 10\}$.

17. Să se determine mulţimea G ale cărei elemente x sînt numere întregi ($x\in\mathbf{Z}$), astfel ca valoarea fracţiei: $F(x)=\dfrac{x^2+x-6}{(x^2-x-2):(x+1)}$ să fie cuprinsă între -1 şi 5.

R. $G=\{-3;\ -2;\ 0;\ 1\}$.

18. Să se arate că expresia $E=\dfrac{a^6+a^4b^2+a^2b^4}{a^4-a^3b+a^2b^2}+ab+b^2$ este pozitivă oricare ar fi a şi $b\in\mathbf{R}-\{0\}$.

R. $E=(a+b)^2+b^2$.

19. Se dă tetraedrul $VABC$ cu baza un triunghi ABC ale cărui laturi sînt $AC<AB<BC$. Se cunoaşte că $AB+BC+AC=3(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)$ cm şi $AB+AC=3(1+\sqrt{2})$ cm. Muchiile $[VA]\equiv[VB]\equiv[VC]$ şi $m(\sphericalangle AVB)=90^\circ$; $m(\sphericalangle AVC)=60^\circ$; $m(\sphericalangle BVC)=120^\circ$. a) Să se demonstreze că triunghiurile VBC şi VAC sînt echivalente. b) Să se afle aria laterală şi volumul tetraedrului.

R. b) $Al.=\dfrac{9(\sqrt{3}+1)}{2}$ cm^2; $V=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

20. Să se determine mulţimea A ale cărei elemente sînt valorile lui $x\in\mathbf{Z}$, astfel ca valoarea fracţiei: $F(x)=\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$ să fie cuprinsă între -3 şi 2.

Indicaţie. $F(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)}$.

R. $A=\{3;\ 4\}$.

21. Fie a, b, c laturile unui triunghi ABC. Să se calculeze volumul piramidei $SABC$ ştiind că $\sphericalangle BSC\equiv\sphericalangle CSA\equiv\sphericalangle ASB$ şi au măsurile de 90°.

Indicaţie: Fie $SA=x$; $SB=y$; $SC=z$, atunci $V=\dfrac{xyz}{6}$, însă $x=\dfrac{\sqrt{b^2+c^2-a^2}}{2}$; $y=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{2}$; $z=\dfrac{\sqrt{a^2+c^2-b^2}}{2}$; $V=\dfrac{\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)}}{48}$.

22. Pe planul dreptunghiului $ABCD$ cu dimensiunile $a\sqrt{7}$ *şi* $a\sqrt{5}$ se ridică perpendicularele $AN=a\sqrt{2}$ şi $CM=3a\sqrt{2}$. Fie O intersecţia diagonalelor dreptunghiului $ABCD$ (dimensiunile în cm). a) Să se determine perimetrul triunghiului MNO. b) Să se afle volumul poliedrului $MNABCD$.

Indicaţie. Vezi piramida cu vîrful în B şi baza $AMNC$ din figura IX.1

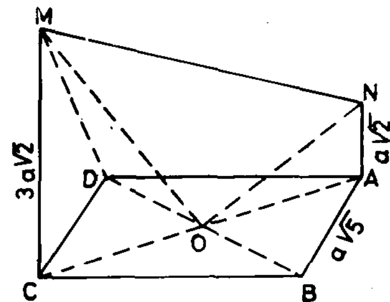


Fig.IX.1

R. *a*) $a(3\sqrt{5}+\sqrt{21})$ cm; *b*) $8a^3\sqrt{2}$ cm^3.

23. Se dă fracţia : $F(x)=\dfrac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}$.

a) Să se determine mulţimea B ale cărei elemente sînt valorile lui $x\in\mathbf{Z}$ pentru care valoarea lui $F(x)$ este cuprinsă între –2 şi 5. b) Pentru ce valori ale lui $x\in\mathbf{Z}$ expresia $F(x)$ este negativă? c) Să se determine mulţimea C ale cărei elemente sînt valorile lui $x\in\mathbf{Z}$ pentru care $F(x)\cdot\dfrac{x-2}{8}\in\mathbf{Z}$. d) Pentru ce valori ale lui x expresia $F(x)\cdot\dfrac{8}{x+4}$ este un număr întreg?

R. a) $B=\left\{x\in\mathbf{Z}|x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{7}{2},\infty\right)\right\}$; b) $-4<x<2$; $\{3; -2; -1; 0; 1\}$;

c) $x=M8-4$; d) $\{-10\ -6; -3; -1; 0; 6\}$.

24. Baza piramidei $SABCD$ este un dreptunghi $ABCD$ cu lungimea de 16 cm, lăţimea $BC=12$ cm şi înălţimea piramidei cade în centrul bazei. La mijlocul muchiei SB se ia un punct M, iar pe mijloacele laturilor AB şi BC punctele N, respectiv P. $m(\sphericalangle MNP)=60^{\circ}$. Să se afle: a) Volumul solidului $BNPM$; b) volumul piramidei $SABCD$.

R. a) $V=40\sqrt{3}$ cm^3; b) $V=640\sqrt{3}$ cm^3.

25. O piramidă cu vîrful S are ca bază triunghiul dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A)=90^{\circ}$, iar înălţimea ei cade în A. Ipotenuza este de 25 cm, o catetă este cu 5 cm mai mare decît cealaltă şi înălţimea piramidei este egală cu suma catetelor. a) Să se afle ariile laterală şi totală şi volumul piramidei. b) Dacă notăm unghiul muchiei SB cu planul bazei cu α şi al muchiei CS cu planul bazei cu β, să se demonstreze relaţia: ctg α + ctg $\beta=1$

R. a) $Al=1\ 075$ cm^2; $At=1\ 225$ cm^2; $V=1\ 750$ cm^3.

26. Să se determine a şi b astfel încît polinomul $P(x)=x^4+ax^3-x^2+bx+3$ împărţit la $x-2$ să dea restul 3 şi împărtit cu $x-1$ să dea tot restul 3.

R. $a=-2$; $b=2$.

27. Un cilindru cu înălţimea de 10 cm are baza înscrisă într–un trapez isoscel al cărui perimetru este de 40 cm, iar baza mică de 8 cm. Pe axa cilindrului se ia un punct N situat la distanţa x de baza cilindrului şi se scoate conul care are ca bază, baza cilindrului şi vîrful în N. 1) Să se exprime în funcţie de x volumul corpului rămas după scoaterea conului menţionat. 2) Să se alcătuiască tabloul de variaţie al funcţiei. 3) Să se construiască graficul acestei funcţii. (Se va lua 1 cm pentru 10π cm) 4) Să se determine x astfel încît corpul rămas să aibă un volum dat b cm^3. 5) Intre ce limite trebuie cuprins numărul b pentru ca problema să fie posibilă ?

R. 1) $V=240\pi-8\pi x$; $x\in[0,10]$. 5) $0\le x\le 10$ se obţine $160\pi\le b\le 240\pi$.

28. 1) Să se discute sistemul $\begin{cases} \dfrac{x}{m-1}+\dfrac{y}{m}=2, \\ 2x+3y=5m-2 \end{cases}$. 2) Să se găsească soluţia sistemului în cazul cînd sistemul este compatibil şi determinat. 3) Pentru ce valori ale lui m, x şi y reprezentînd soluţia sistemului, rădăcinile sînt invers proporţionale cu numerele 2 şi $\dfrac{3}{2}$?

R. 1) $m\neq 0$ şi $m\neq 1$ fracţiile să aibă sens. Pentru $m\neq -2$ sistemul este compatibil şi determinat. Pentru $m=-2$ sistemul este nedeterminat. 2) $x=m-1$; $y=m$; 3) $m=4$.

29. Se dă paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ în care $AB=AD=a$ şi $m(\sphericalangle CAC')=45^{\circ}$. La ce distanţă de A se găsesc proiecţiile ortogonale ale punctelor B, C, D pe diagonala AC' ?

Indicaţie. Se observă triunghiurile ABC' şi ACC'. Fie I proiecţia lui B pe AC': $AI=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a}{2}$. D şi B fiind simetrice în raport cu planul ACC', proiecţia lui D pe AC' coincide cu I. Fie K proiecţia lui C pe AC'; $AK=a$.

30. Ştiind că $x+y=a$ şi $xy=b$, să se calculeze în funcţie de a şi b expresiile: $a)$ x^2+y^2 ; $b)$ x^3+y^3 ; $c)$ x^4+y^4.

R. a) a^2-2b ; b) a^3-3ab ; c) $(a^2-2b)^2-2b^2$

31. Baza tetraedrului $SABC$ este triunghiul ABC în care latura BC este egală cu înălţimea $AD=a$. a) La ce distanţă de vîrful A trebuie să se ducă o paralelă MN la BC, pentru ca aria trapezului $MNCB$ să fie de trei ori mai mare decît aria triunghiului AMN ? b) Fie SA înălţimea tetraedrului$=2a$ şi $m(\sphericalangle ASD)=\alpha$. Să se arate că $\text{tg}\alpha+\text{ctg}\alpha=2\sqrt{2}$. c) Să se determine volumul tetraedrului dat.

R. $a^3/3$.

32. Se dă expresia: $f(x)=\dfrac{8(2x^3-6x^2+6x-4)}{(2x^2-2x+2)(x-2)^2}$. a) Să se determine mulţimea A ale cărei elemente sînt valorile lui $x\in\mathbf{Z}$ pentru care $f(x)$ este cuprinsă între -5 şi 9. b) Pentru ce valori ale elementelor mulţimii, $f(x)$ este un număr întreg?

R. $x\in\left(-\infty,\dfrac{2}{5}\right)\cup\left(\dfrac{26}{9},\infty\right)$; $M=\{-6;\ -2;\ 0;\ 1;\ 3;\ 4;\ 6;\ 10\}$.

33. Un paralelipiped dreptunghic are înălţimea egală cu b şi bazele $ABCD$ (respectiv $A'B'C'D'$) pătrate de latură a. Pe muchiile BB' şi DD' se iau segmentele BM, respectiv BN de lungime x. Să se studieze forma secţiunii definită de planul AMN în paralelipiped, în funcţie de x.

Indicaţie. Pentru $x\leq\dfrac{b}{2}$ secţiunea este un romb; $\dfrac{b}{2}<x<b$ (pentagon), dacă $x=b$ secţiunea este un triunghi isoscel.

34. Să se determine a şi b numere naturale ştiind că: $(1+a)(1-b)=10-2ab$.

R. $a=3$; $b=3$.

35. Să se determine valoarea numerică a expresiei:

$$y^2-1+4x^4y^2-4x^2y^2 \text{ ştiind că } x^2=\frac{1}{2}$$

R. -1

36. Să se determine x şi y (numere naturale) ştiind că: $(2-x)(2+y)+3xy=12$.

R. $x=2$; $y=2$; $x=0$; $y=4$.

37. Se dă o piramidă pătratică regulată cu vîrful V şi baza $ABCD$ ($VA=VB=$ $=VC=VD=a$) şi unghiurile de la vîrf ale feţelor laterale au măsurile de 30°. Se consideră linia ce porneşte din vîrful A şi merge pe toate feţele laterale pînă revine în punctul A (traseul se compune din segmente de dreaptă). Se notează cu B', C', D' punctele unde linia traversează respectiv muchiile VB, VC, VD. a) Să se desfăşoare pe un plan suprafaţa laterală a piramidei şi să se traseze pe ea linia parcursă. b) Cînd este drumul acesta cel mai scurt şi în acest caz să se afle lungimea lui? c) Să se afle măsurile unghiurilor sub care linia trasată taie muchiile laterale.

R. b) $a\sqrt{3}$; c) 120°; 90°; 60°

38. Să se arate în ce condiţii produsul a 3 numere consecutive este divizibil cu 24?

Indicaţie. Se ţine seamă că $n(n+1)(n+2)$ este divizibil cu 6 şi $2K(2K+1)(2K+2)$ se mai poate scrie $4K(K+1)(2K+1)$; $K\in\mathbf{N}$.

R. Primul număr să fie de forma $2K$.

39. Să se găsească toate numerele naturale x pentru care numărul x^4+4 este prim.

Indicaţie. Se va descompune expresia în doi factori şi se va pune condiţia ca unul din factori să fie 1; se găseşte că $x=1$.

40. Considerăm rotaţia completă a unui triunghi ABC în jurul tangentei în A la cercul circumscris. Să se exprime, aria corpului obţinut prin rotirea lui BC, cu ajutorul laturilor a, b, c ale triunghiului.

Indicaţie. Se obţine un trunchi de con. Ducînd înălţimea din A, se formează două triunghiuri asemenea cu triunghiurile formate de perpendicularele coborîte din B şi C pe tangentă cu laturile AB şi AC. Se găseşte: Aria laterala tr. con$=\dfrac{2\pi S(b^2+c^2)}{bc}$; ($S$=aria ΔABC). Dacă $m(\sphericalangle A)=90^{\circ}$, atunci aria corpului descris de BC este $a^2\pi$.

41. Se consideră polinomul cu coeficienţi întregi: $P(x)=ax^2+bx+c$. Să se arate că dacă pentru orice număr întreg m, restul împărţirii polinomului $P(x)$ prin $x-m$ este un multiplu de 3, atunci numerele a, b, c se divid prin 3.

42. a) Să se arate că expresia: $E=xy(xy-9)+2(x^2+y^2)+(x-y)(3xy-6)$ este divizibilă prin 4 oricare ar fi x şi y numere întregi. b) Să se simplifice fracţia: $\dfrac{E+4}{y^2+3y+2}$. c) Să se arate că $\dfrac{E+4}{x^2-3x+2}\cdot\dfrac{E+4}{y^2+3y+2}$ este divizibilă prin 4. d) Să se verifice identitatea:

$$\frac{E+4}{(x-1)(x-2)}=(y+1)(y+2).$$

Indicație. După desfacerea parantezelor se adaugă și se scade 4; se obține:

$x^2y^2+3x^2y+2y^2-3xy^2-9xy-6x+2x^2+6y+4-4$. Expresia se poate scrie : $(x-1)(x-2)(y+1)(y+2)-4$, care este divizibilă prin patru, fiindcă prima parte este produs de cîte 2 numere consecutive, deci se divide cu 4 și 4 este și el divizibil prin el însuși.

R. b) $(x-1)(x-2)$.

43. Să se arate că suma formată dintr–un număr pozitiv oarecare (diferit de 1) și inversul său este mai mare decît 2.

44. Să se determine mulțimea A ale cărei elemente sînt valorile lui x pentru care $f(x)=\frac{2x^2+16x-18}{x^2+5x-6}$ este un număr întreg și pozitiv.

Indicație. $f(x)=\frac{2(x+9)}{x+6}=\frac{2x+18}{x+6}=\frac{2x+12+6}{x+6}=\frac{2(x+6)+6}{x+6}=2+\frac{6}{x+6}$.

R. $A=\{-12;\ -5;\ -4;\ -3;\ 0\}$.

45. Se dă expresia : $f(x)=\dfrac{1+\dfrac{x}{2+\dfrac{1}{x}}}{x^4+4x^2+1}\cdot 8(x-1)^2$. Arătați că $f(x)$; $(x\in\mathbf{N})$ este ireductibilă.

46. Să se efectueze : $\dfrac{a^2+b+1-2a\sqrt{b}+2a-2\sqrt{b}}{a^2-b-1+2\sqrt{b}}-\dfrac{a-\sqrt{b}+1}{a+\sqrt{b}+1}$.

Indicație. Se transformă mai întîi termenii primei fracții în produse de factori.

R. 0.

47. Fie b aria bazei unei piramide, h înălțimea și b' aria secțiunii făcută printr–un plan paralel cu baza, la o distanță de vîrf egală cu o treime din înălțime. Să se demonstreze că volumul piramidei se poate exprima astfel : $V=\dfrac{h(b+3b')}{4}$.

Indicație. $b'=\frac{b}{9}$.

48. Să se simplifice : $\dfrac{x^2+2x+2x\sqrt{y}+y+2\sqrt{y}}{x^2-x+x\sqrt{y}-\sqrt{y}}\cdot\dfrac{x-1}{x+\sqrt{y}+2}$. R. 1.

49. Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x^2y+xy^2=30, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} \end{cases}.$$

R. $x=2;\ y=3;\ x=3;\ y=2;\ x=1;\ y=-6;\ x=-6;\ y=1$.

50. Să se arate că : $\dfrac{a^5+b^5+2a^4b+2ab^4+a^3b^2+a^2b^3}{(a+b)^2}>a^2b+ab^2$ pentru $a>0$ și $b>0$.

51. Să se demonstreze că dacă $a>0$; $b>0$; $c>0$, atunci:

a) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$:

b) $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$;

c) $ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c) \geq 6abc$.

Indicaţie. Se împarte cu abc şi se ştie că $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$.

52. Intr–un triunghi isoscel ABC, $[AB]\equiv[AC]$, construim $AD\perp BC$ ($D\in BC$) şi $DM\perp AC$ ($M\in AC$). Fie G mijlocul lui DM; $BM\cap AG=\{N\}$. Să se arate că $AN\perp BM$.

Indicaţie. Fie P mijlocul lui MC. Se observă cele trei înălţimi ale triunghiului ADP şi se ţine seamă că $DP||BM$ este linia mijlocie în triunghiul BMC.

53. Să se demonstreze următoarea inegalitate $a^2-ab+b^2 > 0$, cu condiţia: $a>0$; $b>0$.

Indicaţie. $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$.

54. Se dă expresia: $f(x)=\frac{x^5+x+1}{x^2+x+1}-x^3+2x^2+2x$.

Să se arate că oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$, $f(x)$ este pozitivă.

Indicaţie. Se efectuează împărţirea şi se observă cîtul şi împărţitorul.

55. Pe laturile AB şi AC ale triughiului ABC se construiesc în exterior, pătratele $ACDE$ şi $ABGF$. Fie AN mediană în triunghiul ABC ($N\in BC$), $NA\cap EF=M$. Să se arate că $MN\perp FE$.

Indicaţie. Fie A' simetricul punctului A în raport cu N. Se formează paralelogramul $ABA'C$; se studiză triunghiurile AEF şi $A'CA$ care sînt congruente; $m(\sphericalangle BAC)+m(\sphericalangle PAE)=180^\circ$.

56. Se dă un pătrat $ABCD$. Se construieşte pe latura BC ca bază, în interiorul pătratului, un triunghi isoscel OBC, avînd măsurile unghiurilor egale de 15° (fig.IX.2). Să se demonstreze că triunghiul OAD este echilateral.

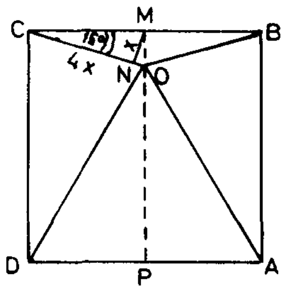


Fig.IX.2

Indicaţie. a) In triunghiul dreptunghic OMC, înălţimea $MN=x$ este a patra parte din $OC=4x$. b) Se exprimă în două moduri OM din care rezultă $16x^2-\frac{a^2}{4}=OM^2=4x \cdot ON$; dar $ON=4x-NC$ şi $NC^2=\frac{a^2}{4}-x^2$; reiese că $OP=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; rezultă că triunghiul AOD este echilateral.

57. Să se arate că dacă există relaţiile : $x^2+y^2+z^2=1$; $x+y+z=1$, atunci $xy+yz+zx=0$.

58. Se dau două cercuri de raze r_1 şi r_2, unul din ele avînd centrul O pe celălalt cerc. Tangenta într-un punct M, variabil pe cercul O, taie al doilea cerc în P şi Q. Să se demonstreze că $2r_1r_2=OQ\cdot OP$ (fig. IX.3).

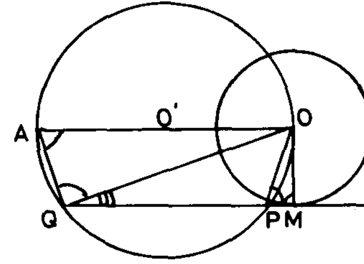


Fig.IX.3

59. Dîndu-se relaţiile: $x^3+y^3+z^3=1$; $x+y+z=1$. Să se arate că există egalitatea $(1-x)(1-y)(1-z)=0$.

Indicaţie. $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y)(x+z)(y+z)$.

60. Dacă $a+b-c=0$, atunci avem: $c^2-a^2-b^2=2ab$

61. Intr-un tetraedru regulat $SABC$ de muchie a şi vîrful S se face o secţiune printr-un plan, ce trece prin A, P, Q (P şi Q sînt situate pe SC respectiv SB) astfel încît $SP=2PC$ şi $SQ=2QB$. Să se afle aria secţiunii PAQ şi volumul piramidei $ABCPQ$ cu vîrful în A.

R. a) $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$ cm^2; b) $\frac{2a^3\sqrt{2}}{27}$ cm^3.

62. Fie piramida $VABCD$ cu baza un trapez $ABCD$, ($AD=BC=10$ cm şi baza mare $AB=15$ cm). Bisectoarea unghiului A intersectează diagonala BD în O; $VO=3$ cm este perpendiculară pe planul $ABCD$; $BO=6$ cm. Să se calculeze perimetrul ΔVOD.

R. 12 cm.

63. Laturile unui triunghi dreptunghic sînt: a, b, c (a fiind ipotenuza, iar h înălţimea dusă din vîrful unghiului drept). Dacă relaţia $a^2-4ah+h^2=0$ satisface un triunghi dreptunghic, atunci şi relaţia $b^4-4b^3c+3b^2c^2-4bc^3+c^4=0$ satisface triunghiul dat.

64. Intr-un triunghi ABC se duce prin B şi prin mijlocul O al medianei AD o dreaptă care taie pe AC în E. Să se arate că $\frac{AE}{EC}=\frac{1}{2}$ şi $\frac{OE}{OB}=\frac{1}{3}$.

65. Să se arate că dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi oarecare atunci există relaţia:

$$4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2>0.$$

66. Să se discute sistemul:

$$\begin{cases} \frac{x}{a-1}+\frac{y}{2a+1}=1, & a\neq 1 \text{ şi } a\neq -\frac{1}{2} \\ 4(x+y)=-12 . \end{cases}$$

R. $a\neq-2$ sistem compatibil şi determinat; $a=-2$ sistemul este nedeterminat.

67. Se dă o prismă ce are ca bază paralelogramul $ABCD$ cu perimetrul de 30 cm. Bisectoarele unghiurilor consecutive A şi B ale paralelogramului se intersectează în $M(M\in DC)$. Se ştie că lungimile MB şi MA sînt exprimate prin două numere naturale. Se mai ştie că muchia prismei drepte are lungimea de 3,6cm şi este congruentă cu

VM înălţimea piramidei ce are ca bază triunghiul *AMB*. Se cere:

a) volumul prismei; b) aria laterală a piramidei *VMAB*.

Indicaţie. ΔAMB dreptunghic are ipotenuza $AB=10$ cm. Notăm $MA=x$; $MB=y \Rightarrow 100-x^2=y^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow (10-x)(10+x)=y^2$, dar $x<10 \Rightarrow (10-x) \in \mathbf{N}$ este cuprins între 1 şi 9, iar $(10+x)$, $x \in \mathbf{N}$ cuprins între 9 şi 19. Prin încercări, numai 6 şi 8 dau un pătrat perfect.

R. a) $V=172{,}8$ cm^3; b) $Al=74{,}4$ cm^2.

68. Să se arate că dacă într-un triunghi *ABC*, două drepte *BM* şi *CN* ($M \in AC$); ($N \in AB$) se intersectează pe înălţimea *AD* ($D \in BC$), atunci această înalţime este bisectoarea unghiului *MDN*.

Indicaţie. $NN' \perp BC$; $MM' \perp BC$; $\Delta NN'D \sim \Delta MM'D$.

69. Se dă expresia : $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{x}}}}$.

a) Să se determine $x \in \mathbf{R}$ pentru care fracţia dată este negativă.

b) Să se determine x pentru care fracţia dată este un număr întreg negativ.

R. a) $\frac{3}{4}<x<\frac{4}{5}$; b) 0.

70. Se dă polinomul $P(x)=12x^3-40x^2+27x-5$. a) Să se determine a, b, c astfel încît $P(x)$ să poată fi pus sub forma $(3x-1)(ax^2+bx+c)$. b) Să se determine mulţimea valorilor lui x pentru care $P(x)=0$.

R. a) $a=4$; $b=-12$; $c=5$; b) $\left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right\}$.

71. Să se determine un polinom $P(x)$ de gradul trei în care x are coeficientul 1, ştiind că împărţind $P(x)$ la $x-1$; $x-2$; $x-3$, obţinem de fiecare dată restul 6.

R. x^3-6x^2+11x.

72. Să se demonstreze că un tetraedru regulat are două muchii perpendiculare.

73. Laturile unui triunghi cu măsura unui unghi de 60° sînt a, b, c. Să se arate că în acest caz, există relaţia : $a^2+b^2-c^2=ab$.

74. Să se determine x, y, z numere naturale care verifică egalitatea : $x^{y^z}=8$.

Indicaţie. Dacă $x=1$ egalitatea este imposibilă; dacă $x \geq 2 \rightarrow y^z \leq 3 \rightarrow y^z \in \{1,2,3\}$

R. (8,1,1) şi (2,3,1).

75. Se dă sectorul circular cu raza de 27 cm şi unghiul la centru de 60°. Se cere volumul conului ce are ca bază cercul înscris în sectorul dat şi înălţimea mai mare ca diametrul cercului de bază cu 0,1(6) din acesta.

R. $V=576\pi$ cm^3.

76. Se dă polinomul $f(x, y)=9x^4+12x^2y+6y^2-y^4-1$. Ce devine polinomul $f(x,y)$ dacă $3x^2+2y+y^2=1$.

R. $=0$.

77. Se dă un polinom $P(x)$ a cărui sumă a coeficienților este 0 și un alt polinom de gradul 1 000 a cărui sumă a coeficienților este 200. Să se afle suma coeficienților restului împărțirii polinomului de gradul 1 000 la $P(x)$.

R. 200.

78. In triunghiul dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A)=90^o$, se știe că $BC=2AC$. Să se arate că

$$\frac{(\sin B+\cos B)^2}{\operatorname{ctg} C}-\frac{6+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\cos C+\sin B.$$

79. Fiind dată mulțimea $M=\{0; 2; 3; 4; 5; 6\}$ și polinomul $f(a,b)=a^4-b^4-4a^2b+2b^2-1$, să se arate că dacă $a-b=1$, atunci valoarea numerică a polinomului $f(a,b)\in M$.

Indicație. Se descompune $f(a,b)$ într–un produs de trei factori.

R. $f(a,b)=0$.

80. Intr–un triunghi dreptunghic ABC, notăm cu O mijlocul ipotenuzei BC. $m(\sphericalangle B)>m(\sphericalangle C)$. Dreapta BC intersectează perpendiculara din A pe OA în D. Pe dreapta BD luăm segmentul $[DE]\equiv[AD]$ (D este situat între E și B).

a) Să se determine măsura unghiului CAE.

b) Să se arate că perpendiculara în A pe AE este bisectoarea unghiului BAC.

R. $m(\sphericalangle CAE)=135^o$.

81. Fiind dată egalitatea $3x+6y=95$. Să se arate că nu există soluții în mulțimea numerelor naturale care să satisfacă egalitatea.

82. Să se determine mulțimile A și B care îndeplinesc condițiile: $A\cup B=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $(B-A)\cdot(A-B)=\{(1,6); (1,8); (1,9); (5,6); (5,8); (5,9); (7,6); (7,8); (7,9)\}$.

Indicație. $B-A=\{1,5,7\}$; $A-B=\{6,8,9\}$. Dacă $B-A=\{1,5,7\}\Rightarrow\{1,5,7\}\subset B$ și $\notin A$. Dacă $A-B=\{6,8,9\}\Rightarrow\{6,8,9\}\subset A$ și $\not\subset B$ nu conține nici unul din aceste elemente. Să cercetăm cui aparțin 2 și 3. Dacă $2\in A$ și $2\notin B\Rightarrow 2\in A-B$ fals. Dacă $2\notin A$ și $2\in B\Rightarrow 2\in B-A$. Dacă $2\in A$ și $2\notin B\Rightarrow 2\in A-B$ și dacă $2\notin B-A\Rightarrow 2\in A\cap B$. Se cercetează analog și pentru 3; $3\in A\cap B$.

R. $A=\{2, 3, 6, 8, 9\}$; $B=\{1, 2, 3, 5, 7\}$.

83. Dacă $a>0$; $b>0$ și $a+b=1$, să se arate că $0\leq ab\leq\frac{1}{4}$.

Indicație. $(a-b)^2\geq 0$; $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$.

84. Să se arate că polinomul $16x^4+2^{99}-8^{33}-16x^2-3^{69}+27^{23}+3^{27}:27^9+23\geq 20$ oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$.

85. Un loc de formă circulară cu diametrul de 16 m este împărțit în 4 fîșii de aceeași lățime. Pe cele două fîșii din mijloc s–au plantat pomi iar pe celelalte două s–au semănat flori. 1) Prin cuplarea celor două fîșii semănate cu flori s–ar obține un teren

de forma unui cerc? (Justificaţi răspunsul.) 2) Să se calculeze aria fiecărei fâşii de teren.

R. Două fîşii de cîte 39,68 m^2. Două fîşii de cîte 60,80 m^2.

86. Să se arate că fracţia $f(x)=\dfrac{x^4+5x^2+4}{x^3+6x^2+11x+6}$; $x\in\mathbf{N}$, este periodică.

Indicaţie. $f(x)=\dfrac{(x^2+1)(x^2+4)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ din care se vede că numitorul este un multiplu de trei şi, ca $f(x)$ să fie periodică, trebuie ca numărătorul să nu fie $M3$.

87. Aria totală a unui con este egală cu aria laterală a unui cilindru a cărui rază este $\dfrac{11\pi}{9}$ din generatoarea sa. Conul a cărui arie laterală este de 10 cm^2 este obţinut dintr–un sector de cerc cu unghiul la centru de 36^o. Să se calculeze aria totală a cilindrului.

R. $\left(11+\dfrac{11^2\pi}{9}\right)$ cm^2.

88. Se dă expresia: $\dfrac{\left(\dfrac{x^2-x}{x^2+1}+\dfrac{2x^2}{x^3+x-x^2-1}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}{(27-125x^3):(25x^2+9+15x)}$.

Să se afle pentru ce valori ale lui x expresia $f(x)\le -1$.

R. $x\in\left[-\dfrac{1}{5};\ 0\right)\cup\left(\dfrac{3}{5};\ 1\right]$.

89. Fie cercul O si o coarda AB. Prin punctul M, mijlocul arcului AB se duc doua coarde arbitrare care intersectează coarda AB respectiv în E şi C iar cercul în D şi F. Să se arate că patrulaterul $DFEC$ este inscriptibil.

Indicaţie. $m(\sphericalangle MFD)+m(\sphericalangle DCE)=180^o$.

90. Să se arate că triunghiul ale cărui laturi x, y, z satisfac relaţia: $\dfrac{z-y}{x}+\dfrac{x-z}{y}-\dfrac{y-x}{z}=0$ este isoscel.

91. Fie mulţimile: $A=[-6,\ 0)\cup[5,\ 9)$; $B=(-4,\ 5]\cup(8,\ 20]$. Să se determine: $A\cap B$; $A\cup B$.

Indicaţie. Soluţia grafică $A\cap B=(-4,\ 0)\cup\{5\}\cup(8,\ 9)$; $A\cup B=[-6,\ 20]$ (fig. IX.4)

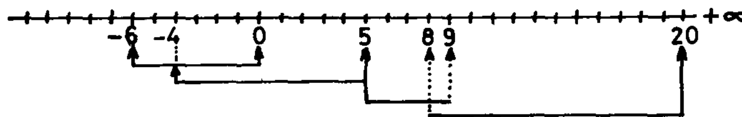


Fig.IX.4

92. In cercul O se duce diametrul AB; pe tangenta în A, se iau de o parte şi de alta a punctului A, două puncte arbitrare C şi D. Dreptele BC, BD taie cercul în punctele E şi F. Să se arate că patrulaterul $CDFE$ este inscriptibil.

93. La o împărţire deîmpărţitul a fost 11 897 şi restul 279. Se mai ştie că primul rest parţial este 247. Să se reconstituie împărţirea.

Indicaţie. Primul rest fiind 247, înseamnă că primul deîmpărţit parţial este 1 189, deci al doilea deîmpărţit parţial este 2 477 şi efectuînd împărţirea obţinem a doua cifră a cîtului şi restul 279.

2 477–279=2 198 care este divizibil cu împărţitorul, b fiind a doua cifră a cîtului, una din cifrele de la 1 pînă la 9. Se verifică uşor că $b=7$ şi $i=314$. Acum e uşor de aflat prima cifră a cîtului a, deci $\overline{ab}=37$ şi împărţitorul este 314.

94. Să se determine $x\in\mathbf{R}$ pentru care expresia $f(x)=\left[\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^2+1+\frac{4x-2}{x+1}\right]\cdot\frac{2x^2+x-1}{9x^2}$ este negativă.

R. $-1<x<\frac{1}{2}$.

95. Două cercuri se taie în A şi B. Tangentele în A la cele două cercuri le retaie în punctele C şi D. Ştiind că $AD=10$ cm; $BD=8$ cm şi $BC=2$ cm, să se calculeze AC.

R. $AC=5$ cm.

96. Se dă polinomul $f(x, y)=x^6y^2+2x^4y-2x^3y^2-2xy+y^2-3x^2$. Să se determine valoarea numerică a lui $f(x, y)$ pentru $x^3-1=0$.

R. $f(x,y)=-3$.

97. Se dau polinoamele: $\begin{matrix} E_1=2a^4x+8x(b^2+1)+a^4+4b^2+4 \\ E_2=(2ax+2b)^2-(x+2)^2 \end{matrix}$; $a\in\mathbf{R}$; $b\in\mathbf{R}$; $x\in\mathbf{R}$.

a) Să se arate că oricare ar fi a şi b, E_1 depinde numai de x dacă $E_1=0$.

b) Oricare ar fi x, să se determine a şi b pentru care $E_2=0$.

Indicaţie. $E_1=(2x+1)(a^4+4b^2+4)$ dar $a^4+4b^2+4\neq0$; $E_2=[x(2a+1)+2b+2][x(2a-1)+2b-2]$.

R. $E_2=0\Rightarrow b=1$; $a=\frac{1}{2}$ sau $a=-\frac{1}{2}$; $b=-1$.

98. Se dă $f(x)=\frac{3x^2-4x-4}{4x^2-7x-2}$. Pentru ce valori ale lui x, $f(x)$ se simplifică ?

R. $M5+1$.

99. Să se determine $x\in\mathbf{N}$ pentru care expresia $\frac{6x+5}{7x+4}$ se simplifică.

Indicaţie. Dacă două numere au un divizor comun şi diferenţa lor are acel divizor. $\left\{\begin{matrix} 7x+4-6x-5=x-1 \\ 42x+35-42x-24=11 \end{matrix}\right\}\rightarrow\frac{x-1}{11}$ ca să fie un număr întreg $x-1=M11\Rightarrow x=M11+1$.

100. Să se verifice egalităţile:

1) $M-(N\cup C)=(M-N)\cap(M-C)$,

2) $M-(N\cap C)=(M-N)\cup(M-C)$

pentru $M=\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$; $N=\{2; 4; 6; 8; 10\}$; $C=\{3; 6; 9\}$.

Indicaţii. 1) $N\cup C=\{2; 3; 4; 6; 8; 9; 10\}$, $M-(N\cup C)=\{1; 5; 7\}$, $M-N=\{1; 3; 5; 7; 9\}$, $M-C=\{1; 2; 4; 5; 7; 8; 10\}$. Deci $M-(N\cup C)=(M-N)\cap(M-C)=\{1, 5, 7\}$.

2) $N\cap C=\{6\}$;$(M-N)\cup(M-C)=\{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 10\}$. $M-(N\cap C)=M-\{6\}=\{1, 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 10\}$. Se verifică că $M-(N\cap C)=(M-N)\cup(M-C)=\{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 10\}$.

101. Se dă polinomul $f(a, b)=16a^4-8a^2b^2-4b^2+b^4-4b-1$.
Să se calculeze valoarea polinomului $f(a,b)$ pentru $2a-b=1$.

R. 0.

102. Se dă expresia $f(x)=\dfrac{3x+10}{2x+1}$. Să se determine mulțimea M ale cărei elemente sînt valorile lui $x\in\mathbf{Z}$ pentru care $f(x)$ se simplifică.

R. M 17–9.

103. Să se stabilească domeniul pe care inegalitatea este adevărată:

$$\left[\frac{x^4}{(x^2-1)^2}+\frac{2x^2}{1-x}\cdot\frac{x^2-1}{x}\cdot\frac{x}{x^3-x+x^2-1}+1\right]:\frac{1}{x^4-2x^3+2x-1}<0.$$

R. $x\in(-1,\ 1)\setminus\{0\}$.

104. Se dă prisma $ABCDA'B'C'D'$ cu baza un dreptunghi ale cărui dimensiuni sînt invers proporționale cu numerele 3/2 și 2. Lungimea dreptunghiului AB este cu 0,5 cm mai mare decît lățimea. Știind că planul $ABC'D'$ face cu planul bazei un unghi de 60°, să se afle volumul prismei.

R. $V=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ cm^3.

105. Dintr–un sector circular se confecționează un con cu unghiul de la vîrf de 90° în care $5/4\sqrt{2}$ din aria laterală este echivalentă cu aria totală a unui cilindru înscris în con a cărui rază este de 5 cm. Să se determine elementele sectorului de cerc din care s–a confecționat conul.

R. $m_{\text{unghi}}=180\sqrt{2}^\circ$; $R_{\text{cerc}}=8\sqrt{2}$ cm; $L_{\text{arc de cerc}}=16\pi$ cm.

106. Pentru ce valori ale lui $x\in\mathbf{R}$ expresia:

$$f(x)=\left[\frac{x^3-x^2-x+1}{(x^2-1)(x+1)}+\frac{1}{x}\right]\cdot\frac{x}{x^2+1}\cdot\frac{(8+x^3)^3}{x^4-2x^3+4x^2}:\frac{x+2}{x^2}$$ este negativă ?

R. $x\in(-\infty;\ -1)-\{-2\}$.

107. Fie trapezul $ABCD$ cu unghiurile de la bază de 30° și 45°. Se știe că jumătate din înălțimea trapezului este cu 1 cm mai mică decît 2/3 din baza mică și raportul dintre baza mică și înălțime este 3/2. Să se pună în evidență (schiță) corpurile ce se formează prin rotația trapezului în jurul laturii neparalele, corespunzătoare unghiului de 30° și să se calculeze elementele acestor corpuri.

108. Se dau expresiile:

$$A=\left(\frac{2x^2}{x^3-x^2+x-1}+\frac{x^2-x}{x^2+1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right),\quad B=\left[\frac{x}{x+1}-\frac{x^3}{x-1}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}\right)\right]\cdot\frac{x^2}{2x+1}.$$

Să se arate că $A/B<0$, oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$.

109. Dintr–un sector circular cu aria de 240π cm^2 şi unghiul la centru de 216^o se confecţionează un con. La 3/4 din înălţimea conului faţă de vîrf se face o secţiune paralelă cu baza. Să se calculeze aria sferei înscrisă în conul ce are ca bază cercul de secţiune.

R. 81π cm^2.

110. Să se determine mulţimea M ale cărei elemente $x, y\in \mathbf{N}$, ştiind că x şi y sînt numere consecutive neprime, astfel încît $xy < 80$.

R. $M=\{8; 9\}$.

111. Să se determine mulţimile A şi B cunoscînd că:

$$A\cup B=\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}; A\cap B=\{2, 3, 4, 5\}, 7\notin A-B;\ 6\notin B-A.$$

R. $A=\{2, 3, 4, 5, 6\}$; $B=\{2, 3, 4, 5, 7\}$.

112. Să se arate că dacă între laturile unui triunghi a, b, c există relaţia: $b^2(c^4+a^4-b^4)=c^2(a^4+b^4-c^4)$ atunci triunghiul este dreptunghic sau isoscel.

Indicaţie. Relaţia se mai poate scrie: $b^6-c^6-a^4(b^2-c^2)+b^2c^2(b^2-c^2)=0$ sau

$$(b^2-c^2)[(b^2+c^2)^2-a^4]=0.$$

113. Se consideră polinoamele:

$$P(x)=x^4+4ax^3+6bx^2+4cx+d,$$
$$Q(x)=x^3+3ax^2+3bx+c.$$

Dacă $P(x) \vdots Q(x)$ să se arate că $P(x)$ este un pătrat perfect, iar $Q(x)$ un cub.

Indicaţie. Dacă $P(x) \vdots Q(x)$ va rezulta un cît de gradul I, de exemplu $(x+m)$ şi va trebui să avem: $(x+m)(x^3+3ax^2+3bx+c)=P(x)$. Se compară coeficienţii şi se obţine: $m=a$; $b=a^2$; $c=a^3$; $P(x)$ devine: $x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4=(x+a)^4$ iar $Q(x)=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3=(x+a)^3$.

114. Să se arate că inegalităţile următoare nu pot fi simultan adevărate:

$$a+4 < 2b+c;\ a+2 > b;\ b+c < 1.$$

115. Să se arate că inegalităţile următoare nu pot fi simultan adevărate:

$$x+3 < 2y+2z;\ x-4 > y;\ y+2z < 3.$$

116. Să se determine mulţimile:

$$A = \{ x\in\mathbf{R} | x^2+|x|-12=0\};\ B=\{ x\in\mathbf{R} | x^2-|x|-6=0\}.$$

R. $A=B=\{-3;\ 3\}$.

117. Se dă inegalitatea următoare (în care $x\in\mathbf{N}$ şi $y\in\mathbf{N}$);

$$\frac{1}{xy^2}+\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^4}+\frac{2}{x-y^2}\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y^2}\right)}{(2xy^2-x^2-y^4):xy^2} \geq \frac{3-x^2-2x}{x+3}.$$

Să se arate în ce condiţii inegalitatea este adevărată.

R. $x \geq 1$.

118. Să se arate că fracţia $E=\dfrac{x^4+3x^2+2}{x^3+6x^2+11x+6}$ este periodică, $x\in\mathbf{N}^*$.

119. Un teren de forma unui triunghi dreptunghic cu un unghi de 15° este folosit astfel: 2/9 din suprafaţa lui şi încă un ar s–a amenajat pentru teren de sport, 5/13 din suprafaţa rămasă pentru construcţii şi restul de 0,08 ha pentru cultivat zarzavaturi. Se cere: a) să se determine cîţi metri pătraţi au acoperit terenurile pentru sport şi construcţii; b) perimetrul terenului. c) Ştiind că terenul rezervat pentru sport s–a amenajat pentru tenis şi pentru fotbal astfel încît suprafeţele lor sînt invers proporţionale cu numerele 5 şi respectiv 5/9, să se calculeze suprafeţele acestor terenuri.

R. a) 500 m^2; 500 m^2; b) $P\approx267$ m; c) 50 m^2 şi 450 m^2.

120. Să se determine $x\in\mathbf{N}$ pentru care propoziţia următoare este adevărată:

$$\frac{x^5+x^4+x^3-x^2-x-1}{(x^2+x+1)^2}\geq\frac{3x^6-x^{12}-1}{x^3-x^6+1}-x^6.$$

R. $x=0$.

121. Dacă $x\in\mathbf{N}$ să se arate că produsul fracţiilor:

$$\frac{x+2}{2};\quad\frac{x^3+x^2}{x^2+3x+2};\quad\frac{x+1}{x}$$ este un număr natural.

Indicaţie. $x^2+3x+2=x^2+2x+x+1+1$; produsul devine $\dfrac{x(x+1)}{2}$.

122. Se dă inegalitatea: $\dfrac{x^4+y^4-3x^2y^2}{2x^2-2xy-2y^2}-\dfrac{xy-2y^2}{2}>\sqrt{x^2y^2}$.

Să se arate că oricare ar fi $x\in\mathbf{R}_+$ şi $y\in\mathbf{R}_+$ inegalitatea este întotdeauna adevărată.

R. $(x-y)^2>0$.

123. Se dă propoziţia: $10x+12y=140$. Să se determine numerele x şi y astfel încît propoziţia dată să fie adevărată.

R. $x=2, y=10; x=8, y=5$.

124. Fie propoziţia $2x+5y=40$. Să se determine x şi y (numere naturale) astfel ca propoziţia să fie adevărată.

R. $x=0, y=8; x=5, y=6; x=10, y=4;$
$x=15, y=2; x=20, y=0$.

125. Să se arate că oricare ar fi $a\in\mathbf{R}_+$ şi $b\in\mathbf{R}_+$ propoziţia următoare:

$$\frac{2a^4b+6a^3\sqrt{b^3}+6a^2b^2+2a\sqrt{b^5}}{(a+\sqrt{b})^3(a+b)}<\sqrt{ab}$$ este adevărată.

Indicaţie. După simplificare se împarte în ambii membri cu $\sqrt{ab}$.

R. $(a-b)^2>0$.

126. Să se determine mulţimile A şi B, cunoscînd că:
$A\cup B=\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; $A\cap B=\{3, 4, 5\}$; $A-B=\{6, 8\}$.

R. $A=\{3, 4, 5, 6, 8\}$; $B=\{3, 4, 5, 7\}$.

127. Să se afle valoarea maximă a fracţiei : $y=\dfrac{3x^2-6x+7}{x^2-2x+2}$.

Indicaţie. Se scrie 7=6+1 şi 2=1+1 şi se obţine $y=3+\dfrac{1}{(x-1)^2+1}$; y va fi maxim cînd $(x-1)^2+1$ este minim, adică pentru $x=1$.

R. Valoarea maximă este 4.

128. Se dă egalitatea: $\sqrt{\dfrac{x^4+3y^2+2x^2y\sqrt{3}-y^4}{x^2-y^2+y\sqrt{3}}}=1$. Să se arate că dacă $\sqrt{3}+y=0$ atunci $x=\pm1$.

129. Fie $f(x)=\dfrac{2x^2-8x+20}{x^2-4x+8}$. a) Să se arate că $\forall x\in\mathbf{R}$, $f(x)$ este pozitivă.
b) Să se determine valoarea maximă a lui $f(x), x\in\mathbf{N}$.

R. 3.

130. Să se arate că oricare ar fi a,b,c (numere reale pozitive) inegalitatea:
$\dfrac{a^5+b^5+a^3b^2+a^3c^2+a^2b^3+b^3c^2}{a^3+b^3}>ab+ac+bc$ este adevărată.

Indicaţie. Se foloseşte inegalitatea $\dfrac{a^2+b^2}{2}>ab$.

131. Intr–un trapez dreptunghic $ABCD$ se cunoaşte baza mare $AB=5\sqrt{3}$ cm; $AD/BC=1/2$. Fie MB proiecţia lui BC pe AB astfel ca $MB/DC=1/4$. Se cere: a) să se construiască (schiţa) corpurilor ce se formează prin rotaţia completă a trapezului în jurul laturii neparalelele BC; b) să se calculeze elementele acestor corpuri.

R. Conul $AA'B$: $G=5\sqrt{3}$ cm, $R=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ cm, $I=7{,}5$ cm.
Conul $DD'C$: $G=4\sqrt{3}$ cm, $R=2\sqrt{3}$ cm, $I=6$ cm.
Trunchi con $ADD'A'$: $R=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ cm; $r=2\sqrt{3}$ cm; $G=1$ cm; $I=0{,}5$ cm.

132. Se dă piramida $VABCD$ cu baza paralelogramul $ABCD$ ale cărui diagonale $AC=20$ m şi $BD=16$ m se intersectează în O sub un unghi de 135°. Inălţimea piramidei VO este de $4\sqrt{2}$ m. Să se calculeze volumul piramidei.

R. $V=213\frac{1}{3}$ m^3.

133. Să se determine valoarea maximă a expresiei:

$$E=\frac{2x^2+4x+6}{x^2+2x+3}.$$

R. $E=2$.

134. Să se determine numerele naturale x şi y, astfel încît inegalitatea:

$$\frac{x^3+x^2(1+y)-y^2(1+x)-y^3}{x+y+1}:\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)>2$$

să fie adevărată.

Indicație. Expresia devine: $(x+y)xy > 2$.

R. $x>1; y>1$.

135. Se dă un con de rază 2 cm confecționat dintr-un sector de cerc cu un unghi la centru de 180°. Se cere: a) să se arate că acest con este echilater; b) raportul ariilor sferelor înscrise și circumscrise conului; c) aria calotei sferice determinată de o secțiune printr-un plan paralel cu baza conului la $\frac{\sqrt{3}}{8}$ cm de centrul sferei circumscrise; d) volumul conului cu vîrful în centrul sferei avînd ca bază cercul de secțiune a calotei.

R. b) $\frac{1}{4}$, c) $\frac{29\pi}{3}$ cm^2; d) $\frac{1015\sqrt{3}\pi}{8\cdot 9\cdot 64}$ cm^3.

136. Aria unui sector de cerc cu unghiul de 180° este de 450π cm^2. a) Să se arate că, conul format din acest sector este echilateral. b) Să se calculeze aria sferei înscrisă în acest con. c) Fără calcule, să se demonstreze că raza sferei înscrisă în conul menționat este a treia parte din înălțimea conului.

R. b) 300π cm^2.

137. Să se găsească cifra x care verifică relația: $\frac{\overline{1xx}}{\overline{xx5}}=\frac{1}{5}$ unde $\overline{1xx}$ și $\overline{xx5}$ sînt numere scrise în baza 10.

Indicație. $\frac{\overline{1xx}}{\overline{xx5}}=\frac{100+10x+x}{100x+10x+5}=\frac{1}{5}$.

R. $x=9$.

138. Să se arate că oricare ar fi a și b numere reale, pozitive, inegalitatea:

$$\frac{(a+b)^2+a(b+1)^2+b(1-a)^2}{a+b+ab+1} \geq \sqrt{4ab}$$

este adevărată.

R. $(a-b)^2 \geq 0$.

139. Se dă expresia:

$$f(x)=\frac{\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{2-\dfrac{x}{1+\dfrac{x}{2}}}}\right)}}{16-4x^2+x^4}\cdot\frac{\left(2-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}}\right)}{(5x-4):(4x-3)}.$$

Să se arate că oricare ar fi $x\in\mathbf{N}$, $f(x)$ este pozitivă.

R. $f(x)=\frac{1}{x(x^3+8)}$.

140. Să se determine valoarea expresiei: $3x^4-4x^2y+y^2+2x^2-1$ dacă x și y verifică relația: $x^2-y=-1$.

R. 0.

141. Se dă o prismă dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ cu baza paralelogram. Diagonala BD a bazei cu lungimea de a cm este perpendiculară pe latura AD, iar $m(\sphericalangle B)=150^{\circ}$. Planul determinat de muchiile opuse AB şi $C'D'$ formează cu planul bazei un unghi de 60°. Să se afle: a) diagonalele prismei; b) raportul dintre aria bazei $ABCD$ şi aria secţiunii $ABD'C'$; c) aria şi volumul prismei.

R. a) $\frac{a\sqrt{61}}{2}$ cm; $\frac{a\sqrt{13}}{2}$ cm; b) $\frac{1}{2}$; c) $a^2(6+5\sqrt{3})$ cm^2; $\frac{3\sqrt{3}a^3}{2}$ cm^3.

142. Să se determine mulţimea: $M=\{a\in\mathbf{Z}$ şi $b\in\mathbf{Z}$ astfel încît $a^2-b^2+2=0\}$.

Indicaţie. $a^2-b^2+2=0$ se poate scrie $b^2-a^2=2$; $(b-a)(b+a)=2$. Divizorii lui 2 în $\mathbf{Z}$ sînt ±1 şi ±2. Formăm sistemele de ecuaţii determinate de condiţiile $(b-a)(b+a)=2$.

$b-a=1$; $b-a=2$; $b-a=-1$; $b-a=-2$;
$b+a=2$; $b+a=1$; $b+a=-2$; $b+a=-1$.

Se constată că în toate situaţiile $a\notin\mathbf{Z}$ şi $b\notin\mathbf{Z}$, rezultă că $M=\varnothing$.

143. Se consideră expresiile: $E_1=\frac{x^2+1}{2}$; $E_2=\frac{x^2-1}{2}$; $E_3=x$.

a) Să se arate că $E_1\geq E_3$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$. b) Pentru ce valori ale lui x, E_1, E_2, E_3 pot reprezenta lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic?

144. Se dă $E=\frac{x^3+5x^2+x\sqrt{2}+5\sqrt{2}}{x^3-2x^2+x\sqrt{2}-2\sqrt{2}}$. a) Pentru ce valori ale lui x, $x\in\mathbf{N}$, E – este un număr întreg? b) Să se afle valoarea minimă a lui E.

R. a) $x=\{3, 9\}$; b) 2.

145. Să se determine numerele naturale x şi y care satisfac egalitatea:

$$\frac{4(x+y)}{(x+y)^2-(x-y)^2}=1.$$

R. $x=y=2$.

146. Se dă un tetraedru regulat de muchie a. 1) Să se determine înălţimea, apotema (piramidei) şi valoarea cosinusului unghiului dintre două feţe ale tetraedrului. 2) Să se determine distanţele unui punct oarecare de pe înălţimea tetraedrului la feţele laterale în funcţie de distanţa x a acestuia la planul bazei. a) Să se deducă de aici că suma distanţelor oricărui punct de pe înălţime la feţele tetraedrului este constantă. b) Să se determine punctul de pe înălţime, egal depărtat de toate feţele tetraedrului. 3) Să se arate că două muchii neaşezate pe aceeaşi faţă sînt perpendiculare.

R. 1) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$=apotema, $\frac{a\sqrt{6}}{3}$=înălţimea; $\frac{1}{3}$=cosinusul unghiului diedru.
2) $\frac{a\sqrt{6}-3x}{9}$; b) punctul de concurenţă a înălţimilor tetraedrului.

147. Să se arate că inegalitatea următoare este adevărată pentru orice a şi b reali, pozitivi şi $a\neq b\sqrt{2}$:

$$\left[\frac{a^2(a^3-3a^2b\sqrt{2}+6ab^2-2b^3\sqrt{2}}{a^2-2ab\sqrt{2}+2b^2}+b\sqrt{2}\right]+b^3 \geq a^2b+ab^2.$$

148. Pe planul pătratului $ABCD$ cu latura a se ridică perpendicularele $AM=\frac{a\sqrt{6}}{6}$ și $CP=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Se unește M cu P. 1) Să se demonstreze că planele triunghiurilor MBD și PBD sînt perpendiculare. 2) Să se calculeze volumul poliedrului $ABCDMP$. 3) Să se determine latura pătratului, notată cu a, știind că prin rotirea triunghiului COP (O fiind centrul pătratului $ABCD$), în jurul lui CP partea din con exterioară poliedrului $ABCDMP$ are volumul egal cu $4\pi\sqrt{6}$. (unități de volum).

R. 2) $V=\frac{2a^3\sqrt{6}}{9}$; 3) $a=4$.

149. Se dă piramida $SABC$ astfel ca $SA=SB=SC=a$; $m(\sphericalangle ASB)=60^\circ$; $m(\sphericalangle ASC)=90^\circ$; $m(\sphericalangle BSC)=120^\circ$. Se cere: 1) perimetrul triunghiului ABC; 2) să se arate că ΔABC este dreptunghic; 3) aria totală a piramidei; 4) volumul piramidei ce se formează făcînd o secțiune paralelă cu baza la distanța de $\frac{1}{4}$ din înălțime față de vîrf; 5) raportul volumelor celor două corpuri obținute.

R. 1) $a(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})$; 3) Aria $ASB=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; Aria $ASC=\frac{a^2}{2}$;

Aria $BSC=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; Aria $ABC=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$;

$At=\frac{a^2}{2}(\sqrt{3}+1+\sqrt{2})$. 4) $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{768}$; 5) $\frac{1}{63}$.

150. Să se găsească un polinom $P(x)$ de gradul doi știind că $P(0)=3$; $P(-1)=8$; $P(1)=4$.

R. $3x^2-2x+3$.

151. Fie M și N mulțimile ale căror elemente sînt soluțiile pentru $a\in\mathbf{N}$ și $b\in\mathbf{N}$ din egalitatea: $(a+2)(b+3)=2ab$. Să se determine $M\cap N$.

Indicație. Egalitatea devine $ab-3a-2b-6=0$. (In membrul întîi al ecuației este necesar să obținem un produs de factori iar în membrul doi un număr natural). Se adaugă și se scade numărul 12 și obținem: $(b-3)(a-2)=12$. Divizorii lui 12 în **N** sînt: 1, 2, 3, 4, 6, 12 și astfel obținem:

$\begin{cases} b-3=12 \\ a-2=1 \end{cases}$; $\begin{cases} b-3=1 \\ a-2=12 \end{cases}$ și așa mai departe.

R. $M\cap N=\{4, 5, 6\}$.

152. Să se determine cele mai mici baze de numerație x, y, z astfel încît să avem: $144_x=169_y=484_z$.

Indicație. Din egalitățile date rezultă $x>y>z>4$; $x^2+4x+4=y^2+6y+9=4z^2+8z+4$; $x+2=y+3=2z+2$.

R. $x=10$; $y=9$; $z=5$.

153. Să se determine x, y, z astfel încît $\overline{xyz}_5 - \overline{xy}_6 - \overline{yz}_7 - \overline{zx}_8 = 0$.

Indicaţie. Se obţine $18x-3y=8z$ dar din egalitatea iniţială rezultă că x, y, z sînt numere mai mici ca 5; 8 z trebuie să admită ca divizor pe 3 de unde rezultă că $z=3$; $18x-3y=24$ sau $6x-y=8$; procedînd analog obţinem $6x-8=y$, din care rezultă că y are divizori pe 2 şi 1; $y=4$; $x=2$.

R. $x=2$; $y=4$; $z=3$.

154. Fie paralelogramul $ABCD$ cu $m(\sphericalangle A)=60^\circ$, $AB=2AD$; M, N respectiv mijloacele laturilor AB şi DC. Fie P piciorul perpendicularei din B pe DC şi Q punctul de concurenţă al segmentelor AN şi BC. Să se arate că: a) AN, MP, BC sînt concurente; b) M, P, Q sînt coliniare.

Indicaţie. $MCQN$ paralelogram şi P este mijlocul lui NC.

155. Se dau expresiile:

$$A=1\,964^3+1\,965^3+1\,966^3-1\,967^3;\quad B=1\,998^3+1\,997^3+1\,998^2+1\,999.$$

Să se arate că $A+B$ este divizibil prin 2 şi $A \cdot B$ este divizibil prin 4.

Indicaţie. Se vor exprima algebric expresiile, apoi se vor observa numerele pare şi impare.

156. Fie A şi B două submulţimi ale mulţimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ şi $A \cap B = \{4, 6, 9\}$; $A \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$; $B \cup \{4, 8, 9\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
Să se determine submulţimile A şi B.

R. $A=\{1, 4, 6, 9, 8\}$; $B=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

157. Cu suma de 129 lei s–au cumpărat 18 caiete de 4 lei bucata, 7 lei bucata şi 18 lei bucata. Cîte caiete s–au cumpărat de fiecare fel?

Indicaţie. $129-18\cdot 4=57$ lei, reprezintă diferenţele de la 4 lei la 7 lei şi la 18 lei. Se ţine apoi seama că $57-12c > 0$.

R. 10 caiete de 4 lei, 5 caiete de 7 lei, 3 caiete de 18 lei.

158. Se dă fracţia: $f(x)=\dfrac{x^{12}+x^6+x^5+x^3}{x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-x^5+2x^4-x^3+x^2}$.

Să se arate că dacă $x \in \mathbf{N}^*$ atunci $f(x)$ este divizibilă cu 2.

Indicaţie. Se adună şi se scade aceeaşi expresie la numărător, pentru a se obţine factor comun x^2+1; sau se ţine seama că $x^6+1=(x^2+1)(x^4-x^2+1)$.

159. Se dă polinomul $f(n, y)=n^2y^4-2ny^6-n^2+2n+y^8$. Să se determine valoarea numerică a lui $f(n, y)$ pentru $n-y^2=1$.

R. $f(n, y)=1$.

160. Fie $P(x)=x^3+6x^2+11x+6$ în care $x \in \mathbf{N}$. Să se arate că $P(x)$ este divizibil cu 6.

Indicaţie. Se descompune $P(x)$ în produs de factori scriind: $P(x)=x^3+3x^2+3x^2+2x+9x+6$ sau se va observa că $P(x)$ se divide prin $x+1$ şi dă cîtul $(x+2)(x+3)$.

161. Se dă expresia $f(x)=ax^2+bx+c$. Să se arate că dacă $a+b+c=0$, atunci $f(x)$ se divide cu $x-1$.

162. Fiind dată expresia $f(x)=x^3+3x^2+2x+1$ în care $x\in\mathbf{N}$, să se arate că $f(x)$ este impar.

Indicație. Se va studia $f(x)$ cînd $x=2K$ şi $x=2K+1$.

163. Fără a se efectua împărţirea să se determine cîtul şi restul împărţirii

$$(x^3+2x^2+x+5):(x^2+1).$$

Indicație. Se va studia deîmpărţitul scris sub forma $x^3+2x^2+x+2+3$.

R. $x+2$ rest 3.

164. Se dă expresia $f(x)=x^3+8x^2+17x+10$. Să se descompună în factori $f(x)$, folosind teorema lui Bézout, şi să se arate că $f(x)$ este divizibil cu 2 dacă $x\in\mathbf{N}$.

R. $(x+1)(x+2)(x+5)$.

165. Se dă expresia $f(x)=9x^4-6x^3+x^2+1$ în care $x\in\mathbf{N}$. a) Să se afle cîtul şi restul lui $f(x)$, prin împărţirea la $3x^2-x$ fără a efectua împărţirea. b) Să se arate că $f(x)$ este pozitiv cînd $x\in\mathbf{R}$.

Indicație. Se studiază expresia $9x^4-6x^3+x^2$.

R. a) Cîtul este $3x^2-x$, restul 1.

166. Să se arate că expresia $f(x, y)=(x^3+x^2+y^4)(x^3+x^2+y^4+4)+4$ este un pătrat perfect oricare ar fi x şi y numere naturale.

167. Fie trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$. Să se afle aria secţiunii $ABC'D'$, ştiind că $AB=3a$; $A'B'=a$ iar înălţimea trunchiului de piramidă este $OO'=2a$.

R. $4a^2\sqrt{2}$.

168. a) Să se arate că orice număr natural diferit de 1, impar, este diferenţa pătratelor a două numere întregi. b) Să se arate că diferenţa cuburilor a două numere naturale consecutive, este întotdeauna un număr impar. c) Cunoscînd că, k este un număr natural, să se calculeze $(-1)^k+(-1)^{k+2}$.

Indicație. a) $2k+1=(k+1)^2-k^2$; b) $(k+1)^3-k^3=3k(k+1)+1$.

R. c) 2; –2.

169. In triunghiul dreptunghic ABC, $m(\sphericalangle A)=90^\circ$, cu laturile $AB=c$; $BC=a$; $AC=b$ să se arate că $\sin^n B+\cos^n B<1$ dacă $n>2$.

Indicație. Dacă $n>2$, $\sin^n B<\sin^2 B$; $\cos^n B<\cos^2 B$.

170. Intr–un săculeţ sînt 10 bile albe, 12 bile negre şi 16 bile roşii. Care este numărul cel mai mic de bile pe care trebuie să–l scoatem din săculeţ fără a ne uita în săculeţ, pentru ca să avem certitudinea că am scos trei bile de aceeaşi culoare.

R. 7 bile.

171. Se dă polinomul $f(x)=x^4+ax^3+bx^2-cx-6$. Să se determine $a, b, c\in\mathbf{R}$ astfel ca $f(x)$ să fie divizibil cu $(x+1)(x+2)(x+3)$.

Indicație. Se va folosi teorema lui Bézout sau metoda coeficienţilor nedeterminaţi.

R. $a=b=c=5$.

172. Se dă pătratul cu latura a şi 5 puncte oarecare în interiorul acestui pătrat. Să se arate că există cel puţin două puncte a căror distanţă este mai mică decît $a\sqrt{2}/2$.

Indicaţie. Impărţim pătratul în patru pătrăţele egale şi repartizăm punctele în cele 4 pătrăţele.

173. Fie un cub cu latura 1. Să se arate că oricum am alege 28 de puncte interioare, cel puţin două dintre ele au distanţa mai mică decît $\frac{\sqrt{3}}{3}$ sau egală cu $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Indicaţie. Impărţim fiecare muchie a cubului în cîte 3 părţi egale şi prin punctele de diviziune ducem plane paralele cu feţele cubului obţinînd 27 cubuleţe.

174. Se dă expresia $f(x)=\frac{(x^2+2x+3)^3-1}{(x^2+2x+4)^3+1}$. Să se arate că $f(x) \geq \frac{1}{4}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Indicaţie. $x^2+2x+3=y$; $x^2+2x+4=x^2+2x+3+1$; $x^2+2x+3+2=(x+1)^2+4$ ce are ca minim valoarea 4.

175. Se dau mulţimile: $A=\{1, 2, 3, 4\}$; $B=\{3, 4, 5, 6\}$. Să se determine mulţimea X astfel ca să avem $(A-X) \cup (X-A)=B$.

R. $X=\{1, 2, 5, 6\}$

X. TEME PENTRU CERCURILE DE MATEMATICĂ

X.1. SISTEME DE NUMERAȚIE

Sistemul de numerație obișnuit este sistemul zecimal. Zece unități de un ordin formează o unitate de ordin imediat superior.

Pentru scrierea numerelor din acest sistem se folosesc zece cifre 0, 1, 2, 3,.., 9.

Dar se pot folosi și alte sisteme de numerație, în care o unitate de un ordin oarecare să fie formată din două, trei... unități ale ordinului imediat inferior; avem atunci, de exemplu, un sistem cu baza 2 (binar), cu baza 3, baza 8, baza 16,...

Numărul cifrelor necesare într–un sistem este egal cu baza. Astfel în sistemul cu baza trei se vor întrebuința trei cifre 0, 1 și 2; în sistemul cu baza 7 se vor întrebuința 7 cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.In sistemul cu baza 2, se folosesc numai cifrele 0 și 1. Acest sistem este folosit la mașinile electronice de calcul.

Trecerea de la o bază de numerație la alta.

1. Să se scrie $N=325_6$ în sistemul zecimal;

$$N=3\cdot 6^2+2\cdot 6+5=108+12+5=125_{10}$$

$$N=325_6=125_{10}=125^*$$

2. Să se scrie $N=125$ în sistemul cu baza 6:

$$\frac{125\,|\,6}{5\,|\,20};\quad \frac{20\,|\,6}{2\,|\,3}\ \text{deci}\ N=125=325_6.$$

---

* Cînd numărul este scris în baza 10, nu vom mai indica baza.

3. Să se scrie $N=4215_6$ în baza 5.

Il trecem pe N în baza 10, apoi în baza 5:

$$4215_6=4\cdot 6^3+2\cdot 6^2+1\cdot 6+5=864+72+6+5=947.$$

$$\frac{947|5}{2|189};\ \frac{189|5}{4|37};\ \frac{37|5}{2|7};\ \frac{7|5}{2|1}.\ N=4215_6=947=12242_5.$$

4. **Să se scrie în sistemul cu baza 6 numarul 358, scris în sistemul zecimal.**

R. 1354_6.

5. **Să se scrie în sistemul cu baza 5 numărul 99, scris în sistemul zecimal.**

R. 344_5.

6. **Să se scrie în sistemul cu baza 2 numărul 401, scris în sistemul zecimal.**

R. 110010001_2.

7. **Să se scrie în sistemul cu baza 8 numărul 1004, scris în sistemul zecimal.**

R. 1754_8.

8. **Să se scrie în sistemul cu baza 10 următoarele numere scrise în diferite baze:**

$N_1=3428_9$; $N_2=450_8$; $N_3=1101001_2$; $N_4=1022_3$.

R. $3428_9=2537; 450_8=296; 1101001_2=105; 1022_3=35$.

9. **Să se scrie în sistemul cu baza 5 numărul 458 scris în baza 9.**

R. $458_9=377=3002_3$.

10. **Să se scrie în sistemul cu baza 3 numărul 505 scris în baza 8.**

R. $505_8=325=110001_3$.

11. **Să se scrie în sistemul cu baza 2 numărul 40 scris în baza 7.**

R. $40_7=28=11100_2$.

12. **Să se scrie în sistemul cu baza 6 numărul 10010000 scris în baza 2.**

R. $10010000_2=144=400_6$.

13. **Să se simplifice fracția următoare, scriind rezultatul în sistemul zecimal.**

$$\frac{143+220_3+10000_2}{11_7}.$$

R. 11.

14. **Să se simplifice fracția următoare, scriind rezultatul în sistemul zecimal.**

$$\frac{236_7+113_4-16}{202_3}.$$

R. $\frac{33}{5}$.

15. **Să se simplifice fracția, scriind rezultatul în baza 2.**

$$\frac{451_6-6_{10}+10002_3}{100_2}.$$

R. 111111_2.

16. Să se simplifice fracția următoare, scriind rezultatul în baza 8 de numerație.

$$\frac{142_5+1111_2+5001_6-3_{10}}{42_{10}-53_7}.$$

R. 435_8.

17. Să se verifice dacă egalitatea următoare este adevărată, numerele fiind scrise în baza 6 de numerație:

$$\left(30\cdot 40-\frac{1220}{2}\right)\cdot 5=10310.$$

18. Idem, numerele fiind scrise în baza 3 de numerație:

$$2\left[(120\cdot 100)+\frac{22\cdot 10}{2}-(101\cdot 11)\right]=21221.$$

19. Idem, numerele fiind scrise în baza 9 de numerație:

$$(3^2+4^2+12^2)\cdot(30-16)=2356.$$

20. Idem, numerele fiind scrise în sistemul binar:

$$(1+10+11+100)\cdot\frac{10000}{10}=1\,010000.$$

21. În care sistem de numerație avem egalitatea următoare:

$$22\cdot 160=3740?$$

Indicație. Pentru baza b trebuie să avem $2<b<10$.

R. Baza este 8.

22. În care sistem de numerație avem egalitatea următoare:

$$5\cdot 61=425?$$

R. Baza este 7.

23. Să se rezolve ecuația: $x+\dfrac{3x-100_3}{101_2}=11_3-\dfrac{5x-15_7}{3}$, în care numerele fără indici sînt considerate în baza 10 de numerație.

R. $x=3$.

24. Să se rezolve ecuația: $\dfrac{1}{12}(3x-4)+\dfrac{1}{3}(10x+3)=133-10x$ toate numerele fiind scrise în baza 5, să se dea răspunsul în baza 5, apoi în sistemul binar.

R. $x=11_5=110_2$.

25. Să se rezolve ecuația: $x^2-12x+\sqrt{1100}=0$, numerele fiind scrise în sistemul trinar, soluțiile se vor da în aceeași bază.

R. $x'=2$; $x''=10$.

26. Să se rezolve ecuația: $\dfrac{12_5}{x^2-1}+\dfrac{1000_2}{x^2-2x+1}=\dfrac{1101_3-10_9\,x}{x^3-x^2-x+1}$. Soluția se va scrie în baza 10.

R. $x=\dfrac{3}{2}$.

27. Un număr scris în baza 2 este $N=10110001$. In ce bază, acelaşi număr, se scrie $N=342$?

Indicaţie. In sistemul zecimal, să scriem un număr punînd în evidenţă puterile lui 10, adică puterile bazei, de exemplu:

$$7\,542=7\cdot1\,000+5\cdot100+4\cdot10+2=7\cdot10^3+5\cdot10^2+4\cdot10+2$$

deci $N=342$ se poate scrie $3x^2+4x+2$ în care s-a notat cu x baza necunoscută a sistemului nou de numeraţie.

R. Baza este 7.

28. Să se rezolve ecuaţia următoare, în care necunoscuta este baza unui sistem de numeraţie: $110110_2=312_x$.

R. Baza este 4, $x=4$.

29. Să se rezolve ecuaţia: $91_3-1020_{x^2}+88_9=100100_2$.

R. $x=2$.

30. Să se aducă expresia următoare la forma cea mai simplă (indicii x şi y sînt baze de numeraţie, iar numerele fără indici se consideră în sistemul zecimal):

$$\frac{11x}{11y}:\left(1-\frac{1}{12_x}\right)\cdot7(11_y).$$

R. $7(x+2)$

X.2. GENERALIZAREA ŞI DISCUŢIA PROBLEMELOR

La rezolvarea problemelor de matematici, elevii se mulţumesc –de multe ori– să considere ca juste soluţiile găsite pentru necunoscutele problemei, fără a analiza dacă rezultatele sînt posibile, dacă aceste rezultate pot ocaziona unele interpretări sau generalizări.

Pentru a înlătura această tendinţă cît şi pentru a forma deprinderea de a generaliza şi discuta problemele, vom da cîteva exemple de generalizare şi discuţie a problemelor.

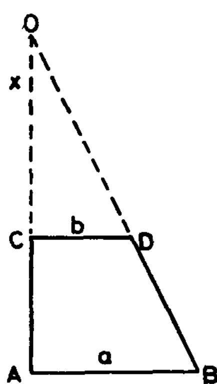


Fig.X.1

1. Se dă un trapez $ABCD$, în care unghiurile A şi C sînt drepte (fig.X.1); se prelungesc laturile AC şi BD pînă se întîlnesc în O. Se cere distanţa $CO=x$ ştiind că: $AB=a$, $CD=b$, $AC=i$.

Obţinem $x=\dfrac{bi}{a-b}$.

Discuţie.

Dacă $a=b$, valoarea lui x devine: $x=\dfrac{bi}{0}$,

conducînd la o operaţie fără sens; în acest caz trapezul devine un dreptunghi şi laturile AC şi BD sînt paralele.

Dacă $b=0$, vom avea $x=0$, atunci trapezul se schimbă într-un triunghi şi prin urmare distanţa de la C la punctul de întîlnire este 0.

2. Peste cîţi ani vîrsta tatălui va fi de trei ori vîrsta fiului, dacă acum tatăl are 56 de ani şi fiul 30 de ani ?

Notăm cu x numărul de ani peste care vîrsta tatălui va fi de trei ori cît a fiului.

Ecuaţia problemei este: $56+x=3(30+x)$.

R. $x=-17$.

Răspunsul arată că fenomenul a avut loc în trecut, acum 17 ani. In adevăr, atunci tatăl avea 39 ani, fiul 13 ani şi vîrsta tatălui era întreitul vîrstei fiului.

Cazul general.

Peste cîţi ani vîrsta tatălui va fi de n ori vîrsta fiului, dacă acum tatăl are a ani şi fiul are b ani în ipoteza $n>1$?

Ecuaţia problemei este: $a+x=n(b+x)$, cu soluţia: $x=\frac{a-nb}{n-1}$, şi putem avea 3 cazuri.

1) dacă $a-nb>0$, atunci $x>0$ şi fenomenul va avea loc în viitor;
2) dacă $a-nb<0$, atunci $x<0$; adică fenomenul a avut loc în trecut (ca în exemplul numeric de mai sus);
3) dacă $a-nb=0$, $x=0$ în prezent, vîrsta tatălui este de n ori vîrsta fiului.

3. Doi curieri merg pe distanţa de la D la E cu mişcare uniformă, unul avînd viteza v şi altul v'. Intr-un moment oarecare cel dintîi se află în punctul A şi cel de-al doilea în punctul B (fig. X. 2). La ce depărtare de punctul B se vor întîlni ?

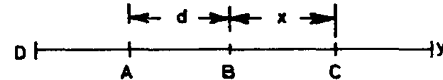


Fig.X.2

Pentru a pune problema în ecuaţie, să presupunem că ei merg amîndoi în acelaşi sens şi fie C punctul unde se întîlnesc. Notăm prin x distanţa BC şi prin d distanţă fixă cunoscută AB; v fiind viteza primului curier şi t timpul necesar sosirii în C, avem $d+x=vt \Rightarrow t=\frac{d+x}{v}$ (1). Cel de-al doilea curier ajunge în C în acelaşi timp t. Notînd viteza lui cu v' obţinem: $x=v't$ (2). Eliminînd pe t între relaţiile (1) şi (2) avem:

$$\frac{x}{v'}=\frac{d+x}{v} \Rightarrow x=\frac{dv'}{v-v'}.\ (3).$$

Discuţie.

b) Presupunem că $v<v'$; din formula (3), obţinem în acest caz, pentru x o valoare negativă. Inseamnă că întîlnirea a avut loc înainte de a ajunge curierii în A şi B, adică în partea stîngă a punctului B, căci din moment ce ei sînt în A şi B, cel de-al doilea mergînd mai repede se va depărta mereu de cel dintîi, aşa că ei nu se pot întîlni la dreapta lui B.

c) Dacă $v=v'$, valoarea lui x în acest caz devine $\frac{dv'}{0}$, ceea ce conduce la o imposibilitate; cei doi curieri nu se întîlnesc niciodată. Aceasta este evident, deoarece ambii deplasîndu-se în aceeaşi direcţie, cu aceeaşi viteză, distanţa dintre ei rămîne mereu d.

d) Dacă $v=v'$ şi presupunem $d=0$, în această situaţie valoarea lui x are forma $\frac{0}{0}$, adică este un caz de nedeterminare, ceea ce se înţelege, căci ei, aflîndu-se în acelaşi punct într-un moment dat şi avînd aceeaşi viteză, se găsesc mereu împreună.

e) Dacă $v \neq v'$ şi $d=0$, avem $x=\dfrac{0}{v-v'}=0$. In acest caz, punctul lor de întîlnire este în *B*, care devine punct comun de plecare.

f) Dacă ei ar fi mers în sens contrar (unul către altul), atunci întîlnirea s–ar face între *A* şi *B*, şi dacă se notează ca şi mai sus cu *x* distanţa de la *B* la punctul de întîlnire, obţinem ecuaţia:

$$\frac{d-x}{v}=\frac{x}{v'} \text{ deci } x=\frac{dv'}{v+v'}. \quad (4)$$

Considerînd viteza v' ca pozitivă, cînd mişcarea celui de–al doilea se fece spre dreapta şi ca negativă cînd mişcarea se face în sens opus şi dacă luăm distanţa socotită spre dreapta punctului *B* ca pozitivă şi cele socotite spre stînga ca negative, vom recunoaşte că formula (4) este conţinută în formula (3). Prin urmare, formula $x=\dfrac{dv'}{v-v'}$ se aplică în ambele cazuri ale problemei. De aici se poate vedea cum, introducînd cantităţile negative ca date ale unor probleme, putem să generalizăm problemele, adică cu o singură formulă, găsită pentru unul din cazurile problemei,putem să studiem toate celelalte cazuri.

4. Circumferinţa roţii din faţă a unei trăsuri este *k* metri, circumferinţa roţii din spate este de *l* metri. Pe ce distanţă va face roata din faţă cu *u* învîrtituri mai mult decît cea din spate?

Notăm distanţa parcursă cu *x*. Ecuaţia problemei este: $\dfrac{x}{k}-u=\dfrac{x}{l}$, de unde $x=\dfrac{lku}{l-k}$.

a) Ce fel de mărimi sînt *l, k* şi *u* ?

Dacă $x<0$ cînd $l-k<0$, deci $l<k$, ce putem spune despre raza roţii din spate în raport cu cea din faţă ? Discuţia rămîne pe seama cititorului.

5. Un trapez dreptunghic cu bazele *a* şi *b* $(a>b)$ şi înălţimea *i* se roteşte în jurul bazei mici, apoi în jurul bazei mari. 1) Să se calculeze raportul dintre volumele acestor corpuri, stabilind dacă acest raport este mai mare sau mai mic decît 1. 2) Ce relaţie trebuie să existe între *a* şi *b* ca acest raport să fie 3/2 ? 3) In acest caz, acest raport este egal cu 1 ? Interpretaţi geometric rezultatul. 4) In ce caz, acest raport este egal cu 2 ? Interpretaţi geometric.

R. 1) Raportul este $\dfrac{2a+b}{a+2b}$; 2) $a=4b$;
3) $a=b$ atunci trapezul devine dreptunghi şi este indiferent în jurul cărei laturi de bază se roteşte;
4) $b=0$, trapezul se reduce la un triunghi.

X.3. PROBLEME DE COLINIARITATE

Printre problemele de geometrie plană, interesante sînt problemele de coliniaritate. Metodele de rezolvare folosite la aceste probleme sînt variate. In cele ce urmează prezentăm cîteva probleme de coliniaritate rezolvate.

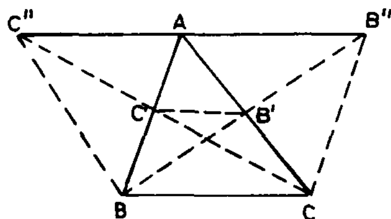


Fig.X.3

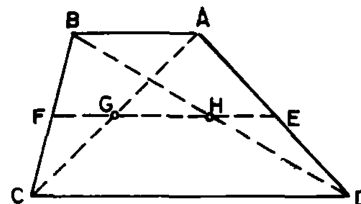


Fig.X.4

1. Să se demonstreze că simetricele vîrfurilor B şi C ale unui triunghi ABC faţă de mijloacele laturilor AC şi AB (respectiv) sînt coliniare cu vîrful A.

Rezolvare. Fie B'' şi C'' simetricele vîrfurilor B şi C faţă de mijloacele B' şi C' ale laturilor AC şi AB (fig.X.3). Patrulaterul $ABCB''$ este paralelogram, deoarece diagonalele AC şi BB'' se taie în părţi egale, conform construcţiei. Rezultă că $AB'' \parallel BC$. In mod analog, se demonstrează că patrulaterul $ACBC''$ este paralelogram şi rezultă $AC'' \parallel BC$. Prin urmare, prin vîrful A trec două paralele cu BC şi anume AB'' şi AC''. Ele nu pot fi diferite, ca direcţie, conform *postulatului lui Euclid*; aceasta înseamnă că punctele C'', A şi B'' sînt coliniare.

2. Să se arate că mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez şi mijloacele diagonalelor sînt patru puncte coliniare.

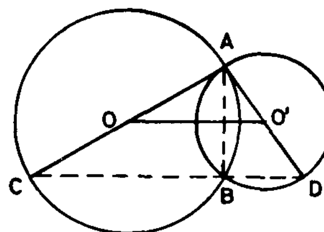


Fig.X.5

Rezolvare. In triunghiul ABC, FG fiind linie mijlocie avem $FG \parallel AB$ (fig.X.4). In triunghiul BCD, FH este linie mijlocie şi avem: $FH \parallel CD$. Bazele trapezului fiind paralele rezultă că prin punctul F trec două paralele la aceeaşi direcţie; ele nu pot fi diferite conform *postulatului lui Euclid*, deci punctele F, G, şi H sînt coliniare. Cu o demonstraţie analoagă obţinem că şi punctul E se găseşte pe aceeaşi dreaptă cu primele trei puncte, adică cele patru puncte considerate sînt coliniare.

3. Două cercuri O şi O' sînt secante în A şi B. Prin A se duc diametrele AC şi AD ale celor două cercuri. Să se demonstreze că punctele C, B şi D sînt coliniare.

Rezolvare. Unghiul ABC este drept fiind înscris într–un semicerc; aceeaşi observaţie pentru unghiul ABD (fig.X.5). Unghiurile adiacente ABC şi ABD fiind suplimentare rezultă că au laturile necomune în prelungire, adică punctele C, B şi D sînt coliniare.

4. Se consideră un trapez isoscel $ABCD$. Să se demonstreze că punctul de intersecţie al diagonalelor, centrul cercului circumscris şi punctul de intersecţie al laturilor neparalele ale trapezului sînt trei puncte coliniare.

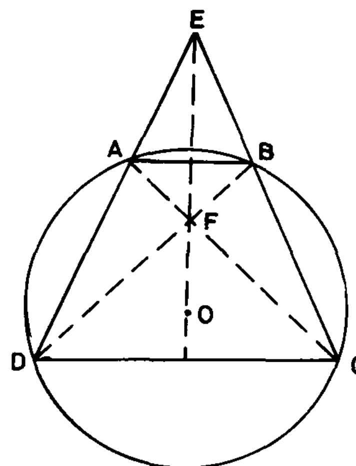


Fig.X.6

Rezolvare. Se analizează proprietatea fiecărui punct şi se observă o însuşire comună. Intr-adevăr:

1) centrul O al cercului circumscris este echidistant de punctele C şi D (situate pe cerc) (fig. X.6);

2) punctul F de intersecţie al diagonalelor este echidistant de punctele C şi D (proprietatea diagonalelor trapezului isoscel);

3) punctul E de intersecţie al prelungirilor neparalele este echidistant

de punctele C şi D, deoarece triunghiul CDE este isoscel. Prin urmare, punctele O, E şi F aparţin mediatoarei segmentului CD care este locul geometric al tuturor punctelor cu această proprietate.

S–a recunoscut o dreaptă–loc geometric care conţine cele trei puncte considerate, adică punctele sînt coliniare.

5. Să se demonstreze că dacă se proiectează unul dintre vîrfurile unui triunghi pe bisectoarele interioare şi exterioare ale unghiurilor corespunzătoare celor două vîrfuri ale triunghiului se obţin, pe aceste bisectoare, patru puncte coliniare.

Rezolvare. Patrulaterul $ADBF$ este dreptunghi, conform enunţului, şi centrul său de simetrie (M) este la mijlocul laturii AB (fig.X.7). Se demonstrează că diagonala DF a dreptunghiului este paralelă cu BC şi deoarece această diagonală trece prin mijlocul laturii AB rezultă că DF are direcţia liniei mijlocii a triunghiului ABC. Analog pentru EG, diagonala dreptunghiului $AECG$. Prin urmare, punctele D, E, F şi G sînt situate pe aceeaşi paralelă cu BC, adică sînt coliniare.

6. Pe două laturi consecutive ale unui pătrat $ABCD$ se construiesc triunghiurile echilaterale ABE şi BCF (primul interior şi celălat exterior pătratului). Să se demonstreze că punctele D, E, F sînt coliniare.

Rezolvare. In triunghiul isoscel ADE (deoarece $AD=AE$) avem $m(\sphericalangle 1)=30^o$; rezultă $m(\sphericalangle 2)=\frac{180^o-30^o}{2}=75^o$ (fig. X.8). In ΔABE (echilateral), $m(\sphericalangle 3)=60^o$, iar în triunghiul dreptunghic isoscel BEF, $m(\sphericalangle 4)=45^o$. Unghiurile 2, 3 şi 4 adiacente–consecutive însumează 180^o, deci ele sînt situate de aceeaşi parte a unei drepte; urmează că punctele D, E şi F sînt coliniare.

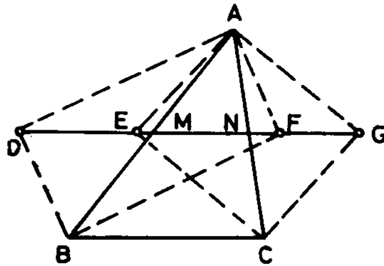


Fig.X.7

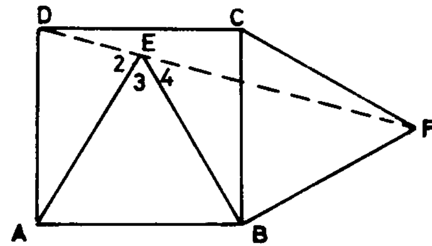


Fig.X.8

7. In patrulaterul $ABCD$ se consideră M şi N mijloacele laturilor opuse AB şi CD. Prin M ducem MP paralelă cu BC şi MQ paralelă cu AD, iar prin vîrfurile C şi D cîte o paralelă cu AB. Se formează astfel paralelogramele $BCPM$ şi $ADQM$. Să se arate că vîrfurile P şi Q ale acestor paralelograme sînt coliniare cu punctul N.

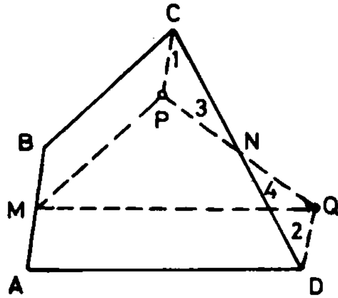


Fig.X.9

Rezolvare. Se compară triunghiurile CNP şi DNQ (fig.X.9); ele au: $[CP]\equiv[DQ]\equiv\frac{[AB]}{2}$, $[CN]\equiv[DN]\equiv\frac{[CD]}{2}$ $m(\sphericalangle 1)=m(\sphericalangle 2)$ ca alterne interne formate de paralele CP şi DQ cu secanta CD. Din congruenţa acestor triunghiuri rezultă $m(\sphericalangle 3)=m(\sphericalangle 4)$. Aceste două unghiuri egale sînt situate de o parte şi de alta a dreptei CD; rezultă că ele sînt opuse la vîrf; atunci laturile PN şi NQ sînt în prelungire şi punctele P, N, Q sînt coliniare.

S–a utilizat teorema: dacă două unghiuri egale au vîrful comun, o latură comună şi sînt aşezate de o parte şi de alta a laturii comune, atunci ele sînt opuse la vîrf.

8. Două cercuri O_1 şi O_2 sînt tangente exterior în punctul T. O secantă dusă prin T taie cercurile în A şi B. Se consideră diametrele AC şi BD ale cercurilor O_1 şi O_2, respectiv. Să se demonstreze că punctele C şi D sînt coliniare cu punctul T de tangenţă.

Rezolvare. Unghiurile ATC şi BTD sînt drepte ca unghiuri înscrise într–un semicerc (fig.X.10). Aceste unghiuri egale au vîrful comun şi sînt situate de o parte şi de alta a unei laturi comune (AB); ele sînt unghiuri opuse la vîrf, adică laturile CT şi DT sînt în prelungire; prin urmare punctele C,T şi D sînt coliniare.

9. Se consideră un triunghi oarecare ABC. Să se demonstreze că ortocentrul acestui triunghi (H), centrul de greutate şi centrul cercului circumscris triunghiului sînt trei puncte coliniare.

Rezolvare. Fie AD diametrul cercului circumscris ce trece prin vîrful A al triunghiului (fig.X.11). Se demonstrează că patrulaterul $BHCD$ este paralelogram. Diagonalele sale sînt BC şi HD, deci A'' este centrul de simetrie al paralelogramului. Rezultă că: AA'' este o mediană a triunghiului ABC; OA'' este perpendiculară pe BC; OA'' este paralelă cu înălţimea AA'a triunghiului; OA'' este linie mijlocie în triunghiul $ADH \rightarrow OA''=AH/2$. Se uneşte H cu O. Se demonstrează că triunghiurile $A''OG$ şi AGH sînt

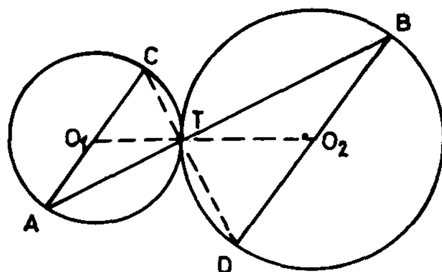


Fig.X.10

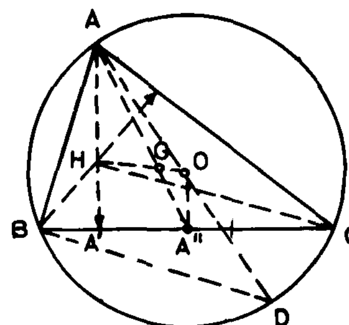


Fig.X.11

asemenea, raportul lor de asemănare fiind 1/2; adică pe mediana AA'' există un punct care determină raportul $\frac{GA''}{GA}=\frac{1}{2}$. Rezultă că G este centrul de greutate al triunghiului, adică centrul de greutate se află pe linia care uneşte ortocentrul cu centrul cercului circumscris. Cele trei puncte H,G şi O sînt coliniare. Am utilizat, în ultima parte a demonstraţiei, ***asemănarea a două triunghiuri*** cu interpretarea raportului lor de asemănare.

10. Se dă triunghiul ABC. Să se demonstreze că picioarele perpendicularelor duse dintr–un punct oarecare al cercului circumscris triunghiului pe laturile triunghiului sînt trei puncte coliniare.

Rezolvare. Demonstraţia se face pe baza proprietăţilor patrulaterului inscriptibil. Notăm cu D, E şi F picioarele perpendicularelor duse dintr–un punct oarecare M al cercului respectiv pe laturile BC, AB şi AC ale triunghiului (fig.X.12). Patrulaterul $BEMD$ este inscriptibil avînd două unghiuri opuse suplementare (unghiurile din D şi E)$\rightarrow \sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 2$. Patrulaterul $DMCF$ este inscriptibil deoarece diagonalele (CD şi FM) fac unghiuri egale cu laturile opuse DM şi CF ale patrulaterului $\rightarrow \sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 4$. Pe de altă parte în triunghiurile dreptunghice BEM şi CFM avem $\sphericalangle EBM \equiv \sphericalangle MCF$ pe baza proprietăţii unghiului exterior al patrulaterului înscris $ABMC \rightarrow \sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 4$ fiind complemente de unghiuri egale. De aici rezultă congruenţa unghiurilor 1 şi 3 care au vîrful comun D, o latură comună (latura BC), fiind aşezate de o parte şi de alta a acestei laturi. Acelaşi raţionament ca şi în cazul problemelor 7 şi 8 conduce la concluzia că punctele D, E, F sînt coliniare şi dreapta pe care se află ele situate este numită în geometrie ***dreapta lui Simson***.

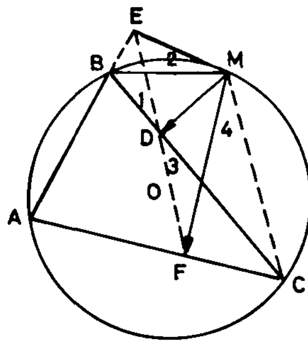


Fig.X.12

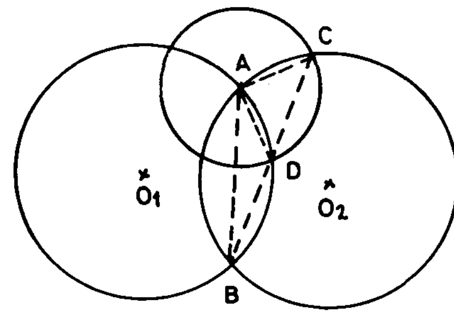


Fig.X.13

11. Două cercuri de raze egale se taie în punctele A şi B. Din A drept centru şi cu o rază arbitrară se descrie un alt cerc care le taie pe primele două în patru puncte. Să se demonstreze că punctul B şi două dintre punctele de intersecţie ale cercului al treilea sînt coliniare.

Rezolvare. $[AC]\equiv[AD]$ ca raze în cercul al treilea (fig.X.13). Aceste raze congruente sînt coarde congruente în cercurile egale O_1 şi $O_2 \rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$ şi deci arcele au aceeaşi măsură. Rezultă că unghiul ABD (înscris în cercul O_1) are aceeaşi măsură ca şi unghiul ABC (înscris în cercul O_2). *Aceste unghiuri congruente au vîrful comun (B), o latură comună (AB) şi sînt aşezate de aceeaşi parte a laturii comune,* deci laturile BC şi BD se suprapun rezultînd că punctele B, D şi C sînt coliniare.

12. Dintr–un punct situat pe un cerc se duc trei coarde şi pe aceste coarde ca diametre se descriu trei cercuri. Să se demonstreze că aceste trei cercuri au un punct comun se taie două cîte două în alte trei puncte coliniare.

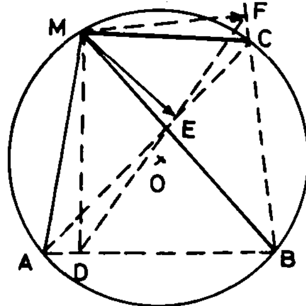


Fig.X.14

Rezolvare. Pe cercul O considerăm punctul M prin care trec cele trei coarde MA, MB, MC şi dreapta lui Simson a punctului M faţă de triunghiul ABC determinat de extremităţile celor trei coarde (fig.X.14). Vom demonstra că această dreaptă conţine punctele de intersecţie ale cercurilor ce ar fi descrise pe coardele considerate ca diametre. Intr–adevăr, perpendiculara MD dusă din M pe latura AB a triunghiului ABC este coarda comună a cercurilor descrise pe MA şi MB cu diametre deoarece $m(\sphericalangle ADM)=m(\sphericalangle BDM)=90^{o}$ reprezintă unghiuri drepte înscrise în semicercurile corespunzătoare cu diametrele MA şi MB. Să recunoaştem că – prin construcţie– D este un punct al dreptei lui Simson. Analog se demonstrează pentru punctele E şi F, picioarele perpendicularelor duse din M pe laturile AC şi respectiv BC.
Dreapta lui Simson care trece prin D, E, F este dreapta cerută.

X.4. PROBLEME DE CONSTRUCŢII GEOMETRICE

A. Probleme rezolvate

1. Să se constuiască un triunghi ABC, cînd se cunoaşte: $AB=c=7{,}8$ cm, înălţimea coborîtă din C pe AB, $h_c=4{,}3$ cm şi $m(\sphericalangle ABC)=m(\sphericalangle B)=50^{o}$.

Rezolvare. M e t o d a 1. Intr–un punct arbitrar E, luat pe AB=7,8 cm, ridicăm o perpendiculară, pe care luăm o lungime $EF=h_c$=4,3 cm, şi prin F ducem o paralelă la AB. Aceasta taie dreapta BB' care trece prin B şi face cu AB unghiul B cu m(B)=50°, în punctul C, care este al treilea vîrf al triunghiului ABC.

M e t o d a 2–a. Vom căuta la început să construim triunghiul DCB. Pentru aceasta, luăm un segment de dreaptă $DC=h_c$= =4,3 cm (fig.X.15). In punctul C ducem o dreaptă CB astfel ca m(∢DCB)=90°–m(∢B)=40°, iar în D ducem o perpendiculară DB pe latura DC. Obţinem la intersecţia acestor două drepte vîrful B al triunghiului. Apoi este suficient să luăm o lungime $BA=c$=7,8 cm şi obţinem şi al treilea vîrf al triunghiului ABC.

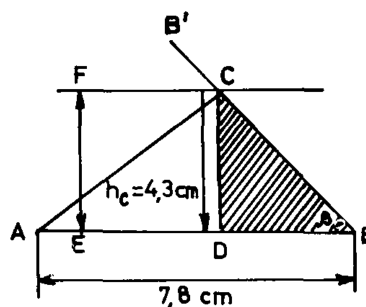


Fig.X.15

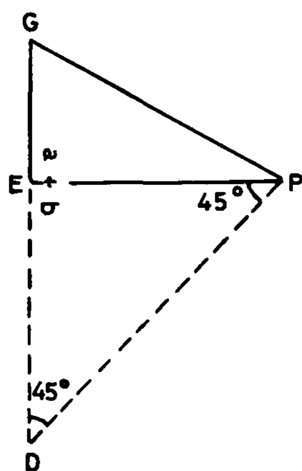


Fig.X.16

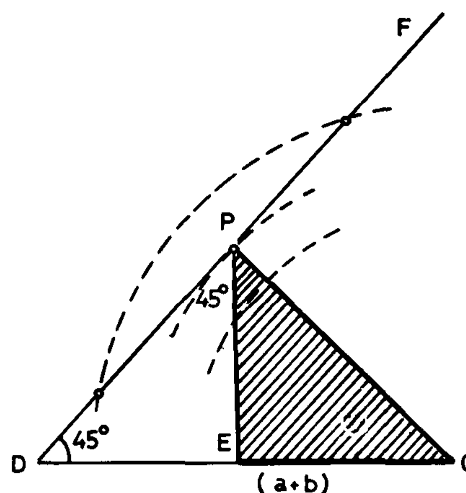


Fig.X.17

2. Să se construiască un triunghi dreptunghic cînd cunoaştem suma catetelor şi ipotenuza: $a+b$ (suma catetelor), c (ipotenuza).

Rezolvare. 1) Considerăm problema rezolvată şi fie GEP triunghiul căutat (fig.X.16). Construim triunghiul dreptunghic isoscel DEP, în care $[EP]\equiv[ED]$. Analizăm triunghiul PGD şi deducem modul de construcţie.

2) *Construcţia figurii.* Pe segmentul $DG=a+b$ (suma catetelor),în punctul D, se construieşte un unghi de 45°. Din G se duce un arc de cerc cu raza cît ipotenuza dată c. Triunghiul cerut este GEP (fig.X.17).

3) *Discuţie.* Dacă arcul de cerc taie DF într–un punct, avem o soluţie; dacă taie pe DF în două puncte, avem două soluţii. Dacă arcul de cerc nu taie pe DF, nu avem nici o soluţie.

3. Să se construiască un trapez $ABCD$ cunoscîndu–i lungimea bazei mari $AB=a$, a bazei mici $CD=b$ şi lungimile $AC=d_1$, $BC=d_2$ ale celor două diagonale.

Rezolvare. Presupunem trapezul construit (fig.X.18, pag. 372). Prelungim AB cu segmentul $BE=CD=b$. Patrulaterul $BEDC$ este un paralelogram, avînd laturile opuse BE şi CD congruente şi paralele. Rezultă că $[BD]\equiv[CE]$.

După aceste observaţii putem deduce construcţia cerută, şi anume:

Vom construi în prealabil triunghiul AEC, căruia îi cunoaştem toate cele trei laturi: $AE=a+b$, $AC=d_1$,

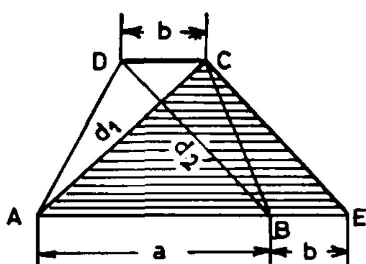


Fig.X.18

$CE=d_2$ (observînd că punctul C se va afla la întretăierea arcelor de cerc descrise din A şi E cu raze egale cu d_1 şi d_2). O dată C aflat, determinăm vîrful D, ducînd $DC \parallel AE$ şi egal cu b. Acesta este şi un vîrf al trapezului. In ceea ce priveşte vîrful B, el se află pe AE astfel că $AB=a$.

Discuţie. Pentru ca problema să fie posibilă, trebuie să putem construi triunghiul ACE şi aceasta se poate face dacă cele patru lungimi, a, b, d_1, d_2 satisfac inegalităţile: $a+b<d_1+d_2$, $a+b>d_1-d_2$, căci într–un triunghi o latură este mai mică decît suma celorlalte două, dar mai mare decît diferenţa lor.

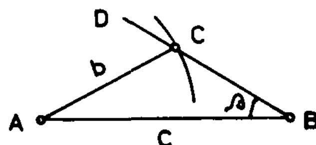


Fig.X.19

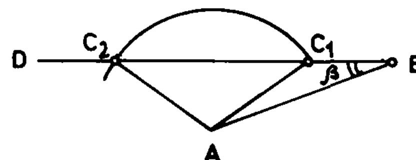


Fig.X.20

4. Să se construiască un triunghi ABC, cînd cunoaştem lungimile a două laturi $AB=c$, $AC=b$ şi $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle \beta$, opus uneia dintre ele. Caz particular: $c=5$ cm, $b=3$ cm, $m(\sphericalangle \beta)=25^o$.

Rezolvare. Să presupunem triunghiul ABC construit. Observăm că punctele A şi B sînt capetele unui segment de dreaptă $[AB]$, de lungime cunoscută c (fig.X.19). Toată problema constă în a observa cum se găseşte vîrful C.

Constatăm că: 1) C se află pe semidreapta BD, care face un unghi ß cu AB. 2) C se află pe un arc de cerc cu centrul în A şi de rază AC, cunoscută şi egală cu b.

In cazul particular al problemei se consideră un segment de dreaptă $AB=c=5$ cm. In B ducem o semidreaptă BD, care face un unghi ß cu măsura de 25^o cu AB (fig.X.20). Cu centrul în A şi cu o rază egală cu $b=3$ cm descriem un arc de cerc care intersectează dreapta BD în două puncte: C_1 şi C_2. Am obţinut astfel două triunghiuri ABC_1 şi ABC_2 care răspund problemei noastre.

Discuţie. Să judecăm dacă problema este totdeauna posibilă, adică dacă putem face construcţia triunghiului cu orice date.

– Latura AB, alăturată unghiului cunoscut, o putem construi întotdeauna, oricare ar fi mărimea ei.

– Unghiul ABC poate fi construit cu vîrful în B, oricare ar fi masura lui (în afară de cazul cînd $m(\sphericalangle \beta)=0$ sau 180^o).

– Cînd luăm în compas mărimea laturii AC, opusă unghiului dat, şi descriem cercul cu centrul în vîrful A, trebuie ca acest cerc să taie a doua latură a unghiului ß, pentru a putea determina vîrful al treilea al triunghiului; adică lungimea acestei laturi trebuie să fie mai mare sau cel puţin egală cu distanţa vîrfului A la latura BD. Deducem de aici că sînt posibile mai multe cazuri: 1) Dacă latura opusă unghiului dat este egală cu această distanţă, cercul atinge latura BD într–un singur punct. Avem o singură soluţie, şi anume un triunghi dreptunghic. 2) Dacă latura opusă unghiului dat este mai mare decît această distanţă, avem două soluţii diferite (aşa cum s–a întîmplat cu datele de mai sus), dar avem de observat că $[AC_1]\equiv[AC_2]$. 3) Dacă latura opusă unghiului dat este mai mică decît această distanţă, triunghiul nu se închide şi construcţia nu se poate face.

5. Să se ducă într-un cerc o coardă paralelă cu o dreaptă dată şi care să aibă o lungime dată *l*.

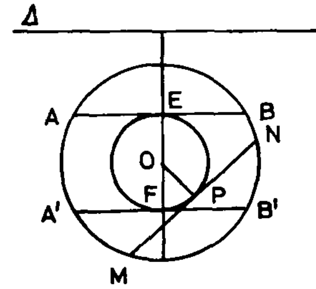


Fig.X.21

Rezolvare. Fie Δ dreapta dată (fig.X.21). Dintr-un punct arbitrar *M*, luat pe cercul *O*, descriem un arc de cerc cu raza *l*. Fie *N* unul din punctele unde acest arc de cerc taie cercul *O*. Am fixat astfel pe cercul *O* o coardă *MN* a cărei lungime este *l*. Ea nu este însă paralelă cu Δ. Acum trebuie să o aşezăm astfel ca ea să fie paralelă cu Δ. Dacă ducem din *O* o perpendiculară *OP* pe *MN* şi din *O* ca centru descriem un cerc cu raza *OP* observăm că coarda *MN* este tangentă la acest cerc şi că orice coardă a primului cerc tangentă la cel de-al doilea are aceeaşi lungime *l*. Atunci nu avem decît să construim o tangentă la cercul interior, paralelă cu dreapta Δ, construcţie care se face uşor. Din *O* ducem o perpendiculară pe Δ. Ea va tăia cercul interior în punctele *E* şi *F*. Tangentele în *E* şi *F* la cercul cel mic răspund problemei noastre, adică problema admite două soluţii. Pentru ca problema să fie posibilă, trebuie să ni se dea lungimea *l* mai mică decît diametrul cercului mare, fiindcă într-un cerc cea mai mare coardă este diametrul său.

6. Fie *AD* o coardă în cercul de centru *O*; o altă coardă, *DC* taie diametrul ce trece prin *A* în punctul *B*. Cum trebuie dusă coarda *DC* pentru ca $[AB]\equiv[AC]$? Problema este totdeauna posibilă ?

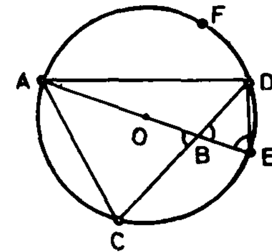


Fig.X.22

Rezolvare. Fie *E* punctul diametral opus lui *A* (fig.X.22). Presupunem problema rezolvată, adică am dus coarda *DC* astfel ca $[AB]\equiv[AC]$. Atunci, triunghiul *ABC* este isoscel, de unde: $\sphericalangle ACB\equiv\sphericalangle ABC$. Insă, $\sphericalangle ABC\equiv\sphericalangle DBE$ ca opuse la vîrf, iar $\sphericalangle ACD\equiv\sphericalangle BED$ ca unghiuri cu vîrful pe cerc şi avînd aceeaşi măsură $\frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$. Urmează de aici că, dacă triunghiul *ABC* este isoscel, şi triunghiul *DBE* este isoscel. Fie acum *F* un punct pe arcul $\overset{\frown}{AD}$, astfel ca $\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{DF}$. Insă: $m(\sphericalangle ABC)=\frac{\overset{\frown}{DE}}{2}+\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}=\frac{\overset{\frown}{DF}}{2}+\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ şi $m(\sphericalangle ACD)=\frac{\overset{\frown}{DF}}{2}+\frac{\overset{\frown}{FA}}{2}$, de unde reiese că $\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{AC}$.

De aici reiese construcţia. Se ia $\overset{\frown}{DF}=\overset{\frown}{DE}$ şi apoi $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AF}$. Unind punctul *C* astfel aflat cu *D*, dreapta *DC* este coarda căutată. Ea va tăia pe *AE* în *B*, aşa încît $[AB]\equiv[AC]$.

Discuţie. Pentru ca problema să fie posibilă, trebuie ca arcul *DA* să fie mai mare decît arcul *DE*, căci numai aşa *F* este cuprins între *D* şi *A*. Cum însă $\overset{\frown}{DE}+\overset{\frown}{DA}=180^{\circ}$, rezultă că lungimea coardei *AD* trebuie să fie mai mare decît latura pătratului înscris în cercul *O*. Nici în cazul cînd coarda *AB* este egală cu latura pătratului problema nu este posibilă, căci atunci punctul *F* cade chiar în *A*.

7. Se dau trei drepte (D_1), (D_2), (D_3). Să se găsească pe dreapta (D_1) un punct astfel ca simetricul său faţă de dreapta (D_2) să fie aşezat pe dreapta (D_3).

Rezolvare. Ducem simetrica dreptei (D_1) faţă de dreapta (D_2), găsim dreapta (D_4) care taie pe (D_3) în punctul *M'* (fig.X.23, pag. 374). Simetricul punctului *M'* faţă de dreapta (D_2) va fi punctul *M* aşezat pe dreapta (D_1); acesta este punctul căutat.

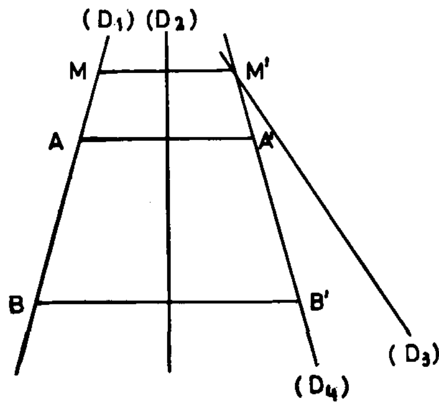


Fig.X.23

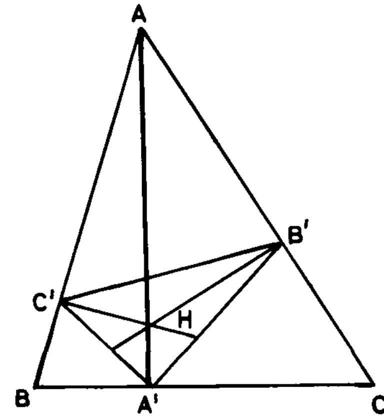


Fig.X.24

8. Să se construiască un triunghi cunoscînd picioarele înălţimilor.

Rezolvare. Presupunem problema rezolvată, A' , B' , C' sînt picioarele celor trei înălţimi (fig.X.24). Obţinem triunghiul $A'B'C'$ ortic triunghiului cerut. Inălţimile AA' , BB' , CC' sînt bisectoarele unghiurilor triunghiului $A'B'C'$. Deducem construcţia: 1) se construieşte triunghiul $A'B'C'$; 2) bisectoarele celor trei unghiuri A', B', C' se întîlnesc în H (ortocentrul); 3) în A' , B' , C' ducem perpendiculare la aceste trei bisectoare şi obţinem astfel vîrfurile A, B, C.

9. Să se construiască un triunghi dreptunghic cînd se cunosc înălţimile şi mediana care pleacă din vîrful unghiului drept.

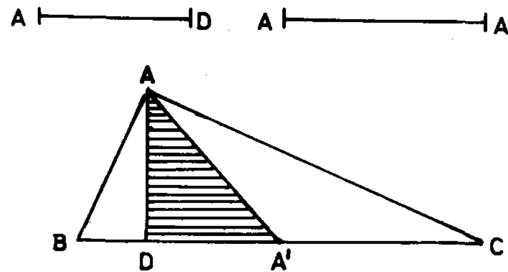


Fig.X.25

Rezolvare. Presupunem problema rezolvată şi analizăm figura X.25. In triunghiul ABC cunoaştem înălţimea AD şi mediana AA'. De aici rezultă modul de construcţie: 1) putem construi triunghiul dreptunghic ADA', în care cunoaştem cateta AD şi ipotenuza AA'; 2) ştim că în orice triunghi dreptunghic mediana $AA' = \frac{BC}{2}$, deci putem construi $A'B$ şi $A'C$, fiecare congruent cu AA', obţinînd astfel vîrfurile triunghiului.

10. Să se construiască triunghiul ABC, cunoscînd mijloacele B', C' ale laturilor AC şi AB, precum şi piciorul D al înălţimii care cade pe latura BC.

Rezolvare. Presupunem problema rezolvată şi fie ABC, triunghiul cerut (fig.X.26). In acest triunghi cunoaştem D, piciorul înălţimii AD, B', mijlocul laturii AC şi C' mijlocul laturii AB. Analizînd figura, se vede uşor că A este simetricul lui D faţă de linia mijlocie $B'C'$. Din cele constatate deducem modul de construcţie: 1) unim B' cu C'; 2) construim punctul A simetric cu D faţă de $B'C'$; 3) ducem în

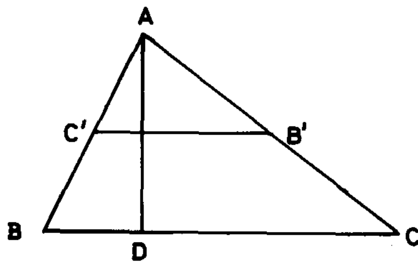


Fig.X.26

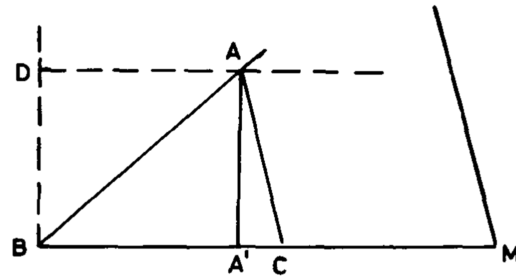


Fig.X.27

D o perpendiculară pe *AD*; 4) dreapta *AC'* taie această perpendiculară în *B*; 5) dreapta *AB'* va tăia această perpendiculară în *C*. Triunghiul *ABC* astfel construit corespunde datelor cerute în problemă.

11. Să se construiască un triunghi cunoscînd două unghiuri şi înălţimea dusă din vîrful unghiului al treilea.

Rezolvare. In triunghiul *ABC* (fig.X.27) cunoaştem unghiul *B*, unghiul *C*, şi înălţimea *AA'*. Se vede uşor că, ducînd înălţimea *AA'*, obţinem două triunghiuri dreptunghice: triunghiul *AA'B* şi triunghiul *AA'C*, cunoscînd în fiecare din ele cateta *AA'* şi unghiul *B*, respectiv unghiul *C*. De aici deducem modul de construcţie: 1) construim unghiul *B*; 2) construim o paralelă la una din laturile unghiului, la o distanţă cît înălţimea dată care taie a doua latură a unghiului *B* în vîrful *A*; 3) perpendiculara *AA'* va fi înălţimea triunghiului cerut; 4) în punctul *M*, luat arbitrar pe prima latură a unghiului, construim un unghi congruent cu unghiul *C*; 5) din *A* ducem prin mişcare de translaţie o paralelă la a doua latură a acestui unghi şi obţinem astfel al treilea vîrf *C* al triunghiului. *A,B,C* sînt vîrfurile triunghiului cerut.

12. Să se construiască un triunghi dreptunghic cunoscînd ipotenuza şi înălţimea, corespunzătoare ei.

Rezolvare. Construcţia figurii fiind uşoară, nu mai este nevoie să presupunem problema rezolvată, ci trecem direct la construcţie (fig.X.28).
1) Construim ipotenuza *BC* (dată). 2) Construim un semicerc cu diametrul *BC*. 3) Ducem în *B* o perpendiculară pe *BC*. 4) Luăm $[BD] \equiv [AA']$ (dată).

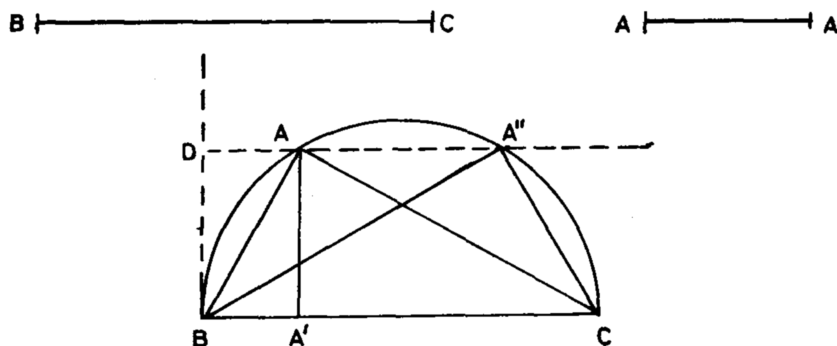


Fig.X.28

5) Din D ducem o paralelă la BC, care taie cercul în punctele A şi A''. Triunghiul $BA''C$ şi triunghiul $BA'C$ sînt soluţiile problemei.

Discuţie. Notăm $R=\frac{BC}{2}$.

Dacă $AA'<R$, avem două soluţii. Dacă $AA'=R$, avem o singură soluţie. Dacă $AA'>R$, triunghiul nu se poate construi.

13. Să se construiască un triunghi ABC, cunoscînd mărimile laturilor AB, BC şi mediana AA'.

Rezolvare. Presupunem problema rezolvată. La triunghiul ABC (fig.X.29) cunoaştem AB, BC şi mediana AA'. Din analiza figurii putem vedea modul de construcţie: 1) construim triunghiul ABA', în care cunoaştem AB, $BA'=\frac{BC}{2}$ şi AA' deci cele trei laturi; 2) $A'C=BA'=\frac{BC}{2}$; 3) unim A cu C. Triunghiul astfel construit corespunde condiţiilor date.

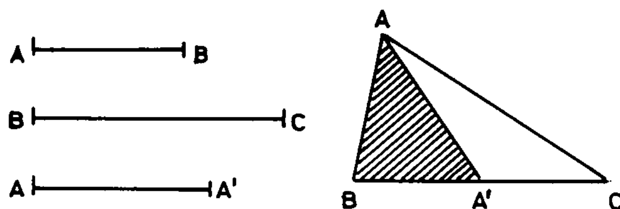


Fig.X.29

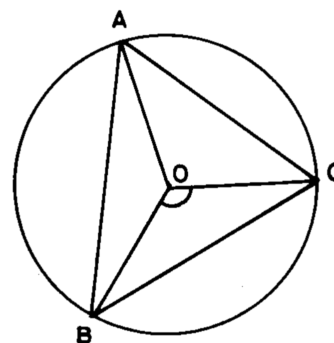


Fig.X.30

14. Să se construiască un triunghi cunoscînd unghiurile şi raza cercului circumscris.

Rezolvare. Presupunem problema rezolvată.

Analizînd figura X.30 se vede uşor că unghiul la centru BOC este dublul unghiului A; analog pentru celelalte unghiuri.

De aici se deduce modul de construcţie: 1) construim cercul cu raza dată R; 2) ducem o rază arbitrară OB; 3) construim unghiul la centru, de măsură 2 m($\sphericalangle A$), şi obţinem vîrful C al triunghiului; 4) construim în continuare al doilea unghi la centru, de măsură 2 m($\sphericalangle B$), şi obţinem al treilea vîrf A; 5) unim A cu B şi obţinem triunghiul cerut.

B. Probleme propuse

15. Se dau două unghiuri ale unui triunghi. Să se construiască cel de–al treilea unghi.

16. Se dă un unghi ascuţit al unui triunghi dreptunghic. Să se construiască celălalt unghi ascuţit.

17. Să se ducă o paralelă cu o dreaptă dată, care să fie la o distanţă dată de prima dreaptă.

18. Să se împarta în două părţi egale un unghi al cărui vîrf nu încape în cadrul foii de desen.